Moviment brownià i càlcul estocàstic

Aureli Alabert i Mercè Farré

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

Draft Version: 2002/5/17. A. Alabert and M. Farré

Índex

1. Generalitats

1.1 Motivació

Una variable aleatòria real representa una magnitud que es pot mesurar com un nombre real, però que produirà diferents resultats cada cop que es mesuri. Matemàticament, es modela com una aplicació $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$, definida sobre un cert espai de probabilitat $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. La aplicació ha de tenir la propietat de ser *mesurable:* Si B és un conjunt borelià de $\mathbb{R}$ (ho notarem $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$), aleshores $X^{-1}(B) \in \mathfrak{F}$. La probabilitat que X prengui un valor en un borelià B ve donada per $P(X^{-1}(B))$. Això indueix una probabilitat μ en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$, que s'anomena la *llei de X:*

$$\mu(B) := P(X^{-1}(B)) \ , \quad B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})) \ .$$

No hi ha cap dificultat en estendre aquestes nocions a aplicacions X amb valors en un espai de mesura qualsevol $(S, \mathfrak{S})$: S'ha de satisfer $X^{-1}(B) \in \mathfrak{F}$, $\forall B \in \mathfrak{S}$, i aleshores $\mu(B) := P(X^{-1}(B))$ defineix una probabilitat en $(S, \mathfrak{S})$, que s'anomena igualment la *llei de X*.

Suposem ara que tenim una certa magnitud real que varia en el temps. En cada instant de temps podem mesurar la magnitud i obtenir un nombre. En definitiva, el que tenim és una *funció:* Si el temps corre, per exemple, a partir d'un instant 0, tindrem una funció

$$f\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \ .$$

Si cada cop que es mesura la magnitud, el resultat és aleatori, tindrem, en cada instant de temps una variable aleatòria X_t, en lloc d'un nombre real determinat. Ja no tenim aleshores una funció, sino un *procés estocàstic*.

Una funció $f(t)$ és un cas extrem de procés estocàstic en el qual l'atzar no intervé: $X_t \equiv f(t)$. En l'altre extrem, podem imaginar que totes les variables X_t siguin independents entre sí; és a dir, que no hi hagi cap relació entre les magnituds que es mesuren en un instant i les que es mesuren en qualsevol altre instant. Els casos interessants però estan al mig: La magnitud evoluciona en el temps de manera aleatòria, però mantenint una certa relació amb el que ha succeït en instants anteriors i el que succeirà en el futur.

Com abans, no hi ha cap problema en substituir $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ per qualsevol altre espai de mesura.

La necessitat per estudiar magnituds aleatòries que varien a "temps continu" té l'origen en la física estadística clàssica. Tal com propugnava Ludwig Boltzmann (1866–1872), les lleis macroscòpiques del comportament dels gasos descansen en principis mecànics de les molècules microscòpiques que els constitueixen. D'aquesta manera, és natural que la física estadística "heredi" de la seva base mecànica el concepte d'evolució a temps continu.

El tractament matemàtic rigorós no va venir fins Bruno de Finetti i Andrei Kolmogorov (1929) (independentment), i sobre tot Kolmogorov (1933). Perquè es va tardar tant? Possiblement, perquè no és fàcil imaginar com es pot posar en termes matemàtics la idea d'un atzar que produeix esdeveniments aleatòris que se succeeixen l'un a l'altre d'una manera continua.

Es pot considerar també l'evolució d'una magnitud aleatòria a temps discret: Per a cada $n \in \mathbb{N}$, tenim una variable aleatòria X_n. Aquests tipus de processos venen motivats més aviat per les aplicacions a l'Estadística, i plantegen molts menys problemes matemàtics de fonamentació que els processos estocàstics a temps continu.

Fins el 1929, els processos estocàstics estudiats eren pràcticament tots a temps discret, amb les excepcions de Louis Bachelier (1900), Filip Lundberg (1903), Albert Einstein (1905), i Norbert Wiener (1921). Però els dos primers no tenien com a motivació la física, curiosament, sino que discutien aplicacions a les finances i a les assegurances. En tot cas, si bé Wiener construí rigorosament el procés que porta el seu nom, no es pot dir que hi hagués una teoria matemàtica ben fonamentada i prou general fins el treball de Kolmogorov (1933).

1.2 Processos estocàstics reals indexats en $\mathbb{R}^+$

1.2.1 Definició

Un *procés estocàstic real indexat en* $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ és una família de variables aleatòries reals $\{X_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ definides en un mateix espai de probabilitat $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. $\square$

En altres paraules, la definició estableix que un procés estocàstic real indexat en $\mathbb{R}^+$ és una aplicació

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ &\xrightarrow{\ X\ } L^0 \\ t &\longmapsto X_t \end{aligned}$$

on $L^0 \equiv L^0(\Omega, \mathfrak{F}, P; \mathbb{R})$ denota l'espai vectorial de totes les variables aleatòries a valors reals.

Podem pensar-lo també d'altres maneres:

1) Com una aplicació

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ \times \Omega &\xrightarrow{\ X\ } \mathbb{R} \\ (t,\omega) &\longmapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

Observació: De la mesurabilitat de cada X_t no es dedueix que aquesta funció sigui mesurable respecte la σ-àlgebra producte $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathfrak{F}$. Quan ho és, diem que el procés és *mesurable.* (Ho discutirem més endavant.)

2) Per a cada $\omega \in \Omega$, el procés defineix una funció

$$\begin{aligned} X_{\cdot}(\omega) \colon \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

que s'anomena *trajectòria del procés.* (Tampoc no hi ha res a dir sobre la mesurabilitat, o qualsevol altre propietat d'aquesta funció, doncs no estem suposant de moment cap estructura en el conjunt d'índexos $\mathbb{R}^+$.) Per tant, també podem veure el procés com una aplicació

$$\begin{aligned} X \colon \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}^+} \\ \omega &\longmapsto X_{\cdot}(\omega) \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

on $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$ és una notació pel producte cartesià $\underset{t\in\mathbb{R}^+}{\times} \mathbb{R}$ (de "$\mathbb{R}^+$ còpies" de $\mathbb{R}$), que no és més que el conjunt de totes les funcions $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

Aquest últim punt de vista és una extensió natural del concepte de vector aleatori n-dimensional. Un vector aleatori $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ format per variables aleatòries reals $X_1, \dots, X_n$ es pot pensar també com una aplicació de Ω en l'espai de les funcions $\{1, \dots, n\} \to \mathbb{R}$. En el cas dels processos estocàstics, substituïm el conjunt finit $\{1, \dots, n\}$ pel conjunt infinit $\mathbb{R}^+$.

1.3 Llei d'un procés estocàstic

Donat un espai de mesura $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ i una funció mesurable X a valors en un altre espai mesurable $(S, \mathfrak{S})$, es defineix la *mesura imatge* de P per X com la mesura P_X en $(S, \mathfrak{S})$ donada per

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) \ , \quad B \in \mathfrak{S} \ .$$

Quan P és una probabilitat, X s'anomena *variable aleatòria S-valuada* i a la mesura imatge corresponent l'anomenem la *llei de X*.

Si pensem un procés estocàstic real com l'aplicació (1.2.1) i posem en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$ una σ-àlgebra tal que X sigui mesurable, tindrem de fet una variable aleatòria $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$-valuada, i podrem parlar de la *llei del procés X*. És d'esperar que aquesta llei estigui d'alguna manera relacionada amb les lleis de cada variable aleatòria individual X_t; per exemple, amb la σ-àlgebra que posarem en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$, la pregunta "Quant val $P\{X_t \in B\}$?" tindrà sentit com a pregunta sobre la llei de la variable X_t i com a pregunta sobre la llei del procés estocàstic X. La resposta, doncs, haurà de coincidir.

El que ens cal fer ara és doncs:

1) Definir una σ-àlgebra convenient en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$.
2) Veure que $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$ és mesurable respecte aquesta σ-àlgebra.
3) Obtenir automàticament de 1) i 2) el concepte de llei d'un procés estocàstic.

Quina σ-àlgebra posem en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$? La σ-àlgebra natural en un producte cartesià és la σ-àlgebra producte. En el nostre cas, tenim "$\mathbb{R}^+$ còpies" de l'espai de mesura $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$. La definició i proposició següents estableixen diverses maneres equivalents de pensar la σ-àlgebra producte en aquest cas.

1.3.1 Definició

Donat l'espai mesurable $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$, la *$\sigma$-àlgebra producte* en el producte cartesià $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$ és la més petita σ-àlgebra que fa mesurables les projeccions

$$\begin{aligned} \delta_t\colon \mathbb{R}^{\mathbb{R}^+} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto f(t) \end{aligned}$$

La notarem $\mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+}$. $\square$

1.3.2 Observació

En alguns llibres (per exemple [Karatzas-Shreve]), s'utilitza la notació $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+})$, que indueix a error, perquè suggereix que s'està parlant de la σ-àlgebra dels borelians de l'espai $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$. Però si posem en aquest espai la seva topologia natural, que és la topologia producte de "$\mathbb{R}^+$ còpies de $\mathbb{R}$" (aquest últim amb la topologia habitual de $\mathbb{R}$), la col·lecció dels seus conjunts borelians no coincideix amb $\mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+}$. Concretament, $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+})$ és molt més gran que $\mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+}$.

1.3.3 Proposició

La σ-àlgebra producte en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$ es pot definir equivalentment com:

1) La més petita que fa mesurables les projeccions unidimensionals

$$\begin{aligned} \delta_t\colon \mathbb{R}^{\mathbb{R}^+} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto f(t) \end{aligned}$$

2) La més petita que fa mesurables totes les projeccions en dimensió finita

$$\begin{aligned} \delta_{t_1,\dots,t_n}\colon \mathbb{R}^{\mathbb{R}^+} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ f &\longmapsto (f(t_1),\dots,f(t_n)) \end{aligned}$$

3) La més petita que conté els cilindres de base unidimensional

$$\{\delta_t^{-1}(B) : \ B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \ t \in \mathbb{R}^+\} \ ;$$

4) La més petita que conté els cilindres de base rectangular

$$\{\delta^{-1}_{t_1,\ldots,t_n}(B_1\times\cdots\times B_n):\ B_i\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}),\ t_i\in\mathbb{R}^+,\ n\in\mathbb{N}\}\ ;$$

5) La més petita que conté els cilindres de base finito-dimensional

$$\{\delta^{-1}_{t_1,\ldots,t_n}(B):\ B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R})^n,\ t_i\in\mathbb{R}^+,\ n\in\mathbb{N}\}\ ;$$

6) La formada pels σ-cilindres

$$\{\delta^{-1}_J(B):\ B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R})^J,\ J\subset\mathbb{R}^+\ \textit{numerable}\}\ ,$$

on $\mathfrak{B}(\mathbb{R})^J$ és el producte de "$\sharp J$ còpies" de $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, i δ_J és la projecció natural de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$ en $\mathbb{R}^J$.

Demostració: La σ-àlgebra més petita que fa mesurables les projeccions δ_t és la més petita que conté tots els conjunts de la forma $\{\delta_t^{-1}(B),\ B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}),\ t\in\mathbb{R}^+\}$, per definició. Per tant, $1=3$ és evident. Anàlogament, $2=4$. També és obvi que $3\subset 4\subset 5\subset 6$.

Els conjunts de la forma $B_{t_1}\times\cdots\times B_{t_n}$, amb $t_1,\ldots,t_n\in J$, $n\in\mathbb{N}$, generen $\mathfrak{B}(\mathbb{R})^J$. Per tant, el conjunt $\delta_J^{-1}(B)$, amb $B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R})^J$, pertanyerà a la σ-àlgebra generada pels conjunts de la forma $\delta^{-1}_{t_1,\ldots,t_n}(B_1\times\cdots\times B_n)$, i clarament

$$\delta^{-1}_{t_1,\ldots,t_n}(B_1\times\cdots\times B_n)=\bigcap_{i=1}^n\delta^{-1}_{t_i}(B_i)\ .$$

Això demostra $6\subset 3$.

Finalment, es comprova sense dificultat que els σ-cilindres formen una σ-àlgebra. □

1.3.4 Proposició

Si $\{X_t:\ t\in\mathbb{R}^+\}$ és un procés estocàstic real i considerem en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$ la σ-àlgebra producte, aleshores l'aplicació $X\colon\Omega\to\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$ de (1.2.1) és mesurable.

Demostració: Considerem la col·lecció de conjunts

$$\mathfrak{G}:=\{B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+}:\ X^{-1}(B)\in\mathfrak{F}\}\ .$$

Hem de veure que $\mathfrak{G}=\mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+}$. Veurem que: *a:* $\mathfrak{G}$ és una σ-àlgebra; *b:* $\mathfrak{G}$ conté els cilindres de base unidimensional.

a: $X^{-1}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+})=\Omega\in\mathfrak{F},\ \Rightarrow\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}\in\mathfrak{G}$.
Si $A\in\mathfrak{G}$, aleshores $X^{-1}(A^c)=\big(X^{-1}(A)\big)^c\in\mathfrak{F}$. Per tant, $A^c\in\mathfrak{G}$.
Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in\mathfrak{G}$, aleshores $X^{-1}(\bigcup_n A_n)=\bigcup_n\big(X^{-1}(A_n)\big)\in\mathfrak{F}$. Per tant, $\bigcup_n A_n\in\mathfrak{G}$.

b: Sigui $B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Volem veure que $\delta_t^{-1}(B)\in\mathfrak{G}$. En efecte,

$$X^{-1}(\delta_t^{-1}(B))=(\delta_t\circ X)^{-1}(B)=X_t^{-1}(B)\in\mathfrak{F}\ ,$$

gràcies a la mesurabilitat de X_t. □

Ara estem en condicions de definir la llei d'un procés estocàstic.

1.3.5 Definició

La *llei d'un procés estocástic real* $\{X_t,\ t\in\mathbb{R}\}$ definit en un espai de probabilitat $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ és la llei de la variable aleatòria $X\colon\Omega\to\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$ definida per (1.2.1), on la σ-àlgebra en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$ és la σ-àlgebra producte $\mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+}$. □

Considerem una probabilitat μ sobre l'espai mesurable producte $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+},\mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+})$: Podem considerar, per a cada $J\subset\mathbb{R}^+$ finit, la mesura imatge de μ per la projecció δ_J, que notarem μ_J. És a dir, si $\sharp J=d$, μ_J és la probabilitat sobre $(\mathbb{R}^d,\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$ definida com

$$\mu_J:=\mu\circ\delta_J^{-1}\quad . \tag{1.3.1}$$

1.3.6 Definició

La família de probabilitats $\{\mu_J : \ J \subset \mathbb{R}^+ \text{ finit}\}$ s'anomena *distribucions en dimensió finita de* μ.

□

Les distribucions en dimensió finita de μ compleixen, si $K \subset J$ amb $\sharp K = m$,

$$\mu_K = \mu_J \circ \delta_{J,K}^{-1} \quad , \tag{1.3.2}$$

on $\delta_{J,K}$ és la projecció natural de $\mathbb{R}^d$ en $\mathbb{R}^m$. La comprovació és immediata. La propietat (1.3.2) s'anomena *propietat de consistència* de les distribucions en dimensió finita.

El teorema següent estableix que les distribucions en dimensió finita d'una probabilitat μ la determinen. Veurem la demostració més endavant en una situació una mica més general.

1.3.7 Teorema

Sigui una família de probabilitats $\{\mu_J, \ J \subset \mathbb{R}^+, \ \sharp J = d, \ d \in \mathbb{N}\}$, *cadascuna sobre* $\mathbb{R}^d$, *complint la propietat de consistència (1.3.2).*

Aleshores existeix una única probabilitat μ *a l'espai mesurable* $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}, \mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+})$ *tal que les seves distribucions en dimensió finita són la família donada.* □

1.3.8 Corol·lari

La llei μ_X *d'un procés estocàstic* X *queda determinada per les distribucions en dimensió finita de la llei, és a dir, pels valors*

$$\mu_{X;t_1,\dots,t_d}(B) := P\{(X_{t_1}, \dots, X_{t_d}) \in B\} \ , \quad B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \ , \quad d \in \mathbb{N} \ .$$

1.3.9 Observació

En el Corol·lari 1.3.8, podem posar també que la llei de X queda determinada pels valors

$$P\{X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_d} \in B_d\} \ , \quad B_i \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \ , \quad d \in \mathbb{N} \ ,$$

donat que una probabilitat sobre $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$ queda determinada pels seus valors sobre els rectangles mesurables $B_1 \times \cdots \times B_d$, que formen una semiàlgebra.

1.3.10 Observació

Es pot demostrar que $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ (considerant en $\mathbb{R}^d$ la topologia producte, que és la topologia habitual de $\mathbb{R}^d$) coincideix amb la σ-àlgebra producte de d còpies de $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, o sigui, que $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) = \mathfrak{B}(\mathbb{R})^d$. El mateix és cert amb una potència numerable, és a dir, $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = \mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$.

En canvi, no ho és per una potència no numerable: La σ-àlgebra producte d'una quantitat no numerable de còpies de $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ és més petita que la σ-àlgebra dels borelians de l'espai topològic producte.

En aquest fenomen la cardinalitat de $\mathbb{R}$ no n'és responsable: el mateix passaria amb conjunts de dos punts.

1.4 Representació canònica

Considerem la pregunta elemental següent: Donada una probabilitat μ en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$, existeix alguna variable aleatòria que la tingui per llei? La resposta és sí, trivialment: Prenem l'espai mesurable $(\Omega, \mathfrak{F}) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$, hi posem com a probabilitat P en $(\Omega, \mathfrak{F})$ la mateixa μ, i definim $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ com $X(\omega) = \omega$ (la identitat). Podem dir que X és la variable aleatòria *canònica* corresponent a aquesta llei.

El raonament funciona exactament igual substituint $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \mu)$ per un espai de probabilitat qualsevol. Per tant, en particular, sempre existeix un procés estocàstic amb una llei donada: Donada una llei μ, prenem $(\Omega, \mathfrak{F}, P) = (\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}, \mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+})$, i $X : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$ com la identitat. X s'anomena *procés canònic* relatiu a la llei μ. Cada variable X_t, aplicada a $\omega \in \Omega$, dóna com a resultat la avaluació de la funció ω en el punt t, és a dir,

$$X_t(\omega) = \omega(t) \ .$$

Al prendre $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ igual al propi espai de probabilitat on tenim definida la pressumpta llei, estem fent també una elecció "canònica"; és el *espai canònic* relatiu a aquesta llei.

1.5 Processos estocàstics més generals

Hem parlat de procesos estocàstics reals indexats en $\mathbb{R}^+$. Es pot estendre la definició de procés estocàstic per cobrir situacions més generals. En general, un procés estocàstic pot estar indexat per un conjunt qualsevol i prendre valors en qulasevol espai mesurable.

1.5.1 Definicions

Sigui T un conjunt qualsevol.
Sigui $(S, \mathfrak{S})$ un espai mesurable.
Un *procés estocàstic a valors en* $(S, \mathfrak{S})$ *indexat en* T és una família de variables aleatòries $\{X_t,\ t \in T\}$, valuades a $(S, \mathfrak{S})$ i definides en un mateix espai de probabilitat $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.
El conjunt T s'anomena en general *espai de paràmetres*. Quan T és un conjunt totalment ordenat, se sol anomenar *temps*. Cada $t \in T$ és aleshores un *instant de temps*.
Quan T és un interval de $\mathbb{R}$, parlem de *procés estocàstic a temps continu*. Quan T és un subconjunt dels nombres enters, parlem de *procés estocàstic a temps discret*. □

Les situacions més habituals són $T = \mathbb{R}^+$, $T = [0, t_0] \subset \mathbb{R}^+$ (temps continu) i $T = \mathbb{N}$ (temps discret). També es consideren habitualment processos indexats en un subconjunt de $\mathbb{R}^n$, i en tal situació s'utilitzen també els noms de *camp aleatori* o *procés estocàstic multiparamètric*. Quant a l'espai d'estats, la situació més comú és $(S, \mathfrak{S}) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ i $(S, \mathfrak{S}) = (\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$.

Igual que en el cas particular dels processos reals indexats en $\mathbb{R}^+$, la definició general estableix que un procés estocàstic és una aplicació

$$\begin{aligned} T &\xrightarrow{\ X\ } L^0(\Omega, \mathfrak{F}, P; S, \mathfrak{S}) \\ t &\longmapsto X_t \end{aligned}$$

on $L^0(\Omega, \mathfrak{F}, P; S, \mathfrak{S})$ denota l'espai vectorial de totes les variables aleatòries (funcions mesurables) de $(\Omega, \mathfrak{F})$ en $(S, \mathfrak{S})$, i es pot pensar també com

1) Una aplicació

$$\begin{aligned} T \times \Omega &\xrightarrow{\ X\ } S \\ (t, \omega) &\longmapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

2) Una aplicació

$$\begin{aligned} X \colon \Omega &\longrightarrow S^T \\ \omega &\longmapsto X_\cdot(\omega) \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

on S^T és una notació pel producte cartesià $\underset{t \in T}{\times} S$ (de "T còpies" de S), que no és més que el conjunt de totes les funcions $T \to S$. Cadascuna d'aquestes funcions,

$$\begin{aligned} X_\cdot(\omega) \colon T &\longrightarrow S \\ t &\longmapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

s'anomena *trajectòria del procés*.

En el conjunt S^T hi posem la σ-àlgebra producte $\mathfrak{S}^T$, definida com la mínima que fa mesurables les projeccions

$$\begin{aligned} \delta_t\colon S^T &\longrightarrow S \\ f &\longmapsto f(t) \end{aligned}$$

Amb aquesta σ-àlgebra, l'aplicació $X\colon \Omega \to S^T$ és mesurable i la *llei del procés* és la llei d'aquesta variable aleatòria.

Donada una probabilitat μ sobre l'espai mesurable producte $(S^T, \mathfrak{S}^T)$, podem considerar, per a cada $J \subset T$ finit, la mesura imatge de μ per la projecció δ_J, que notarem μ_J. És a dir, si $\sharp J = d$, μ_J és la probabilitat sobre $(S^d, \mathfrak{S}^d))$ definida com

$$\mu_J := \mu \circ \delta_J^{-1} \ , \tag{1.5.2}$$

i la família de probabilitats $\{\mu_J : \ J \subset T \text{ finit}\}$ són les *distribucions en dimensió finita de μ.* Les distribucions en dimensió finita de μ compleixen la *propietat de consistència:* Si $K \subset J$ amb $\sharp K = m$, aleshores

$$\mu_K = \mu_J \circ \delta_{J,K}^{-1} \ , \tag{1.5.3}$$

on $\delta_{J,K}$ és la projecció natural de S^d en S^m. (La "propietat de consistència" també s'expressa dient que $\{\mu_J : \ J \subset T\text{finit}\}$ és un *sistema projectiu.*)

En una situació força general, que inclou el cas dels processos reals (vegeu el Teorema 1.3.7), les distribucions en dimensió finita d'una probabilitat μ la determinen. Això és el que diu el Teorema següent.

1.5.2 Teorema de Daniell–Kolmogorov (Daniell,1918; Kolmogorov, 1933).
Sigui S un espai polonès (i.e. mètric, separable i complet), i considerem l'espai mesurable $(S, \mathfrak{B}(S))$, on $\mathfrak{B}(S)$ vol dir la σ-àlgebra dels borelians de S.
Sigui T un conjunt d'índexos de cardinalitat arbitrària.
Sigui $\{\mu_J, \ J \subset T \text{ finit}\}$ una família de probabilitats, cadascuna sobre $(S^{\sharp J}, \mathfrak{S}^{\sharp J})$, complint la propietat de consistència (1.5.3).
Aleshores, existeix una única probabilitat μ sobre $(S^T, \mathfrak{B}(S)^T)$ que té la família donada com distribucions en dimensió finita. (Aquesta probabilitat s'anomena de vegades límit projectiu de la família.) □

Demostració: La idea de la demostració és la següent: Definim la funció de conjunt μ sobre els cilindres de base finito-dimensional mitjançant la fórmula

$$\mu(\delta_{t_1,\dots,t_n}^{-1}(B)) := \mu_{t_1,\dots,t_n}(B) \ ,$$

i seguim els passos següents:

a: Demostrar que els cilindres de base finito-dimensional formen una àlgebra.

b: Comprovar que μ està ben definida i és additiva sobre l'esmentada àlgebra, i compleix $\mu(S^T) = 1$.

c: Demostrar que μ és σ-additiva sobre l'àlgebra.

d: Aplicar els teoremes d'extensió de Carathéodory per concloure que μ s'estén de manera única a una mesura de probabilitat sobre la σ-àlgebra generada, que és $\mathfrak{B}(S)^T$.

Fem ara els detalls de cada pas:

a: $\emptyset = \delta_t^{-1}(\emptyset)$, i $S^T = \delta_t^{-1}(S)$, (t qualsevol), i per tant aquests conjunts són cilindres.
$\big(\delta_{t_1,\dots,t_n}^{-1}(B)\big)^c = \big(\delta_{t_1,\dots,t_n}^{-1}(B^c)\big)$.
$\bigcap_{i=1}^{m} \delta_{t_{i,1},\dots,t_{i,i_n}}^{-1}(B_i) = \delta_{t_{1,1},\dots,t_{m,m_n}}^{-1}(B_1 \times \cdots \times B_m)$.

b: Veiem primer que μ està ben definida. Suposem que

$$\delta^{-1}_{t_1,\dots,t_n}(B_1) = \delta^{-1}_{s_1,\dots,s_m}(B_2) \ ,$$

amb $n \leqslant m$. Reordenant indexos, si cal, això vol dir que $s_1 = t_1, \dots, s_n = t_n$, i que $B_2 = B_1 \times S^{m-n}$. Ara, usant la propietat de consistència (1.5.3), es té

$$\begin{aligned}\mu(\delta^{-1}_{s_1,\dots,s_n}(B_1)) &= \mu_{s_1,\dots,s_n}(B_1)\\ &= \mu_{s_1,\dots,s_m}(\delta^{-1}_{(s_1,\dots,s_m),(s_1,\dots,s_n)}(B_1)) = \mu_{s_1,\dots,s_m}(B_1 \times S^{m-n})\\ &= \mu_{s_1,\dots,s_m}(B_2) = \mu(\delta^{-1}_{s_1,\dots,s_m}(B_2)) \ .\end{aligned}$$

Veiem ara l'additivitat finita: Considerem dos cilindres amb intersecció buida,

$$\delta^{-1}_{t_1,\dots,t_n}(B_1) \cap \delta^{-1}_{s_1,\dots,s_m}(B_2) = \emptyset \ .$$

Considerem el conjunt d'indexos

$$(r_1, \dots, r_\ell) := (t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_m) \ .$$

Podrem aleshores escriure

$$\delta^{-1}_{t_1,\dots,t_n}(B_1) = \delta^{-1}_{r_1,\dots,r_\ell}(B_1 \times S^{\ell-n})$$

i

$$\delta^{-1}_{s_1,\dots,s_m}(B_2) = \delta^{-1}_{r_1,\dots,r_\ell}(S^{\ell-m} \times B_2) \ .$$

Aleshores,

$$\begin{aligned}&\mu(\delta^{-1}_{t_1,\dots,t_n}(B_1) \cup \delta^{-1}_{s_1,\dots,s_m}(B_2)) = \mu_{r_1,\dots,r_\ell}(\delta^{-1}_{r_1,\dots,r_\ell}(B_1 \times S^{\ell-n}) \cup \delta^{-1}_{r_1,\dots,r_\ell}(S^{\ell-m} \times B_2))\\ &= \mu_{r_1,\dots,r_\ell}(\delta^{-1}_{r_1,\dots,r_\ell}(B_1 \times S^{\ell-n})) + \mu_{r_1,\dots,r_\ell}(\delta^{-1}_{r_1,\dots,r_\ell}(S^{\ell-m} \times B_2))\\ &= \mu(\delta^{-1}_{t_1,\dots,t_n}(B_1)) + \mu(\delta^{-1}_{s_1,\dots,s_m}(B_2)) \ ,\end{aligned}$$

doncs les distribucions en dimensió finita són additives.
Per últim, $\mu(S^T) = \mu(\delta_t^{-1}(S)) = \mu_t(S) = 1$ (t qualsevol).

c: Aquesta és la part difícil. Sabem que la σ-additivitat d'una funció de conjunt positiva additiva μ sobre una àlgebra $\mathfrak{A}$ és equivalent a la propietat següent: Per a tota successió decreixent $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjunts de $\mathfrak{A}$ tal que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, es té $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.
Provarem aquesta propietat per la nostra funció de conjunt μ i la σ-àlgebra $\mathfrak{A}$ dels cilindres finito-dimensionals.
Sigui $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una tal successió. Si $A_m = \delta^{-1}_{t_1,\dots,t_n}(B_m)$ ha d'incloure a $A_{m+1} = \delta^{-1}_{s_1,\dots,s_\ell}(B_{m+1})$, aleshores per força $n \leqslant \ell$, $t_1 = s_1, \dots, t_n = s_n$ (reordenant indexos si cal), i $B_{m+1} \subset B_m \times S^{\ell-n}$. Per tant, sempre podrem trobar una successió d'índexos tal que tot A_m és de la forma

$$A_m = \delta^{-1}_{t_1,\dots,t_{n_m}}(B_m) \ ,$$

amb $\{n_m\}_m$ creixent.
Intercalant, si cal, alguns conjunts a la successió $\{A_m\}_m$, podem suposar que cada conjunt és de la forma

$$A_m = \delta^{-1}_{t_1,\dots,t_m}(B_m)$$

(i.e., és un cilindre de base m-dimensional). És clar que si veiem la propietat de continuïtat per successions decreixents abans esmentada per aquesta successió, també la complirà la successió original, que n'és una parcial.
Suposem que $\lim\limits_{m\to\infty} \mu(A_m) \neq 0$. Com que $\{\mu(A_m)\}_m$ és decreixent (perquè μ és additiva), això vol dir que existeix $\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall m,\ \mu(A_m) > \varepsilon > 0 \ .$$

Si S és un espai polonés, S^m també ho és (si hi posem, és clar, la topologia producte). I en un espai polonès tota mesura finita sobre els seus borelians és ajustada. Per al que ens interessa, això ens diu que es compleix el següent:

$$\forall B_m \in \mathfrak{B}(S)^m,\ \exists K_m \in \mathfrak{B}(S)^m,\ K_m \text{ compacte, tal que } \mu_{t_1,\dots,t_m}(B_m - K_m) < \frac{\varepsilon}{2^m}\ .$$

Considerarem els cilindres de base K_m:

$$\delta^{-1}_{t_1,\dots,t_m}(K_m) \subset \delta^{-1}_{t_1,\dots,t_m}(B_m)\ .$$

Aquesta successió la podem fer decreixent: Definim $K'_1 = K_1$, i $K'_m = (K'_{m-1} \times \mathbb{R}) \cap K_m$, per $m > 1$. Clarament, per a tot m, $K'_m \subset K_m$ i K'_m és compacte per ser la intersecció d'un tancat amb un compacte. Tindrem doncs una successió de cilindres de base compacte $\delta^{-1}_{t_1,\dots,t_m}(K'_m)$, decreixent, i tal que

$$\delta^{-1}_{t_1,\dots,t_m}(K'_m) \subset \delta^{-1}_{t_1,\dots,t_m}(K_m) \subset \delta^{-1}_{t_1,\dots,t_m}(B_m)\ , \quad \forall m\ .$$

Per estalviar notació, posarem

$$\begin{aligned} D'_m &= \delta^{-1}_{t_1,\dots,t_m}(K'_m) \\ D_m &= \delta^{-1}_{t_1,\dots,t_m}(K_m) \\ C_m &= \delta^{-1}_{t_1,\dots,t_m}(B_m)\ , \quad \forall m\ . \end{aligned}$$

Demostrarem que $\bigcap_{m=1}^{\infty} D'_m \neq \emptyset$, i haurem acabat. Per fer això, veurem primer que $\mu(D'_m) > 0$, $\forall m$, d'on deduïrem que $K'_m \neq \emptyset$. En efecte,

$$\begin{aligned} \mu(D'_m) &= \mu(C_m) - \mu(C_m \cap (D'_m)^c) = \mu(C_m) - \mu(C_m \cap (\bigcap_{i=1}^{n} D_i)^c) \\ &= \mu(C_m) - \mu(\bigcup_{i=1}^{m}(C_m \cap (D_i)^c)) > \varepsilon - \sum_{i=1}^{m} \mu(C_m - D_i) \\ &\geqslant \varepsilon - \sum_{i=1}^{m} \mu(C_i - D_i) > \varepsilon - \sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2^i} > 0\ . \end{aligned}$$

Tindrem doncs que

$$\mu_{t_1,\dots,t_n}(K'_m) = \mu(D'_m) \neq 0,\ \Rightarrow K'_m \neq \emptyset\ .$$

Considerem, per a cada m, un element $(a_1^m, \dots, a_m^m) \in K'_m \subset S^m$. Com que $K'_m \subset K'_{m-1} \times \mathbb{R}$, resulta que $\forall n \geqslant k$, $(a_1^n, \dots, a_k^n) \in K'_k$.
La successió $\{a_1^n\}_n \subset K'_1$ tindrà una parcial $\{a_1^{n_r}\}_r$ convergent a un element $a_1^0 \in K'_1$. La successió $\{(a_1^{n_r}, a_2^{n_r})\}_r \subset K'_2$ tindrà una parcial convergent a un element $(a_1^0, a_2^0) \in K'_2$. Repetint aquest argument, determinem una successió $a_1^0, a_2^0, a_3^0, \dots$ tal que, $\forall n$, $(a_1^0, a_2^0, \dots, a_n^0) \in K'_n$.
Considerem un element $x \in S^T$ complint

$$x(t_n) = a_n^0\ , \quad \forall t_n\ .$$

Clarament, $x \in D'_n$, $\forall n$. Per tant, $x \in \bigcap_n D'_n$, i aquest conjunt és no buit, com voliem veure.

d: Aplicant el teorema d'extensió de Carathéodory, existeix una única probabilitat μ, definida sobre la σ-àlgebra generada pels cilindres, que és $\mathfrak{B}(S)^T$, tal que

$$\mu(\delta^{-1}_{t_1,\dots,t_n}(B)) = \mu_{t_1,\dots,t_n}(B)$$

per a tot $B \in \mathfrak{B}(S)^n$, per a tot $n \in \mathbb{N}$. □

El Teorema de Daniell–Kolmogorov ens dóna immediatament l'existència de processos amb una família de distribucions en dimensió finita donada, en el cas que les variables del procés estiguin valuades en un espai polonès S (almenys tindrem segur el procés canònic). Dit d'una altra manera: Donada una família consistent de distribucions en dimensió finita, existeix un espai de probabilitat i un procés estocàstic definit en ell que té per llei la que aquestes distribucions en dimensió finita determinen. Concretament, tenim el procés canònic definit sobre l'espai canònic: $\Omega = S^T$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}^T$, $P = \mu$, on μ és la probabilitat en $(S^T, \mathfrak{S}^T)$ determinada per les distribucions en dimensió finita donades, i $X_t(\omega) = \omega(t)$.

1.6 Les diferents maneres de pensar en un procés estocàstic

Gairebé tot el curs ens restringirem a processos reals indexats en $\mathbb{R}^+$. Hem vist a l'Apartat 1.2 que podem observar un procés estocàstic de diverses maneres: Com una funció de les seves dues variables (t, ω), com una funció de t a valors en un espai de variables aleatòries, o com una funció de ω en l'espai de les trajectòries.

Com funció de les seves dues variables, les propietats interessants d'un procès estocàstic X es refereixen fonamentalment a qüestions de mesurabilitat. La possibilitat d'intercanviar esperances respecte $\omega \in \Omega$ i integrals respecte $t \in \mathbb{R}$, per exemple (Teorema de Fubini), requereix d'entrada la mesurabilitat de X respecte la σ-àlgebra producte $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathfrak{F}$. En certes parts de la teoria de processos apareixen també altres propietats de mesurabilitat més restrictives, com l'anomenada *mesurabilitat progressiva.*

Com una funció de $\omega \in \Omega$ a valors en l'espai de trajectòries, el procés no es més que una variable aleatòria i, com a tal, l'única cosa que interessa és la seva llei. S'estudien les propietats relacionades amb la família de distribucions en dimensió finita i també les propietats que les trajectòries satisfan amb probabilitat 1.

Com una funció de la variable real $t \in \mathbb{R}^+$ en un espai de variables aleatòries, l'estudi deriva cap a qüestions anàlogues a les que podem plantejar per a funcions reals de variable real: Continuidad, derivabilidad, integrabilidad, etc. És a dir, els temes de l'anàlisi clàssica. Això ho anomenarem *anàlisi aleatòria*, en el sentit de "anàlisi de funcions a valors en un espai de variables aleatòries". Els espais de variables aleatòries a considerar són l'espai de totes les variables aleatòries $L^0(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ i els seus subespais de Lebesgue $L^p(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, amb $p \geqslant 1$. Aquests últims són espais de Banach, i per tant estem parlant en els fons de funcions Banach-valuades de variable real, un tema puramente analític. En el cas de $L^0(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, dotat amb la topologia de la convergència en probabilitat, estem tractant amb un espai vectorial topològic amb una relació molt pobre entre l'estructura vectorial i l'estructura topològica. No es ni localment convex; només pot afirmar-se que tot punt té un entorn acotat.

De manera natural, l'espai de variables aleatòries més important a considerar és l'espai L^2, que és més ric en estructura, doncs es tracta d'un espai de Hilbert. Òbviament, podrem considerar aquest espai sempre que les variables del procés siguin de quadrat integrable.

En tot cas, tindrem diversos conceptes de continuïtat, derivabilitat, etc., anàlegs als diferents conceptes de convergència de successions de variables aleatòries. No obstant, podem deixar de banda aquí el concepte de convergència quasi segura, que no és gaire interessant. Sí que és molt important investigar si, quasi segurament, totes les trajectòries d'un procés tenen propietats de regularitat, però aquesta és una qüestió relacionada amb la llei del procés, és a dir amb el punt de vista del procés com a variable aleatòria.

Encara que parlem de diferents "punts de vista" en l'estudi d'un procés estocàstic, això no vol dir que donin lloc a teories separades; simplement, és una manera de classificar en diferents tipus les propietats que hom pot estudiar en un procés estocàstic. Aquests diferents tipus de propietats s'interrelacionen considerablement.

En el Capítol 2 presentarem alguns exemples importants de procesos estocàstics. En el Capítol 3 estudiarem les propietats rellevants d'un procés estocàstic com a funció real de dues variables, mentres que en el Capítol 4 l'observarem com a funció aleatòria de variable real. Els Capítols 5 i 6 estaran dedicats al procés com a variable aleatòria a valors a l'espai de trajectòries. En el primer treballarem les propietats relatives a les lleis, i en el segon les propietats que es compleixen amb probabilitat 1. Per acabar la primera part, en el Capítol 7 veurem una introducció a la integració estocàstica.

2. Exemples de processos estocàstics

Veurem uns quants exemples interessants de processos estocàstics: Els processos de Wiener, Poisson, Ornstein-Uhlenbeck i Cauchy, i el pont brownià. Els dos primers són especialment importants.

Normalment, el que interessa d'una variable aleatòria $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ és només la seva llei, i no pas qui és Ω o com és X com a aplicació de Ω en $\mathbb{R}$. Així, diem per exemple que una variable aleatòria segueix una llei "normal (0,1)", i amb aquesta dada ja podem fer tots els càlculs que puguin interessar. Sabem que existeixen variables aleatòries amb qualsevol llei donada, i per tant no hi ha cap problema de fonamentació matemàtica.

Anàlogament, quan posem noms propis als processos estocàstics més importants, ens referim únicament a la seva llei a l'espai $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}, \mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+})$, sense importar-nos en quin espai Ω estan definits, o com és el procés com a aplicació de Ω en $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}, \mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+})$. Ja hem vist que existeixen processos amb qualsevol llei donada.

2.1 El procés de Wiener

Comencem definint el procés de Wiener, també anomenat Moviment Brownià, que és el que tobarem més sovint durant el curs.

2.1.1 Definició

Un procés estocàstic real $W \equiv \{W_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ és un *procés de Wiener de variància σ^2 començant en $x_0 \in \mathbb{R}$* si la seva llei ve donada per

$$P\{W_0 \in B_0, W_{t_1} \in B_1, \dots, W_{t_n} \in B_n\} =$$
$$\delta_{x_0}(B_0) \int_{B_1 \times \cdots \times B_n} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_i - t_{i-1})}} \exp\left\{\frac{-(x_i - x_{i-1})^2}{2\sigma^2(t_i - t_{i-1})}\right\} dx_1 \cdots dx_n \ ,$$

on $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, $n \in \mathbb{N}$, i $B_i \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. $\square$

La delta de Dirac a la fórmula anterior ens diu que $W_0 = x_0$, quasi segur. D'aquí que diem que el procés comença en el punt x_0. Per altra banda, la llei del vector aleatori $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$ és una normal multidimensional amb vector de mitjanes $m = (x_0, \dots, x_0)$ i matriu de covariàncies

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & t_1 & \dots & t_1 \\ t_1 & t_2 & t_2 & \dots & t_2 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_n \end{pmatrix} .$$

Nota: Recordem que un vector aleatòri segueix una llei normal multidimensional de vector de mitjanes m i matriu de covariàncies Σ si té densitat respecte la mesura de Lebesgue donada per

$$f(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det\Sigma)^{1/2}} \exp\big\{ -\tfrac{1}{2}(\vec{x}-m)\Sigma^{-1}(\vec{x}-m)\big\} \ .$$

Si fem un canvi de variable i calculem la densitat del vector aleatori $(W_{t_1}-W_0, W_{t_2}-W_{t_1},\dots,W_{t_n}-W_{t_{n-1}})$, trobem que aquesta és

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_i-t_{i-1})}} \exp\Big\{\frac{-y_i^2}{2\sigma^2(t_i-t_{i-1})}\Big\} \ ,$$

i deduïm que està format per variables aleatòries independents amb llei $N\big(0,\sigma^2(t_{i+1}-t_i)\big)$. Es diu que el procés de Wiener té *increments independents.*

2.1.2 Proposició

El procés de Wiener es pot definir com un procés estocàstic W amb increments independents, $W_0 = x$ q.s., i tal que, per a cada $s < t$, la llei de $W_t - W_s$ és $N\big(0,\sigma^2(t-s)\big)$.

Demostració: La llei de $(W_{t_1}-W_0, W_{t_2}-W_{t_1},\dots,W_{t_n}-W_{t_{n-1}})$ queda determinada, i a partir d'aquí, amb un canvi de variable es pot calcular la llei de $(W_0, W_{t_1},\dots,W_{t_n})$ i es retroba la forma de la definició 2.1.1. $\square$

2.1.3 Definició

Quan $\sigma^2 = 1$, diem que tenim un *procés de Wiener estàndard.* Si no s'especifica el punt de començament, s'entén que es tracta d'un procés de Wiener estàndard començant en 0. $\square$

Per tant, el procés de Wiener estándard començant en 0 és aquell que compleix:

a) $W_0 = 0$, q.s.

b) Té increments independents.

c) $\forall s < t$, $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$.

El procés de Wiener fou rigorosament construït i estudiat per Norbert Wiener durant els anys 1920's, i per això porta el seu nom. Però abans ja va ser proposat (per Albert Einstein, 1905, i Marian von Schmoluchowski, 1906) com a model per al fenomen físic anomenat “moviment brownià”, i que fa referència al moviment aleatori i sense causa aparent de partícules petites en suspensió en un líquid. Com a model d'aquest fenomen es pot considerar superat. No obstant, a la literatura matemàtica persisteix el nom de “Moviment Brownià” com a sinònim de “procés de Wiener”.

2.2 El procés de Poisson

2.2.1 Definició

Un procés estocàstic real $N \equiv \{N_t,\ t\in\mathbb{R}^+\}$ és un *procés de Poisson de variància λ començant en $x\in\mathbb{Z}$* si la seva llei ve donada per

$$P\{N_0 = x_0, N_{t_1} = x_1,\dots,N_{t_n} = x_n\} = \delta_x(\{x_0\}) \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda(t_i-t_{i-1})}\big[\lambda(t_i-t_{i-1})\big]^{x_i-x_{i-1}}}{(x_i-x_{i-1})!} \ ,$$

si $x_i\in\mathbb{Z}$, $x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$, (i zero en cas contrari), i on $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, $n\in\mathbb{N}$. $\square$

Estem imposant clarament que $N_0 = x$ q.s. Per altra banda, si fem un canvi de variable i calculem la funció de probabilitat del vector aleatori $(N_{t_1} - N_0, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}})$, obtenim

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda(t_i - t_{i-1})}\big[\lambda(t_i - t_{i-1})\big]^{y_i}}{y_i!} \ , \quad y_i \in \mathbb{N} \ ,$$

i deduïm que està format per variables aleatòries independents amb llei de Poisson de paràmetre $\lambda(t_{i+1} - t_i)$. El procés de Poisson també té doncs increments independents.

2.2.2 Proposició

El procés de Poisson es pot definir com un procés estocàstic N amb increments independents, $N_0 = x$ q.s., i tal que, per a cada $s < t$, la llei de $N_t - N_s$ és $\mathrm{Pois}\big(\lambda(t-s)\big)$.

Demostració: Anàloga a la que hem fet abans per al procés de Wiener. □

2.2.3 Definició

Quan $\lambda = 1$, diem que tenim un *procés de Poisson estàndard*. Si no s'especifica el punt de començament, s'entén que es tracta d'un procés de Poisson estàndard començant en 0. □

Per tant, el procés de Poisson estándard començant en 0 és aquell que compleix:

a) $N_0 = 0$, q.s.

b) Té increments independents.

c) $\forall s < t$, $N_t - N_s \sim \mathrm{Pois}(t-s)$.

Una situació típica que es modela mitjançant el procés de Poisson apareix en Teoria de Cues: Suposem que a una cua arriben usuaris seguint les pautes següents:

1) Arriben d'un en un.

2) La probabilitat p que es produeixi l'arribada d'un usuari en un interval de longitud Δt (petita) és proporcional a Δt:

$$p = \lambda \Delta t \ .$$

3) El nombre d'arribades en intervals disjunts són variables aleatòries independents.

Partim $[0,t]$ en subintervals de longitud $\Delta t = \frac{t}{n}$. Per n prou gran, en cada subinterval arriba com a molt un usuari. Per tant, en $[0,t]$ hauran arribat com a molt n usuaris i el nombre d'arribades segueix una llei Binomial:

$$P\{k \text{ arribades en } [0,t]\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \Big(\frac{\lambda t}{n}\Big)^k \Big(1 - \frac{\lambda t}{n}\Big)^{n-k} \ .$$

Això és una aproximació. Si fem $n \to \infty$, és raonable pensar que tindrem un bon model per aquesta probabilitat. Surt

$$P\{k \text{ arribades en } [0,t]\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \ .$$

O sigui, el nombre d'arribades en $[0,t]$ segueix una llei $\mathrm{Pois}(\lambda t)$. Per tant, si notem N_t el nombre d'arribades en $[0,t]$, sembla raonable suposar que $\{N_t, \ t \in \mathbb{R}^+\}$ és un procés de Poisson començant en zero.

Per cert, es pot calcular també fàcilment la llei del temps entre arribades d'usuaris consecutius:

$$P\{\text{Temps entre dues arribades} > t\} = P\{N_{t+s} - N_s = 0\} = P\{N_t - N_0 = 0\} = e^{-\lambda t} \ ,$$

i es dedueix que el temps entre arribades segueix una llei exponencial de paràmetre λ.

2.3 El pont brownià

Aquest és un exemple de procés definit en un interval de temps acotat $[0,1]$. Sigui $\{W_t,\ t\in\mathbb{R}^+\}$ un procés de Wiener estàndard començant en zero. Definim el procés $X=\{X_t,\ t\in[0,1]\}$ per

$$X_t := W_t - tW_1\ .$$

Aquest procés comença en zero i acaba en zero. És a dir, $P\{X_0=0\}=1$ i $P\{X_1=0\}=1$. La seva llei en $(\mathbb{R}^{[0,1]},\mathfrak{B}(\mathbb{R})^{[0,1]})$ es pot calcular a partir de la relació amb el procés de Wiener, i ve donada per

$$P\{X_0\in B_0, X_{t_1}\in B_1,\dots,X_{t_n}\in B_n, X_1\in B_{n+1}\} =$$
$$\delta_0(B_0)\delta_0(B_1)\sqrt{2\pi}\int_{B_1\times\cdots\times B_n}\prod_{i=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i-t_{i-1})}}\exp\Big\{\frac{-(x_i-x_{i-1})^2}{2(t_i-t_{i-1})}\Big\}\,dx_1\,\cdots\,dx_n\ ,$$

on $0=t_0<t_1<\cdots<t_n<t_{n+1}=1$, $n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}=0$, i $B_i\in\mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

2.3.1 Definició

El procés X donat per la llei anterior s'anomena *pont brownià estàndard.* □

El pont brownià ens proporciona un exemple de procés que no té increments independents. En efecte, $X_t-X_0=-(X_1-X_t)$.

El pont brownià estàndard es pot generalitzar al *pont brownià que comença en a a l'instant $t=0$ i acaba en b a l'instant $t=T$.* El podem representar en funció d'un procés de Wiener mitjançant la fórmula

$$X_t := a\Big(1-\frac{t}{T}\Big)+b\frac{t}{T}+\Big(W_t-\frac{t}{T}W_T\Big)\ ,\quad 0\leqslant t\leqslant T\ .$$

Es pot comprovar que la llei del pont brownià estàndard és la llei d'un procés de Wiener condicionada a $W_1=0$. Dit amb precisió,

$$P\Big\{W_{t_1}\in B_1,\dots,W_{t_n}\in B_n/W_1=b\Big\}$$

ve donada per la llei d'un pont brownià que comença en 0 a l'instant $t=0$ i acaba en b a l'instant $t=1$, quasi per tot b, respecte la mesura de Lebesgue.

2.4 El procés d'Ornstein–Uhlenbeck

Sigui W un procés de Wiener estàndard. Considerem el procés $\{X_t,\ t\in\mathbb{R}^+\}$ definit per

$$X_t := \sigma\Big(W_t-\beta\int_0^t e^{-\beta(t-s)}W_s\,ds\Big)\ , \tag{2.4.1}$$

on $\beta>0$ i $\sigma>0$ són constants. Aquest procés s'anomena *procés de velocitat d'Ornstein–Uhlenbeck.* Fou proposat per aquests autors com a model de la velocitat d'una partícula sotmesa a moviment brownià. Integrant respecte t l'expressió (2.4.1), s'obté el *procés de posició d'Ornstein–Uhlenbeck,* que representaria el desplaçament de la partícula browniana. Aquest és doncs un model alternatiu al d'Einstein i Schmoluchowski, que proposaven el procés de Wiener W_t directament.

Les constants β i σ tenen un significat físic precís que fa referència a les condicions en les quals es desenvolupa el moviment.

2.5 El procés de Cauchy

2.5.1 Definició

Sigui $X := \{X_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ un procés estocàstic tal que:

1) $X_0 = x$.
2) Té increments independents.
3) $\forall s < t$, la llei de $X_t - X_s$ té la densitat

$$f(y) = \frac{t-s}{\pi((t-s)^2 + y^2)} \tag{2.5.1}$$

respecte la mesura de Lebesgue.

El procés estocàstic que té la llei determinada per aquestes condicions s'anomena *procés de Cauchy començant en* $x \in \mathbb{R}$. La densitat (2.5.1) és la d'una variable aleatòria amb llei de Cauchy de paràmetre $t - s$. □

3. Propietats de mesurabilitat

En aquest capítol estudiem essencialment les propietats que poden interessar d'un procés X com a funció de $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ en $\mathbb{R}$.

3.1 Processos mesurables

3.1.1 Definició

Sigui $X := \{X_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ un procés estocàstic sobre un espai de probabilitat $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.
Diem que X és *mesurable* si la funció de dues variables

$$\begin{aligned} X\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,\omega) &\longmapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

és mesurable respecte les σ-àlgebres $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{F}$ en $\mathbb{R}^+ \times \Omega$, i $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}$. □

3.1.2 Proposició

Si $X\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ és una funció mesurable, aleshores les aplicacions parcials $X_t\colon \Omega \to \mathbb{R}$ i $X(\omega)\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ són mesurables, per a tots t i ω, respectivament.

Demostració: És cert en general que:

Si $(E, \mathfrak{E})$ és l'espai de mesura producte dels espais $(E_1, \mathfrak{E}_1)$ i $(E_2, \mathfrak{E}_2)$, $(S, \mathfrak{S})$ és un altre espai de mesura, i $X\colon E_1 \times E_2 \to S$ és mesurable, aleshores les parcials $X(e_1, \cdot)\colon E_2 \to S$ i $X(\cdot, e_2)\colon E_1 \to S$ són mesurables, $\forall e_1 \in E_1$, $\forall e_2 \in E_2$.

En efecte, es comprova immediatament que la injecció

$$\begin{aligned} i_{e_1}\colon E_2 &\longrightarrow E_1 \times E_2 \\ e_2 &\longmapsto (e_1, e_2) \end{aligned}$$

és mesurable. Aleshores $X(e_1, \cdot) = X \circ i_{e_1}$ és mesurable per ser composició de mesurables. □

3.1.3 Exemple

Hi ha processos no mesurables. Fins i tot es pot construir un exemple en què les aplicacions parcials ho són:

Sigui $\Omega = \mathbb{R}^+$, $\mathfrak{F}$ la σ-àlgebra "generada pels punts" ($\mathfrak{F} = \sigma\{\{\omega\} : \omega \in \Omega\}$), i $X_t(\omega) = \mathbf{1}_{\{t=\omega, t\leqslant 1\}}(t,\omega)$. Aleshores, $X_t(\cdot)$ i $X_\cdot(\omega)$ són mesurables, però $X^{-1}(\{1\}) = \{(\omega,\omega) : \omega \leqslant 1\} \notin \mathfrak{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathfrak{F}$. (Si ho fos, les projeccions d'aquest conjunt haurien de ser-ho també.)

3.1.4 Exemple

Un procés estocàstic real indexat per $\mathbb{N}$, és sempre mesurable quan en el primer espai posem la σ-àlgebra $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathfrak{F}$. $\square$

3.1.5 Teorema

Sigui X un procés estocàstic mesurable.
Si

$$\int_{\mathbb{R}^+\times\Omega} |X_t|(\omega)\, \lambda(dt) \times P(d\omega) < \infty \ ,$$

on λ és la mesura de Lebesgue, aleshores

$$\int_{\mathbb{R}^+\times\Omega} X_t(\omega)\, \lambda(dt) \times P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^+} \mathrm{E}[X_t]\, dt = \mathrm{E}\Big[\int_{\mathbb{R}^+} X_t\, dt\Big] \ .$$

Demostració: Això no és més que el Teorema de Fubini general, aplicat a aquesta situació concreta. $\square$

La condició de mesurabilitat d'un procés és també útil en situacions que no tenen res a veure amb el Teorema de Fubini. Per exemple, és freqüent haver d'avaluar un procés en un instant de temps aleatori.

3.1.6 Definició

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espai de probabilitat.
Una variable aleatòria $\tau\colon \Omega \to \mathbb{R}^+$ s'anomena un *instant aleatori*. $\square$

Avaluar el procés X, definit sobre $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ a l'instant aleatori τ i en ω, vol dir considerar el valor real $X_{\tau(\omega)}(\omega)$. És interessant saber si $[X_\tau](\omega) := X_{\tau(\omega)}(\omega)$ és una variable aleatòria o no. La resposta és afirmativa si el procés és mesurable:

3.1.7 Proposició

Siguin X un procés mesurable i τ un instant aleatori.
Aleshores X_τ és una variable aleatòria.

Demostració: Considerem la composició

$$\begin{array}{ccccc} \Omega & \xrightarrow{(\tau,\mathrm{Id})} & \mathbb{R}^+ \times \Omega & \xrightarrow{\quad X \quad} & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & (\tau(\omega),\omega) & \longmapsto & X_{\tau(\omega)}(\omega) \end{array}$$

Tenim que $(\tau, \mathrm{Id})^{-1}(A \times B) = \{\omega : \tau(\omega) \in A\} \cap B$, i tots dos conjunts són de $\mathfrak{F}$. Ja hem acabat, perquè la composició d'aplicacions mesurables és mesurable.

3.2 Processos adaptats i progressius

3.2.8 Definició

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F})$ un espai mesurable.
Una *filtració* en $(\Omega, \mathfrak{F})$ és una família $\{\mathfrak{F}_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ de sub-σ-àlgebres de $\mathfrak{F}$ no-decreixent ($s < t \Rightarrow \mathfrak{F}_s \subseteq \mathfrak{F}_t$). $\square$

3.2.9 Definició

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espai de probabilitat.

Sigui $\{\mathfrak{F}_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ una filtració.
Un procés estocàstic $\{X_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ és *adaptat* a $\{\mathfrak{F}_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ si, per a tot $t \in \mathbb{R}^+$, la variable X_t és $\mathfrak{F}_t$-mesurable. □

3.2.10 Definició
Sigui $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espai de probabilitat.
Sigui $\{\mathfrak{F}_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ una filtració.
Un procés estocàstic $\{X_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ és *progressivament mesurable* (o *progressiu*) respecte $\{\mathfrak{F}_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ si, per a tot $t \in \mathbb{R}^+$, la restricció

$$\begin{aligned} X_{|_{[0,t]\times\Omega}} \colon [0,t] \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (s,\omega) &\longmapsto X_s(\omega) \end{aligned}$$

és $\mathfrak{B}([0,t]) \otimes \mathfrak{F}_t$-mesurable. □

Vegem les relacions entre tots els conceptes introduïts.

3.2.11 Proposició

1) Si X és progressiu, aleshores és mesurable i adaptat.

2) Hi ha processos adaptats que no són mesurables.

3) Hi ha processos mesurables que no són adaptats.

4) Hi ha processos adaptats i mesurables que no són progressius.

Demostració:
(1) Sigui X un procés progressiu respecte una filtració $\{\mathfrak{F}_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ en un espai de probabilitat qualsevol. Veiem primer que X és adaptat a la filtració donada.

Fixem $t > 0$ i $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Per hipòtesi,

$$A := \{(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega :\ X_s(\omega) \in B\} \in \mathfrak{B}([0,t]) \otimes \mathfrak{F}_t\ .$$

La traça $A(t,\cdot) := \{\omega \in \Omega :\ X_t(\omega) \in B\}$ serà $\mathfrak{F}_t$-mesurable, i per tant X és adaptat.

Observació: Estem fent servir aquí el resultat general que diu que *si $(E, \mathfrak{E})$ és el producte dels espais de mesura $(E_1, \mathfrak{E}_1)$ i $(E_2, \mathfrak{E}_2)$, aleshores $A \in \mathfrak{E}$ implica $A(e_1,\cdot) \in \mathfrak{E}_2$ i $A(\cdot,e_2) \in \mathfrak{E}_1$, per a tots $e_1 \in E_1$ i $e_2 \in E_2$.* Això es demostra veient, per cada e_1 fixat, que la col·lecció de conjunts $\mathfrak{C} := \{A \in \mathfrak{E} :\ A(e_1,\cdot) \in E_2\}$ és una σ-àlgebra que conté els rectanges $A_1 \times A_2$, amb $A_1 \in \mathfrak{E}_1$ i $A_2 \in \mathfrak{E}_2$, que generen $\mathfrak{F}$.

Vegem ara que X és mesurable: Per a tot $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} X^{-1}(B) &= \{(t,\omega) :\ X_t(\omega) \in B\} \\ &= \bigcup_{n=0}^{\infty} \{(t,\omega) \in [0,n] \times \Omega :\ X_t(\omega) \in B\} \\ &= \bigcup_{n=0}^{\infty} X^{-1}_{|_{[0,n]\times\Omega}}(B)\ , \end{aligned}$$

i cada conjunt d'aquesta unió és de $\mathfrak{B}([0,n]) \otimes \mathfrak{F} \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathfrak{F}$.

(2) Reprenem l'exemple 3.1.3, definint $\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}$, per a tot t. X no és mesurable però en canvi és adaptat: $X^{-1}(\{1\}) = \{t\} \in \mathfrak{F}_t$.

(3) Sigui $A \in \mathfrak{F}$ tal que $A \notin \mathfrak{F}_{t_0}$, per algun t_0. Sigui $C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^+)$ tal que $t_0 \in C$. Definim $X(t,\omega) = \mathbf{1}_{C\times A}(t,\omega)$.

Tenim que $X^{-1}(\{1\}) = C \times A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathfrak{F}$, però $X_{t_0}^{-1}(\{1\}) = A \notin \mathfrak{F}_{t_0}$.

(4) Considerem el mateix exemple de 2), però canviem $\mathfrak{F}$ a $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^+)$. Llavors, $X^{-1}(\{1\}) = \{(\omega,\omega) :\ \omega \in \mathbb{R}^+\} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R})$; per a tot t, $X_t^{-1}(\{1\}) = \{t\} \in \mathfrak{F}_t$; però no és progressiu: $X_{|_{[0,s]\times\Omega}}(\{1\}) = \{(\omega,\omega) :\ 0 \leqslant \omega \leqslant s\}$, que no és de $\mathfrak{B}([0,s]) \otimes \mathfrak{F}_t$. □

4. Anàlisi aleatòria

Ens referim en aquest capítol a propietats d'un procés estocàstic considerat com a funció de $t \in \mathbb{R}^+$ a valors en un espai de variables aleatòries.

4.1 Continuïtat en probabilitat

Considerem primer la situació més general, en la qual només suposem que cada X_t és una variable aleatòria, sense més condicions addicionals; és a dir, considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ &\xrightarrow{X} L^0 \\ t &\longmapsto X_t \end{aligned}$$

on $L^0 := L^0(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ és l'espai de totes les variables aleatòries sobre l'espai de probabilitat $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Aquest és un espai mètric quan hi considerem la convergència en probabilitat. Concretament, la mètrica es pot donar mitjançant la distància

$$d(X, Y) := \mathrm{E}\left[\frac{|X - Y|}{1 + |X - Y|}\right] , \tag{4.1.1}$$

i en resulta un espai mètric complet.

4.1.1 Definició

Un procés estocàstic $X := \{X_t,\ t \in \mathbb{R}\}$ és *continu en probabilitat* (o *estocàsticament continu*) en t_0 si

$$\lim_{t \to t_0} P\{|X_t - X_{t_0}| > \varepsilon\} = 0 , \quad \forall \varepsilon > 0 .$$

És continu en probabilitat si ho és en cada $t_0 \in \mathbb{R}^+$. (Equivalentment, si la aplicació $t \mapsto X_t$ és contínua de $\mathbb{R}^+$ en (L^0, d).) □

La definició s'estén sense dificultat a processos amb valors en $\mathbb{R}^d$ o en qualsevol espai mètric. Només cal substituir l'expressió $|X_t - X_{t_0}|$ per $\rho(X_t, X_{t_0})$ on ρ és la distància a l'espai mètric en qüestió.

La continuïtat en probabilitat pot posar-se en termes de les lleis bidimensionals del procés, com demostren les Proposicions 4.1.2 i 4.1.3 següents:

4.1.2 Proposició

Un procés X té límit en probabilitat en t_0 si i només si la llei de (X_t, X_s) convergeix feblement quan $(t, s) \to (t_0, t_0)$.

Demostració:
($\Rightarrow$) Suposem que $X_t \xrightarrow[t\to t_0]{P} \xi$, per una certa variable aleatòria ξ. Aleshores, també $(X_t, X_s) \xrightarrow[t,s\to t_0]{P} (\xi, \xi)$. Com que la convergència en probabilitat implica la convergència en llei, ja hem acabat.

($\Leftarrow$) Sigui $\mu_{t,s}$ la llei de (X_t, X_s) en $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2))$. Suposem que $\mu_{t,s}$ convergeix feblement cap a una certa probabilitat μ quan $t, s \to t_0$. En particular, $\mu_{t,t}$ convergirà cap a una probabilitat concentrada en $\{(x, x) : \ x \in \mathbb{R}\}$, i per tant μ ha d'estar concentrada en aquest conjunt.

Recordem ara la desigualtat de Txebixev: Per a qualsevol variable aleatòria Y, qualsevol funció $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ creixent, i qualsevol $\varepsilon > 0$,

$$P\{Y \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathrm{E}[f(Y)]}{f(\varepsilon)} \ .$$

Sigui $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funció definida per

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ x, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

i considerem $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donada per $g(x, y) = f(|x - y|)$. Observeu que g és contínua i acotada. Per la desigualtat de Txebixev,

$$P\{|X_t - X_s| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \mathrm{E}[f(|X_t - X_s|)] = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} g(x, y)\, \mu_{t,s}(dx, dy) \xrightarrow[t,s\to t_0]{} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} g(x, y)\, \mu(dx, dy) \ ,$$

que és igual a zero perquè μ està concentrada a la diagonal. Això demostra la propietat de Cauchy de X_t quan $t \to t_0$. Com que (L^0, d) és un espai mètric complet, ha d'haver-hi convergència. $\square$

4.1.3 Proposició
Un procés X és continu en probabilitat en t_0 si i només si la llei de (X_t, X_s) convergeix feblement quan $(t, s) \to (t_0, t_0)$ a la llei de (X_{t_0}, X_{t_0}).

Demostració: És pràcticament la mateixa de la Proposició 4.1.2. Només cal posar $\xi = X_{t_0}$, $\mu = \mu_{t_0,t_0}$ i aplicar la desigualtat de Txebixev a $P\{|X_t - X_{t_0}| \geqslant \varepsilon\}$. $\square$

Es pot donar una versió uniforme de la continuïtat en probabilitat:

4.1.4 Definició
Un procés estocàstic $X := \{X_t, \ t \in \mathbb{R}\}$ és *uniformement continu en probabilitat* (o *uniformement estocàsticament continu*), si

$$\forall\varepsilon > 0, \ \forall\eta > 0, \ \exists\delta > 0 : \ |t - s| < \delta \ \Rightarrow \ P\{|X_t - X_s| > \varepsilon\} < \eta \ . \qquad \square$$

4.1.5 Proposició
Si X és un procés continu en probabilitat, aleshores és uniformement continu en probabilitat en tot interval $[a, b]$:

$$\forall\varepsilon > 0, \ \forall\eta > 0, \ \exists\delta > 0 : \ t, s \in [a, b], \ |t - s| < \delta \ \Rightarrow \ P\{|X_t - X_s| > \varepsilon\} < \eta \ .$$

Demostració: (En general, tota aplicació contínua d'un compacte en un espai mètric és uniformement contínua.)

Fixem $\eta > 0$. Per a cada $t \in [a,b]$, sigui $\delta(t) > 0$ tal que $|t-s| < \delta(t) \Rightarrow |X_t - X_s| < \eta$. El conjunt de boles $B(t;\delta(t)/2)$, variant t, recobreix $[a,b]$. Sigui $\{B(t_i,\delta(t_i)/2),\ i=1,\dots,n\}$ un subrecobriment finit. Sigui $\delta = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\delta(t_i)}{2}$.

Siguin t,s tals que $|t-s| < \delta$. Per un cert i, $t \in B(t_i,\delta(t_i)/2)$. Aleshores,

$$|t-t_i| < \frac{\delta(t_i)}{2} \Rightarrow d(X_t, X_{t_i}) < \eta$$

i

$$|s-t_i| \leqslant |s-t| + |t-t_i| < \delta + \frac{\delta(t_i)}{2} < \delta(t_i) \Rightarrow d(X_s, X_{t_i}) < \eta\ .$$

Per tant,

$$d(X_t, X_s) \leqslant d(X_t, X_{t_i}) + d(X_{t_i}, X_s) < 2\eta\ . \quad \square$$

4.1.6 Exemples

1) El procés de Wiener i el procés de Poisson són continus en probabilitat (ho deduïrem de propietats més fortes).
2) Un procés que no és continu en probabilitat: Sigui X un procés tal que totes les variables són independents entre sí i idènticament distribuïdes, amb densitat f respecte la mesura de Lebesgue. Aleshores, si $t \neq t_0$,

$$P\{|X_t - X_{t_0}| > \varepsilon\} = \int_{\{|x-y|>\varepsilon\}} f(x)f(y)\,dx\,dy\ .$$

Per convergència dominada, aquesta integral tendeix, quan $\varepsilon \to 0$, a

$$\int_{\{x\neq y\}} f(x)f(y)\,dx\,dy = 1\ .$$

Per tant, per algun $\varepsilon > 0$,

$$P\{|X_t - X_{t_0}| > \varepsilon\} \geqslant \frac{1}{2}\ . \quad \square$$

4.2 Continuïtat en L^p

Suposem que totes les variables aleatòries X_t d'un procés pertanyen a l'espai $L^p := L^p(\Omega,\mathfrak{F},P)$ de les variables aleatòries de potència p-èsima integrable,

$$\mathrm{E}[|X_t|^p] < \infty\ .$$

El nombre p pot ser qualsevol nombre $0 \leqslant p < \infty$. Aquests espais satisfan $p < q \Rightarrow L^q \subset L^p$. Quan $p \geqslant 1$, són espais de Banach amb la norma

$$\|X\|_{L^p} := \mathrm{E}\left[|X|^p\right]^{1/p}\ .$$

L'espai L^∞ està format per les variables *essencialment acotades*, és a dir, tals que existeix M (anomenada *cota essencial*) satisfent

$$P\{|X| > M\} = 0\ .$$

La més petita cota essencial de X és el seu *suprem essencial.* L^∞ és un espai de Banach amb la norma

$$\|X\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup}|X|\ .$$

4.2.1 Definició
Un procés estocàstic $X := \{X_t,\ t \in \mathbb{R}\}$ és de L^p si ho són totes les seves variables. $\square$

4.2.2 Definició
Sigui $p \geqslant 1$.
Un procés estocàstic $X := \{X_t,\ t \in \mathbb{R}\}$ de L^p és *continu en* L^p (o *continu en mitjana p-èsima*) en t_0, si l'aplicació

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ &\xrightarrow{\quad X \quad} L^p \\ t &\longmapsto X_t \end{aligned}$$

és continua en t_0; és a dir, si

$$\lim_{t \to t_0} \|X_t - X_0\|_{L^p} = 0 \ .$$

És continu en L^p si ho és en cada $t_0 \in \mathbb{R}^+$. $\square$

Anàlogament a la continuïtat uniforme en probabilitat, podem definir la continuïtat uniforme en L^p. Naturalment, la continuïtat en L^p implica la continuïtat en probabilitat.

4.2.3 Exemples
1) El procés de Wiener és continu en L^p, per a tot $1 \leqslant p < \infty$:
En primer lloc, el procés de Wiener és de tots els L^p perquè la llei de cada variable és gaussiana. Ara,
$$\mathrm{E}\left[|W_t - W_{t_0}|^p\right] = \frac{p!}{2^{p/2}(p/2)!}(t-t_0)^p \ , \quad \text{si } p \text{ és parell.}$$
2) El procés de Poisson és continu en L^p, per a tot $1 \leqslant p < \infty$:
La llei de Poisson té moments de tots els ordres. Ara,
$$\mathrm{E}\left[|N_t - N_{t_0}|^p\right] = \lambda \cdot Q(\lambda) \ ,$$
on Q és un polinomi, si p és un enter.

El cas més interessant és el de l'espai L^2, que és un espai de Hilbert amb el producte escalar
$$\langle X, Y \rangle := \mathrm{E}[XY] \ .$$
La continuïtat en L^2 es pot caracteritzar a través de les funcions $t \mapsto \mathrm{E}[X_t]$ i $(t,s) \mapsto \mathrm{E}[X_t X_s]$, com es veu a les Proposicions 4.2.4 i 4.2.6 següents. No escriuré les demostracions aquí. Podeu trobar-les en [Wentzell].

4.2.4 Proposició
Un procés X és continu en L^2 si i només si la funció $(t,s) \mapsto \mathrm{E}[X_t X_s]$ és contínua. $\square$

4.2.5 Definició
Sigui X un procés estocàstic de L^2.
La *funció de mitjanes* de X és la funció real definida sobre $\mathbb{R}^+$ per
$$m(t) := \mathrm{E}[X_t] \ .$$
La *funció de correlació* de X és la funció real definida sobre $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ per
$$K(t,s) := \mathrm{Cov}[X_t, X_s] = \mathrm{E}[X_t X_s] - \mathrm{E}[X_t]\,\mathrm{E}[X_s] \ . \quad \square$$

4.2.6 Proposició
Si la funció de mitjanes $m(t)$ és contínua, aleshores el procés X és continu en L^2 en el punt $t_0 \in \mathbb{R}^+$ si i només si la funció de correlació $K(t,s)$ és contínua en (t_0, t_0). $\square$

Hi ha moltes coses que es poden dir d'un procés de L^2 a partir de les funcions de mitjanes i correlació. La part de la teoria de processos que utilitza només aquestes funcions, és a dir, que utilitza només els moments d'ordre u i dos de les variables, s'anomena *teoria de la correlació*.

4.3 Derivabilitat en probabilitat i en L^p

La noció de derivabilitat de la funció $t \mapsto X_t$ es refereix naturalment a l'existència del límit

$$\lim_{h\to 0} \frac{X_{t+h} - X_t}{h}$$

en el sentit de la topologia que s'estigui considerant a l'espai de variables aleatòrias (en probabilitat, o en L^p). La derivabilitat en qualsevol d'aquests sentits implica la corresponent continuitat.

La derivabilitat en probabilitat no és massa interessant. Per exemple, el procés de Poisson és derivable en probabilitat, i la seva derivada és idènticament nul·la. Això implica que el procés no pot reconstruir-se llevat de constant a partir de la seva derivada. En canvi això sí que és cert per a funcions valuades en un espai de Banach: Si una funció té derivada nul·la en un interval, aleshores és constant. Per tant, la derivabilidad en L^p serà molt més interessant, perquè donarà més joc.

4.3.1 Exemples

1) El procés de Wiener no és derivable en probabilitat: Si ho fós, el quocient $\frac{1}{h}(W_{t+h} - W_t)$ seria també convergent en llei quan $h \to 0$. Però la seva llei és $N(0, \frac{1}{h})$ i les variàncies tendeixen a infinit.
2) El procés de Poisson és derivable en probabilitat i la seva derivada és el procés idènticament zero:
Per h prou petit,

$$P\Big\{\Big|\frac{N_{t+h} - N_t}{h}\Big| > \varepsilon\Big\} = P\{|N_{t+h} - N_t| > 0\} = 1 - e^{-\lambda h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0\ . \quad \square$$

4.3.2 Definició

Sigui $p \geqslant 1$.
Un procés estocàstic $X := \{X_t,\ t \in \mathbb{R}\}$ de L^p és *derivable en* L^p (o *derivable en mitjana p-èsima*) en t_0 si l'aplicació

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ &\xrightarrow{X} L^p \\ t &\longmapsto X_t \end{aligned}$$

és derivable en t_0; és a dir, si existeix $\xi \in L^p$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \|X_{t_0+h} - X_{t_0} - h\xi\|_{L^p} = 0\ .$$

És derivable en L^p si ho és en cada $t_0 \in \mathbb{R}^+$. $\square$

4.3.3 Exemples

1) Ja hem vist que el procés de Wiener no és derivable en probabilitat. Per tant tampoc no ho és en L^p.
2) El procés de Poisson no és derivable en L^p, per a cap $p \geqslant 1$: Com que és derivable en probabilitat i la seva derivada és zero, la seva derivada en L^p també hauria de ser zero. Però

$$\mathrm{E}\Big[\Big|\frac{N_{t+h} - N_t}{h}\Big|^p\Big] = \frac{1}{h^p}\,\mathrm{E}\big[|N_{t+h} - N_t|^p\big] \geqslant \frac{1}{h^p}\,\mathrm{E}\big[|N_{t+h} - N_t|\big]^p = \frac{1}{h^p}(\lambda h)^p \not\to 0$$

quan $h \to 0$.
3) Si un procés té trajectòries derivables, aleshores serà derivable en probabilitat (simplement, perquè la convergència quasi segura implica la convergència en probabilitat). En canvi, això no és cert per la derivabilitat en L^p. Per exemple, considerem el procés $X_t = \sin(\eta t)$, on η és una variable qualsevol, de momemt. És clar que el procés és tots els L^p (és de L^∞, de fet). La derivada de cada trajectòria existeix, i és $X'_t(\omega) = \eta(\omega)\cos(\eta(\omega)t)$. Clarament, podem escolllir η de manera que aquest procés no és de L^1. No podrà haver-hi, per tant, convergència a X'_t en L^1 del quocient incremental de X_t. $\square$

Igual que amb la continuïtat en L^2, la derivabilitat en L^2 es pot caracteritzar en termes de la funció de covariàncies (vegeu la demostració en [Wentzell], per exemple):

4.3.4 Proposició
Un procés X és de classe C^1 en L^2 si i només es compleix qualsevol de les condicions següents:

a) La funció $(t,s) \mapsto \mathrm{E}[X_t X_s]$ té segona derivada creuada contínua.

b) La funció de mitjanes és de classe C^1 i la funció de covariàncies $K(t,s)$ té segona derivada creuada.

En cas afirmatiu, les funcions de mitjanes i covariàncies del procés derivada són respectivament

$$t \mapsto m'(t) \qquad i \qquad (t,s) \mapsto \frac{\partial^2 K(t,s)}{\partial t \partial s} \ . \quad \square$$

4.4 Integració en probabilitat i en L^p

4.4.1 Definició
Un procés X és *integrable Riemann* (en probabilitat o en L^p) en un interval $[a,b]$ si existeix el límit de les sumes de Riemann

$$\sum_{i=0}^{n-1} X_{s_i}(t_{i+1} - t_i)$$

(en probabilitat o en L^p) quan la norma de la partició $\{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b\}$ tendeix a zero, i s_i és un punt arbitrari (determinista) de $[t_i, t_{i+1}]$. $\square$

4.4.2 Proposició
Si X és un procés continu en L^p, aleshores és integrable Riemann en L^p en tot interval $[a,b]$.

Demostració: X és uniformement continu en L^p en $[a,b]$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ s,t \in [a,b],\ |s-t| < \delta \Longrightarrow \|X_s - X_t\|_{L^p} < \varepsilon \ .$$

Siguin π_1 i π_2 dues particions de norma més petita que $\delta/2$.

$$\begin{aligned} &\Big\| \sum_{t_i,t_{i+1} \in \pi_1} X_{s_i}(t_{i+1} - t_i) - \sum_{u_i,u_{i+1} \in \pi_2} X_{r_i}(u_{i+1} - u_i) \Big\|_{L^p} \\ &= \Big\| \sum_{v_k,v_{k+1} \in \pi_1 \vee \pi_2} X_{s_k}(v_{k+1} - v_k) - \sum_{v_k,v_{k+1} \in \pi_1 \vee \pi_2} X_{r_k}(v_{k+1} - v_k) \Big\|_{L^p} \ , \end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned} s_k &= s_i, \text{ si } [v_k, v_{k+1}] \subset [t_i, t_{i+1}] \\ r_k &= r_i, \text{ si } [v_k, v_{k+1}] \subset [u_i, u_{i+1}] \ , \end{aligned}$$

i aquesta norma esta acotada per

$$\sum_{v_k,v_{k+1} \in \pi_1 \vee \pi_2} \|X_{s_k} - X_{r_k}\|_{L^p}(v_{k+1} - v_k) < \varepsilon \sum_{v_k,v_{k+1} \in \pi_1 \vee \pi_2} (v_{k+1} - v_k) = \varepsilon \cdot (b-a) \ . \quad \square$$

Similarment als problemes amb la derivabilitat, aquest resultat no és cert quan el sentit és en probabilitat:

4.4.3 Exemple
El procés

$$X_t = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leqslant \tau \\ \dfrac{1}{t-\tau}, & \text{si } t > \tau \end{cases} \ ,$$

on τ és una variable amb llei uniforme en $[0,1]$, és continu en probabilitat en $[0,1]$; no obstant, la integral de Riemann $\displaystyle\int_0^1 X_t\,dt$ no existeix en probabilitat. Vegem-ho:
Que és continu en probabilitat es demostra a partir de la definició, condicionant $P\{|X_t - X_s| > \varepsilon\}$ als conjunts $\{s,t \leqslant \tau(\omega)\}$, $\{s \leqslant \tau(\omega),\ t > \tau(\omega)\}$ i $\{s,t > \tau(\omega)\}$ (es pot suposar $s < t$).
Per altra banda, cada trajectòria $X.(\omega)$ té clarament integral infinita. Per tant, existiran sumes de Riemann convergint a ∞ quasi segur, i per tant en probabilitat. □

El resultat positiu en L^p de la Proposició 4.4.2 és general per a funcions valuades en espais de Banach. De fet, en aquesta situació són certs tots els resultats de la teoria clàssica de la integral de Riemann que no involucrin desigualtats entre nombres reals, sinò només entre els seus valors absoluts (que corresponen a les normes en els espais de Banach). En particular, el Teorema Fonamental del Càlcul: La primitiva d'un procés és derivable en L^p i la seva derivada coincideix amb el procés.

Como en el cas de la derivació, les funcions de mitjanes i covariàncies del procés integral en L^2 s'obtenen fàcilment a partir de les funcions corresponents del procés original. Remeto a [Wentzell] per la demostració:

4.4.4 Proposició

Siguin $t \mapsto m(t)$ i $K(t,s)$ les funcions de mitjanes i covariàncies d'un procés X continu en L^2. Aleshores les funcions de mitjanes i covariàncies de $\Big\{L^2\text{-}\displaystyle\int_0^t X_r\,dr,\ t \in \mathbb{R}^+\Big\}$ són respectivament

$$t \mapsto \int_0^t m(r)\,dr \qquad i \qquad (t,s) \mapsto \int_0^t \int_0^s K(r,u)\,dr\,du\ . \quad \square$$

Al parlar de derivabilitat hem comentat que si les trajectòries són totes derivables, aleshores hi ha també derivabilitat en probabilitat, i que en canvi en L^2 no es pot assegurar. En relació amb la integrabilitat, ens podem preguntar si el fet que un procés tingui totes les trajectòries integrables està relacionat amb la integrabilitat en probabilitat o en L^2.

La integrabilitat Riemann de les trajectòries implica clarament la integrabilitat en probabilitat, perquè la convergència quasi segura implica la convergència en probabilitat en les sumes de Riemann.

Això també és cert per a la integrabilitat en L^p: La integral en L^p és el límit en L^p d'unes certes sumes de Riemann, i per tant el límit és també en probabilitat. Per altra banda, la integral de cada trajectòria és el límit de les mateixes sumes; considerades conjuntament, hi ha convergència puntual i per tant també en probabilitat. Per la unicitat del límit en probabilitat, els dos valors han de coincidir.

Si les trajectòries són només Lebesgue integrables, aleshores tenim el resultat següent:

4.4.5 Proposició

Sigui X un procés mesurable, continu en L^p.
Aleshores X és integrable en $[a,b]$ en L^p (ja ho sabem: Proposició 4.4.2), cada trajectòria és Lebesgue integrable en $[a,b]$, i les variables aleatòries

$$\omega \mapsto \Big[L^p\text{-}\int_a^b X_t\,dt\Big](\omega) \qquad i \qquad \omega \mapsto \int_a^b X_t(\omega)\,dt$$

coincideixen q.s.

Demostració: Com que la convergència en L^p per un cert $p \geqslant 1$ implica la convergència en L^1, només cal fer la demostració per $p = 1$.

La integral trajectorial existeix, perquè

$$\int_a^b \int_\Omega |X_t(\omega)|\, P(d\omega)\, dt \leqslant (b-a) \max_{t\in[a,b]} \mathrm{E}\,|X_t| < \infty$$

(la continuïtat en L^1 en el compacte $[a,b]$ implica òbviament que les normes L^1 de les variables del procés estan uniformement acotades en $[a,b]$).

Siguin $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, i $s_i \in [t_{i-1}, t_i]$, per cada i. Tenim, per a cada $i = 1, \ldots, n-1$,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\Big|X_{s_i}(t_i - t_{i-1}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} X_t\, dt\Big| &= \mathrm{E}\,\Big|\int_{t_{i-1}}^{t_i} (X_t - X_{s_i})\, dt\Big| \\ &\leqslant \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathrm{E}\,|X_t - X_{s_i}|\, dt \leqslant (t_i - t_{i-1}) \max_{t\in[t_{i-1},t_i]} \mathrm{E}\,|X_t - X_{s_i}| \ . \end{aligned}$$

X és uniformement continu en L^1 en $[a,b]$. Per tant, per a cada $\varepsilon > 0$ existeix un $\delta > 0$ tal que si $t_i - t_{i-1} < \delta$, es té $\mathrm{E}\,|X_t - X_{s_i}| < \varepsilon$. Tindrem, doncs, per particions de norma més petita que δ,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\Big|\sum_{i=1}^n X_{s_i}(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} X_t\, dt\Big| &\leqslant \sum_{i=1}^n \mathrm{E}\,\Big|X_{s_i}(t_i - t_{i-1}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} X_t\, dt\Big| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})\varepsilon = (b-a)\varepsilon \ , \end{aligned}$$

i per tant les dues integrals són límits de successions que tenen el mateix límit en L^1, o sigui, són la mateixa variable aleatòria. □

5. Propietats relatives a les lleis

5.1 Introducció

En aquest capítol considerem els procesos estocásticos com variables aleatòries valuades a l'espai de trajectòries, dotat de la σ-àlgebra producte:

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}^+} \\ \omega &\longmapsto X(\omega) \end{aligned}$$

La llei del procés ve determinada per les lleis dels vectors finito-dimensionals $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$, i en general és necessari especificar el sistema complet d'aquestes lleis per tenir especificada la llei del procés. De vegades, sota alguna hipòtesi addicional, és suficient especificar les lleis fins a una certa dimensió. Per exemple, hem vist al parlar del procés de Wiener al Capítol 2 que la condició d'increments independents ens permet especificar simplement les lleis de les diferències $W_t - W_s$ (essencialment, això és especificar les lleis dels vectors 2-dimensionals (W_t, W_s)). En general, per als anomenats *processos de Markov*, que ja definirem després (la propietat d'increments independents implica la propietat de Markov), les lleis dels vectors 2-dimensionals determinen la llei del procés.

De fet, bona part de la teoria de processos estocàstics s'ocupa del que pot deduir-se de les lleis 2-dimensionals o alguns dels seus elements. Concretament, si X és un procés de L^2, pot definir-se la funció de covariància, i estudiar el procés prenent aquesta funció com a única dada. Que puguin obtenir-se així un bon nombre de resultats interessants és degut al fet que la imatge de la aplicació $\mathbb{R}^+ \to L^2$ queda caracteritzada per la funció de covariàncies llevat d'isomorfisme d'espais de Hilbert:

Si $\{X_t^1,\ t \in \mathbb{R}\}$ i $\{X_t^2,\ t \in \mathbb{R}\}$ son processos estocàstics definits en sengles espais de probabilitat $(\Omega_1, \mathfrak{F}_1, P_1)$ i $(\Omega_2, \mathfrak{F}_2, P_2)$, de L^2 i amb la mateixa funció de covariància, aleshores existeixen subespais tancats $M_1 \subset L^2(\Omega_1, \mathfrak{F}_1, P_1)$ i $M_2 \subset L^2(\Omega_2, \mathfrak{F}_2, P_2)$ i una isometria $\phi\colon M_1 \to M_2$ tal que per a tot $t \in \mathbb{R}$

$$X_t^1 \in M_1,\ X_t^2 \in M_2,\ \text{i } \phi(X_t^1) = X_t^2\ .$$

Els mètodes hilbertians poden per tant aplicar-se a aquest estudi, que s'anomena *teoria de la correlació*. La *teoria de segon ordre* s'ocupa de l'estudi dels processos a partir del sistema complet de lleis bidimensionals.

5.2 Algunes propietats de les lleis

Determinades propietats de les lleis tenen nom propi pel seu interès. Això porta a classificar diverses classes de processos atenent només a llurs lleis. Vegem alguns d'aquests noms propis:

5.2.1 Definicions

1) Un procés és *gaussià* si totes les lleis en dimensió finita són gaussianes (degenerades o no). A primera vista sembla un tipus molt particular de procés, però és fonamental en les aplicacions.
2) Un procés X té *increments independents del passat* si

$$\forall s \leqslant t,\ X_t - X_s \text{ és independent de } \{X_r,\ r \leqslant s\}\ .$$

Quan parlem simplement de *increments independents* entendrem que $X_t - X_s$ és independent de $X_r - X_u$, per a tots $u \leqslant r \leqslant s \leqslant t$.
Ambdues propietats són quasi equivalents. (Ho són si per exemple la variable X_0 és constant.)
3) Un procés X té *increments incorrelacionats* si és de L^2 i

$$\mathrm{Cov}[X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_4} - X_{t_3}] = 0\ ,$$

per a tots $t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant t_4$. També se'ls anomena processos amb *increments independents en sentit ampli.*
4) Un procés X té *increments ortogonals* si té increments incorrelacionats i totes les variables són centrades. El fet que $\mathrm{E}[X_t] = 0$ per a tot t implica que la incorrelació és equivalent a l'ortogonalitat a l'espai de Hilbert L^2.
5) Un procés X és *estacionari* si per a tot $h > 0$ i per a tot n, la llei de $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ coincideix amb la llei de $(X_{t_1+h}, \ldots, X_{t_n+h})$. La estacionarietat reflecteix constància en les condicions del medi en què evoluciona el fenomen que s'intenta representar.
6) Un procés és *estacionari en sentit ampli* si és de L^2 i les esperances i la funció de covariància són invariants per trasllació $h > 0$ dels seus arguments. Dit d'una altra manera, si la funció de mitjanes és constant i la funció de covariància $K(t, s)$ depèn només de la diferència $t - s$.
7) Un proces X té *increments estacionaris* si la llei de $(X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_0})$ és invariant per suma de $h > 0$ a tots els subíndexos. També queda reflectida una certa invariància del medi però no de manera tan restrictiva com amb els processos estacionaris.
També s'anomena, especialment en la teoria de processos de Markov, procés *temporalment homogeni.* □

5.2.2 Proposició

a) Increments independents i $L^2 \Rightarrow$ increments incorrelacionats.
Si el procés és gaussià, el recíproc també és cert.

b) Estacionari $\Rightarrow$ increments estacionaris.

c) Si el procés és de L^2, aleshores: Estacionari $\Rightarrow$ estacionari en sentit ampli.
Si és gaussià, el recíproc també és cert.

Demostració: a, b i la primera part de c són obvis. Per a l'última part de c només cal recordar que la llei de un vector gaussià $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ queda determinada pel vector de mitjanes i la matriu de covariàncies. □

5.2.3 Exemples

Els processos de Wiener i de Poisson tenen increments independents i estacionaris. Però no són processos estacionaris. □

El procés de Wiener estàndard es pot definir de diverses maneres equivalents:

5.2.4 Proposició

Les propietats següents són equivalents i defineixen el procés de Wiener estàndard W:

a) W té increments independents, $W_0 = 0$ q.s. i $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$, si $s \leqslant t$.

b) W és gaussià, $W_0 = 0$ q.s. i $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$, si $s \leqslant t$.

c) W és gaussià, la seva funció de mitjanes és $m(t) \equiv 0$ i la seva funció de covariància és $K(s, t) = s \wedge t$.

Demostració: Ja vam veure que *a)* defineix el procés de Wiener estàndard. Vegem l'equivalència dels tres enunciats:
c) $\Rightarrow$ *a)* i *b):*
Siguin $t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant t_4$. Usant $m(t) \equiv 0$, obtenim

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}[W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_4} - W_{t_3}] &= \mathrm{E}[(W_{t_2} - W_{t_1})(W_{t_4} - W_{t_3})] \\ &= \mathrm{E}[W_{t_2} W_{t_4}] - \mathrm{E}[W_{t_2} W_{t_3}] - \mathrm{E}[W_{t_1} W_{t_4}] + \mathrm{E}[W_{t_1} W_{t_3}] \\ &= t_2 - t_2 - t_1 + t_1 = 0 \ .\end{aligned}$$

Per tant, els increments són incorrelacionats. Com que W és gaussià, els increments són independents.

Tenim també que

$$\mathrm{E}[W_0^2] = 0 \wedge 0 = 0 \Rightarrow W = 0 \ , \quad \text{q.s.}$$

Finalment, com que (W_s, W_t) té llei gaussiana, $W_t - W_s$ també té llei gaussiana. A més,

$$m(t) \equiv 0 \Rightarrow \mathrm{E}[W_t - W_s] = 0$$

i, si $s \leqslant t$,

$$\mathrm{E}[(W_t - W_s)^2] = \mathrm{E}[W_t^2 - 2W_t W_s + W_s^2] = t - 2s + s = t - s \ .$$

a) $\Rightarrow$ *c):*
Sabem que les propietats de *a)* caracteritzen el procés de Wiener estàndard. Per tant, les lleis dels vectors $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$ són gaussianes, amb vector de mitjanes zero. A més, la matriu de covariàncies de (W_s, W_t), si $s \leqslant t$, és $\begin{pmatrix} s & s \\ s & t \end{pmatrix}$. Per tant, $K(t,s) = \mathrm{E}[W_s W_t] = s = s \wedge t$.

b) $\Rightarrow$ *c):*
$W_t \sim N(0,t) \Rightarrow m(t) \equiv 0$.
Si $s \leqslant t$,

$$t - s = \mathrm{E}[(W_t - W_s)^2] = \mathrm{E}[W_t^2] + \mathrm{E}[W_s^2] - 2\,\mathrm{E}[W_t W_s] = t + s - 2K(t,s) \ ,$$

d'on $K(t,s) = s = s \wedge t$. □

5.3 Relacions de dependència entre variables

Un altre tipus de questions que poden plantejar-se sobre les lleis són les relacions d'independència i dependència entre les variables aleatòries que formen el procés. Com ja hem comentat al Capítol 1, els casos interessants de processos estocàstics són aquells en què l'atzar intervé d'alguna manera en cada instant, però a la vegada el passat del procés influeix també.

Què vol dir influència del passat? En principi, cada variable X_t del procés té una certa llei. Però, excepte en la situació (poc interessant) en què totes les variables són independents entre sí, el coneixement dels valors que han pres altres variables en instants anteriors (o posteriors) a t modifica el que podem esperar de la variable X_t. Aquesta modificació és el que formalitzem amb les probabilitats condicionades. Si $s_1 < \cdots < s_n < t$ i suposem conegudes les variables $X_{s_1}, \dots, X_{s_n}$, el que interessa de X_t és la seva llei condicionada a aquestes variables:

$$P\big({X_t \in B}/{X_{s_1}, \dots, X_{s_n}}\big) \ , \quad B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \ .$$

La dependència markoviana és aquella en la que tota la informació de què hom disposa sobre el passat es pot resumir en la informació que conté la última de les variables del passat que hem observat:

5.3.1 Definició
Un procés estocàstic $\{X_t, \ t \in \mathbb{R}^+\}$ és un *procés de Markov* si

$$P\big({X_t \in B}/{X_{s_1}, \dots, X_{s_n}}\big) = P\big({X_t \in B}/{X_{s_n}}\big) \ ,$$

per a tots $s_1 < \cdots < s_n < t$, i $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. $\square$

Els processos de Markov venen a ser l'anàleg aleatori del que passa amb els sistemes deterministes governats per una equació diferencial ordinària amb solució única: Un valor donat en un instant de temps determina el sistema en instants posteriors; no es necessita cap informació sobre l'estat del sistema anteriorment. De fet, també el passat queda determinat, i aquí succeeix el mateix: Si $t < s_n < \cdots < s_1$,

$$P\big({}^{X_t \in B}/_{X_{s_n}, \dots, X_{s_1}}\big) = P\big({}^{X_t \in B}/_{X_{s_n}}\big) \ .$$

El concepte de procés de Markov pot formular-se de molt diverses maneres, i es pot generalitzar fent-hi intervenir una filtració de σ-àlgebres, però la idea que cal tenir en ment és l'expressada aquí.

Un altre tipus fonamental de dependència, molt important en Càlcul Estocàstic, és la dependència de martingala.

5.3.2 Definició

Un procés estocàstic $\{X_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ és una *martingala* (respectivament, una *submartingala*, una *supermartingala*) si és de L^1 i

$$\mathrm{E}\left[{}^{X_t}/_{X_s}\right] = X_s \text{ (resp. } \mathrm{E}\left[{}^{X_t}/_{X_s}\right] \geqslant X_s,\ \mathrm{E}\left[{}^{X_t}/_{X_s}\right] \leqslant X_s)$$

per a tots $s < t$. $\square$

Com en el cas dels processos de Markov, el concepte de martingala es pot fer més general introduint-hi filtracions.

5.3.3 Observació

La propietat de Markov no implica la propietat de martingala, ni tampoc a l'inrevés, malgrat que un geni de casa nostra va escriure a la Gran Enciclopèdia Catalana:

« **martingala:** Procés estocàstic de Markov que ... » $\square$

5.3.4 Exemples

1) El procés de Wiener és una martingala: Usant la propietat d'increments independents, si $s \leqslant t$,

$$\mathrm{E}\left[{}^{W_t}/_{W_s}\right] - W_s = \mathrm{E}\left[{}^{W_t - W_s}/_{W_s}\right] = \mathrm{E}[W_t - W_s] = 0 \ .$$

2) El procés de Poisson no és una martingala: Si $s \leqslant t$,

$$\mathrm{E}\left[{}^{N_t}/_{N_s}\right] - N_s = \mathrm{E}\left[{}^{N_t - N_s}/_{N_s}\right] = \mathrm{E}[N_t - N_s] = \lambda(t-s) \ .$$

3) Sigui N un procés de Poisson de variància λ. Definim $\tilde{N}_t = N_t - \lambda t$, que s'anomena *procés de Poisson compensat*, i sí que és una martingala:

$$\mathrm{E}\left[{}^{\tilde{N}_t}/_{\tilde{N}_s}\right] - \tilde{N}_s = \mathrm{E}\left[{}^{\tilde{N}_t - \tilde{N}_s}/_{\tilde{N}_s}\right] = \mathrm{E}[\tilde{N}_t - \tilde{N}_s] = \mathrm{E}[N_t - N_s] - (\lambda t - \lambda s) = 0 \ . \quad \square$$

Els processos de Wiener i de Poisson són de Markov. De fet, tenim el resultat següent:

5.3.5 Proposició
Increments independents $\Rightarrow$ Markov.

Demostració: Siguin X un procés amb increments independents, i $s_1 < \cdots < s_n < t$. Sigui Y una variable aleatòria independent de $(X_{s_1}, \ldots, X_{s_n})$. Demostrarem que si $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)$, aleshores

$$P\big\{(Y, X_{s_n}) \in A /X_{s_1}, \ldots, X_{s_n}\big\} = P\big\{(Y, X_{s_n}) \in A /X_{s_n}\big\} \ . \tag{5.3.1}$$

Això implicarà en particular que

$$P\big\{Y + X_{s_n} \in B /X_{s_1}, \ldots, X_{s_n}\big\} = P\big\{Y + X_{s_n} \in B /X_{s_n}\big\} \ ,$$

per a tot $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Prenent $Y = X_t - X_{s_n}$, haurem demostrat la propietat de Markov.

Considerem la col·lecció de conjunts

$$\mathfrak{C} = \{A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2) : \ (5.3.1) \text{ és cert}\} \ .$$

Comprovarem que $\mathfrak{C}$ és una classe monòtona i que conté els rectangles $A = A^1 \times A^2$. El Teorema de les Classes Monòtones ens donarà llavors que $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)$.

1) $\mathfrak{C}$ és classe monòtona: Sigui $\{A_m\}_m \subset \mathfrak{C}$ una successió creixent i $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$. Aleshores,

$$P\big\{(Y, X_{s_n}) \in A_m /X_{s_1}, \ldots, X_{s_n}\big\} = \mathrm{E}\left[\mathbf{1}_{\{(Y, X_{s_n}) \in A_m\}} /X_{s_1}, \ldots, X_{s_n}\right\} \ ,$$

que convergeix a

$$\mathrm{E}\left[\mathbf{1}_{\{(Y, X_{s_n}) \in A\}} /X_{s_1}, \ldots, X_{s_n}\right\} \ ,$$

per la propietat de convergència monòtona de les esperances condicionades. El mateix passa quan condicionem només a X_{s_n}, i s'obté que $A \in \mathfrak{C}$. Amb el mateix argument es demostra que la intersecció d'una successió decreixent de conjunts de $\mathfrak{C}$ és de $\mathfrak{C}$.

2) $\mathfrak{C}$ conté els rectangles $A^1 \times A^2$:

$$\begin{aligned} P\big\{Y \in A^1, \ X_{s_n} \in A^2 /X_{s_1}, \ldots, X_{s_n}\big\} &= \mathrm{E}\left[\mathbf{1}_{\{Y \in A^1\}} \mathbf{1}_{\{X_{s_n} \in A^2\}} /X_{s_1}, \ldots, X_{s_n}\right\} \\ = \mathbf{1}_{\{X_{s_n} \in A^2\}} \mathrm{E}\left[\mathbf{1}_{\{Y \in A^1\}} /X_{s_1}, \ldots, X_{s_n}\right\} &= \mathbf{1}_{\{X_{s_n} \in A^2\}} P\{Y \in A^1\} \ . \end{aligned}$$

I el resultat és el mateix quan comencem condicionant només per X_{s_n}.

□

6. Propietats amb probabilitat 1

Continuem pensant el procés estocàstic com una variable aleatòria $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$. Necessitem un apartat previ per definir els conceptes de modificació d'un procés i de indistingibilitat entre processos.

6.1 Modificacions i indistingibilitat

Suposem que tenim dos processos X i Y definits sobre el mateix espai de probabilitat, i suposem que tenen també la mateixa llei. És clar que X i Y poden ser molt diferents com a aplicació $\Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$. Per exemple, si X_t són variables uniformes en $[0,1]$ i independents entre si, i definim $Y_t = 1 - X_t$, aleshores X i Y tenen la mateixa llei, i en canvi $P\{X_t = Y_t\} = 0$ per a tot t.

Anem a definir dues relacions més fortes que la mera igualtat en llei.

6.1.1 Definició

Siguin X i Y dos processos definits en un mateix espai de probabilitat $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Diem que Y és una *modificació* o una *versió* de X si

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \ , \quad P\{\omega : \ X_t(\omega) = Y_t(\omega)\} = 1 \ . \qquad \square$$

Evidentment, dos processos que són modificació l'un de l'altre tenen la mateixa llei. El recíproc no és cert, com mostra l'exemple anterior.

6.1.2 Definició

Siguin X i Y dos processos definits en un mateix espai de probabilitat $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Diem que Y és *indistingible* de X si el conjunt

$$\{\omega : \ X_t(\omega) = Y_t(\omega), \ \forall t \in \mathbb{R}^+\} \tag{6.1.1}$$

inclou un conjunt de probabilitat 1.

(La idea intuïtiva és que $P\{\omega : \ X_t(\omega) = Y_t(\omega), \ \forall t \in \mathbb{R}^+\} = 1$, però si ho escrivim així estem exigint que el conjunt (6.1.1) sigui mesurable, i això no cal.)

Clarament, dos processos indistingibles són modificació l'un de l'altre. El recíproc no és cert, perquè el conjunt

$$\bigcap_{t \in \mathbb{R}^+} \{\omega : \ X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}$$

no té perquè tenir probabilitat 1.

6.1.3 Exemple

Siguin $\Omega = \mathbb{R}^+$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^+)$, i P una probabilitat absolutament contínua respecte la mesura de Lebesgue.

Sigui X el procés idènticament nul. Sigui Y el procés definit per

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \neq \omega \\ 1, & \text{si } t = \omega \ . \end{cases}$$

Clarament són versions l'un de l'altre, però totes les trajectòries són diferents. Per tant, no són indistingibles.
En particular, veiem en aquest exemple que un procés pot tenir totes les trajectòries contínues i en canvi una modificació seva tenir totes les trajectòries discontínues. $\square$

6.2 Existència de processos amb una determinada propietat trajectorial

Sigui $\Gamma \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$. La qüestió següent no té gaire sentit: Donat un procés, definit en un cert espai $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, determinar, usant només com a informació la llei del procés, si $P\{X \in \Gamma\} = 1$ o no. En efecte, amb la sola informació de les lleis, no sabem pràcticament res de les trajectòries d'un procés. A més, si $\Gamma \notin \mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+}$ (per exemple, si Γ és el conjunt de totes les funcions contínues $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$) no podem contestar la preguntar passant per la llei μ_X (i.e., no té sentit escriure $P\{X \in \Gamma\} = \mu_X(\Gamma)$, encara que el terme de l'esquerra sí pot estar ben definit).

En canvi, sí que tenen sentit les preguntes següents:

(a) Donada una llei en $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}, \mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+})$, determinar si existeix algun procés estocàstic X amb aquesta llei tal que $P\{X \in \Gamma\} = 1$.

(b) Donat un procés X, determinar, a partir de la llei del procés, si existeix una modificació $\tilde{X}$ de X tal que $P\{\tilde{X} \in \Gamma\} = 1$.

Respecte la pregunta (a), tenim el següent teorema:

6.2.1 Teorema

Sigui μ una probabilitat en $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}, \mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+})$.
Sigui $\Gamma \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$.
Aleshores, existeix un procés X amb llei μ tal que $P\{X \in \Gamma\} = 1$ si i només si $\mu^*(\Gamma) = 1$, on μ^* és la mesura exterior determinada per μ.

Demostració: Recordem que la mesura exterior associada a μ està definida per

$$\mu^*(B) := \inf\{\mu(A) : \ B \subset A, \ A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+}\} \ , \quad B \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}^+} \ .$$

Si $P\{X \in \Gamma\} = 1$, està clar que la condició donada s'ha de satisfer. Només cal veure que aquesta condició també és suficient. El que farem és construir un espai de probabilitat $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ i un procés X adequats, que seran "canònics" per aquesta situació donada.

Posem $\Omega := \Gamma$ i $\mathfrak{F} := \mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+}_{|\Gamma} := \{A \subset \Gamma : \ A = B \cap \Gamma, \ B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+}\}$. És fàcil veure que $\mathfrak{F}$ és en efecte una σ-àlgebra.

Definim $X(\omega) = \omega(t)$.

Finalment, construïm P: Si $A = B \cap \Gamma$, posem $P(A) = \mu(B)$. Hem de comprovar que P està ben definida. Suposem que $A = B_1 \cap \Gamma = B_2 \cap \Gamma$. Aleshores, $\Gamma \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}^+} - \big((B_1 - B_2) \cup (B_2 - B_1)\big)$. Per hipòtesi, $\mu\big(\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+} - \big((B_1 - B_2) \cup (B_2 - B_1)\big)\big) = 1$, d'on $\mu\big((B_1 - B_2) \cup (B_2 - B_1)\big) = 0$, i per tant $\mu(B_1) = \mu(B_2)$, i la definició de P és consistent. Es comprova també fàcilment que P és en efecte una probabilitat. (A més, és la única probabilitat complint $P(B \cap \Gamma) = \mu(B)$, $\forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+}_{|\Gamma}$, perquè coincideixen sobre tot mesurable contingut a Γ.

Per acabar el teorema, hem de veure que la llei del procés que hem construït coincideix amb μ:

$$\begin{aligned} &P\{\omega \in \Gamma : \ (X_{t_1}(\omega), \dots, X_{t_n}(\omega)) \in B\} = P\big(\Gamma \cap \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^+} : \ (x(t_1), \dots, x(t_n)) \in B\}\big) \\ &= \mu\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^+} : \ (x(t_1), \dots, x(t_n)) \in B\}) = \mu_{t_1,\dots,t_n}(B) \ . \quad \square \end{aligned}$$

6.2.2 Observació

En el Teorema 6.2.1 hem demostrat de fet que existeix un procés tal que *totes* les seves trajectòries pertanyen a Γ. Hem construït un "procés canònic" X en un "espai canònic" $(\Gamma, \mathfrak{F}, P)$, de manera que totes les trajectòries són del conjunt $\Gamma \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+}$. $\square$

6.3 Processos continus

Una de les propietats trajectorials més interessants en un procés és la continuïtat. Denotarem per $C(\mathbb{R}^+)$ el conjunt de totes les funcions contínues $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

6.3.1 Definició

Un procés estocàstic X és *continu* (resp. *continu q.s.*) si totes les seves trajectòries són funcions contínues (resp. totes les seves trajectòries $X(\omega)$ són funcions contínues excepte potser per $\omega \in N$, amb $P(N) = 0$.)

6.3.2 Teorema

Sigui μ una probabilitat en $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}, \mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+})$.
Suposem que per a cada $T > 0$, existeixen $\alpha > 0$, $r > 0$ i $K > 0$ tals que

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}} |\delta_t(x) - \delta_s(x)|^r \,\mu(dx) \leqslant K|t-s|^{1+\alpha} \ , \quad \forall\ 0 \leqslant s < t \leqslant T \ . \tag{6.3.1}$$

Aleshores $C(\mathbb{R}^+)$ té mesura exterior 1.
Encara més: Té mesura exterior 1 el conjunt de trajectòries Hölder-contínues amb exponent $\gamma < \alpha/r$ en tot interval acotat. Amb precisió: Sigui $\mathrm{Hölder}(\gamma)$ *el conjunt de funcions x tal que $\forall T > 0$, $\exists c > 0$ (depenent de x) complint*

$$|x(t) - x(s)| \leqslant c \cdot |t-s|^\gamma \ , \quad \forall t, s \in [0, T] \ .$$

Aleshores, té mesura exterior 1 el conjunt $\bigcap_{\gamma < \alpha/r} \mathrm{Hölder}(\gamma)$. □

Aquest teorema, juntament amb el Teorema 6.2.1, ens dóna l'existència d'un espai de probabilitat $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ i un procés X amb la llei donada tal que totes les trajectòries del procés són contínues. Per tant, podem dir òbviament que

$$P\{\omega : \ X(\omega) \in C(\mathbb{R}^+)\} = 1 \ ,$$

encara que no podem dir $\mu(C(\mathbb{R}^+)) = 1$, perquè $C(\mathbb{R}^+) \notin \mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+}$.

Es pot demostrar quelcom més fort: Si tenim donat un procés X sobre un espai qualsevol $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ tal que la seva llei μ compleixi una condició similar a (6.3.1), aleshores existeix una modificació de X amb totes les trajectòries contínues. Això és el que afirma el teorema següent, conegut com a Criteri de Continuïtat de Kolmogorov. És un resultat en la direcció de la pregunta (b), per al cas $\Gamma = C(\mathbb{R}^+)$.

6.3.3 Teorema

Sigui X un procés estocàstic definit en un cert espai de probabilitat $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.
Suposem que per a cada $T > 0$, existeixen $\alpha > 0$, $r > 0$ i $K > 0$ tals que

$$\mathrm{E}[|X_t - X_s|^r] \leqslant K|t-s|^{1+\alpha} \quad , \quad \forall 0 \leqslant s < t \leqslant T \quad .$$

Aleshores existeix una modificació $\tilde{X}$ de X amb totes les trajectòries contínues.
Encara més: Existeix una modificació $\tilde{X}$ amb totes les trajectòries Hölder-contínues amb exponent $\gamma < \alpha/r$ en tot interval acotat. ($\forall \omega$, $\tilde{X}(\omega) \in \bigcap_{\gamma < \alpha/r} \mathrm{Hölder}(\gamma)$.)

Demostració: Vegem primer que un procés X satisfent (6.3.1) és continu en probabilitat: Per la desigualtat de Txebixev,

$$P\{|X_t - X_s| > \varepsilon\} \leqslant \varepsilon^{-r}\,\mathrm{E}\,|X_t - X_s|^r \leqslant \varepsilon^{-r} K|t-s|^{1+\alpha} \xrightarrow[|t-s| \to 0]{} 0 \ .$$

Suposem de moment que $T = 1$, per simplificar. Per a cada $n \in \mathbb{N}$, sigui $D_n := \{0, 2^{-n}, 2 \cdot 2^{-n}, 3 \cdot 2^{-n}, \dots, 1\}$ (la anomenada *partició diàdica d'ordre* n de $[0,1]$). Fixem $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \dots, 2^n\}$, i $0 < \gamma < \alpha/r$.

$$P\{|X_{(k-1)2^{-n}} - X_{k2^{-n}}| > 2^{-n\gamma}\} \leqslant K 2^{n\gamma r} 2^{-n(1+\alpha)} = K 2^{-n(1+\alpha-\gamma r)} .$$

Definim $A_n := \{\max_{k=1,\dots,2^n} |X_{(k-1)2^{-n}} - X_{k2^{-n}}| > 2^{-n\gamma}\} \in \mathfrak{F}$. Tenim que

$$\begin{aligned} P(A_n) = P\Big(\bigcup_{k=1}^{2^n} \big\{|X_{(k-1)2^{-n}} - X_{k2^{-n}}| > 2^{-n\gamma}\big\}\Big) &\leqslant \sum_{k=1}^{2^n} P\big\{|X_{(k-1)2^{-n}} - X_{k2^{-n}}| > 2^{-n\gamma}\big\} \\ &\leqslant 2^n K 2^{-n(1+\alpha-\gamma r)} = K 2^{-n(\alpha-\gamma r)} . \end{aligned}$$

Sumant aquestes probabilitats,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \leqslant K \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n(\alpha-\gamma r)} < \infty ,$$

i el Lema de Borel–Cantelli ens assegura que la probabilitat de $B := \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$ és zero. Equivalentment, la probabilitat de $B^c = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c$ és 1. Notem que els elements de B^c són aquells ω pels quals existeix un $m_0(\omega)$ tal que

$$m > m_0(\omega) \Rightarrow \max_{k=1,\dots,2^m} |X_{(k-1)2^{-m}}(\omega) - X_{k2^{-m}}(\omega)| \leqslant 2^{-m\gamma}\} . \tag{6.3.2}$$

Vegem ara que si $m > n > m_0(\omega)$, aleshores per a tots $s, t \in D_m$ tals que $|s - t| < 2^{-n}$ es compleix

$$|X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leqslant 2 \sum_{j=n+1}^{m} 2^{-j\gamma} \tag{6.3.3}$$

Ho veurem per inducció sobre m. Si $m = n + 1$, aleshores forçosament s i t són punts consecutius de D_{n+1}. Per tant, $s = (k-1)2^{n+1}$ i $t = k2^{n+1}$, per un cert k, i segons (6.3.2),

$$|X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leqslant 2^{-(n+1)\gamma} < 2 \cdot 2^{-(n+1)\gamma} .$$

Vegem-ho per m suposant-ho cert per $m - 1$. Siguin $s_1 := \min\{u \in D_{m-1} :\ u \geqslant s\}$ i $t_1 := \max\{u \in D_{m-1} :\ u \leqslant t\}$. Aleshores

$$|X_s(\omega) - X_t(\omega)| \leqslant |X_{s_1}(\omega) - X_s(\omega)| + |X_{s_1}(\omega) - X_{t_1}(\omega)| + |X_{t_1}(\omega) - X_t(\omega)| . \tag{6.3.4}$$

En el primer i tercer sumands tenim dos punts consecutius de D_m. Pel segon sumand, apliquem la hipòtesi d'inducció. Obtenim que (6.3.4) és més petit o igual que

$$2^{-n\gamma} + 2 \sum_{j=n+1}^{m-1} 2^{-j\gamma} + 2^{-n\gamma} = 2 \sum_{j=n+1}^{m} 2^{-j\gamma} .$$

Sigui $D := \bigcup_n D_n$. Fixem $\omega \in B^c$, i sigui $m_0(\omega)$ el natural definit abans.

Siguin $s, t \in D$ tals que $0 < |s - t| < 2^{-m_0(\omega)}$. Existirà un cert $n \geqslant m_0(\omega)$ tal que

$$2^{-(n+1)} \leqslant |s - t| < 2^{-n} \leqslant 2^{-m_0(\omega)} .$$

Prenem $m > n$ tal que $s, t \in D_m$. Sabem que en aquesta situació es compleix (6.3.3) i per tant també

$$|X_s(\omega) - X_t(\omega)| \leqslant 2 \sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{-j\gamma} = \frac{2}{1 - 2^{-\gamma}} 2^{-(n+1)\gamma} \leqslant K|s - t|^{\gamma} ,$$

on K és una constant que no depèn de s i t. Hem vist doncs que la condició de Hölder continuïtat de l'enunciat es compleix sobre el conjunt de tots els punts diàdics D.

Ara anem a definir la versió de X que complirà l'enunciat:

1) Si ω és del conjunt de probabilitat zero B, posem $\tilde{X}(\omega) \equiv 0$.

2) Si $\omega \in B^c$, definim $\tilde{X}$ de la manera següent: Sigui $\{d_n\}_n \subset D$ una successió de punts diàdics convergint a t. Aleshores posem

$$\tilde{X}_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_{d_n}(\omega) \ .$$

Per acabar la demostració només ens cal veure que la definició de $\tilde{X}_t$ no depèn de la successió $\{d_n\}_n$ considerada, que $\tilde{X}$ és una versió de X i que $\tilde{X}$ és un procés continu amb la propietat de Hölder de l'enunciat.

Sabem que X és continu sobre D. Per tant, si $d_n \xrightarrow[n\to\infty]{} t$, la successió $\{X_{d_n}(\omega)\}_n$ és de Cauchy en $\mathbb{R}$, i per tant té límit. Siguin $\{d_n\}_n$ i $\{d'_n\}_n$ dues successions que convergeixen a t. Definim

$$d''_n = \begin{cases} d_n, & \text{si } n \text{ imparell.} \\ d'_n, & \text{si } n \text{ parell.} \end{cases}$$

El límit de $\{X_{d''_n}(\omega)\}_n$ també existirà i haurà de coincidir amb el de les parcials $\{X_{d'_n}(\omega)\}_n$ i $\{X_{d''_n}(\omega)\}_n$. Per tant, $\lim\limits_{n\to\infty} X_{d'_n}(\omega) = \lim\limits_{n\to\infty} X_{d''_n}(\omega)$.

Vegem que $\tilde{X}$ és una versió de X: Si $t \in D$, $P\{X_t = \tilde{X}_t\} \geqslant P(B^c) = 1$. Suposem que $t \notin D$. Sigui $\{d_n\}_n \subset D$ tal que $d_n \xrightarrow[n\to\infty]{} t$. Com que X és continu en probabilitat, existirà una parcial $\{d_{n_k}\}_k$ tal que

$$X_{d_{n_k}} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{q.s.}} X_t \ ,$$

és a dir, tenim aquesta covergència per a tot $\omega \in \Lambda$, amb $P(\Lambda) = 1$. Però, per a tot $\omega \in B^c$ sabem que

$$X_{d_{n_k}}(\omega) \xrightarrow[k\to\infty]{\text{q.s.}} \tilde{X}_t(\omega) \ .$$

Per tant, si $\omega \in \Lambda \cap B^c$, que és un conjunt de probabilitat 1, obtenim $X_t(\omega) = \tilde{X}_t(\omega)$.

Finalment, la continuïtat és òbvia per construcció. □

6.4 L'espai canònic per a processos continus

Suposem ara que tenim un procés X definit en un espai de probabilitat qualsevol $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ totes les trajectòries del qual són funcions contínues. En lloc de l'espai de trajectòries $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}, \mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+})$ ens agradaria prendre com a espai de trajectòries el conjunt $C(\mathbb{R}^+)$ de totes les funcions contínues $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, amb una σ-àlgebra adequada per tal que $X\colon \Omega \to C(\mathbb{R}^+)$ sigui mesurable, i poder parlar de la llei del procés com una probabilitat en aquest espai més petit. Estudiarem primer l'espai topològic $C(\mathbb{R}^+)$. Per simplificar notació escriurem $C := C(\mathbb{R}^+)$.

La topologia natural en C és la de la "convergència uniforme sobre acotats". S'anomena així perquè una successió $\{x_n\}_n$ d'elements de C convergeix a x en aquesta topologia si i només si x_n convergeix uniformement a x sobre $[0, T]$, per a tot T. Una manera de donar la topologia és especificar un *sistema fonamental d'entorns* (una col·lecció de conjunts tal que tot entorn d'un punt inclou un dels conjunts de la col·lecció):

$$V_{x^0,T,\varepsilon} := \Big\{ x : \sup_{0\leqslant t\leqslant T} |x(t) - x^0(t)| < \varepsilon \Big\} \tag{6.4.1}$$

variant x^0, T, ε. És a dir, com a sistema fonamental d'entorns prenem les boles en els espais de Banach $\big(C([0,T]), \|\cdot\|_\infty\big)$.

Aquesta topologia és metritzable mitjançant la distància

$$d(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant n} |x(t) - x'(t)|}{1 + \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant n} |x(t) - x'(t)|} \ ,$$

o també la distància

$$d(x,x') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sup_{0\leqslant t\leqslant n} \big(|x(t)-x'(t)| \wedge 1\big) \ .$$

L'espai resultant és polonès (mètric, separable i complet).

Sobre C podem considerar dues σ-àlgebres de manera natural. Per una banda, podem considerar $\mathfrak{B}(C)$, la σ-àlgebra dels borelians relativa a la topologia donada. Per altra banda, podem construir una σ-àlgebra en C pel procediment que ja hem emprat en el Teorema 6.2.1: La *traça* de $\mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+}$ per C, que és

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+}_{|C} := \{A : \ A = B\cap C, \ B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+}\} \ .$$

Resulta que aquestes dues σ-àlgebres són la mateixa:

6.4.1 Proposició
Els espais mesurables $(C, \mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+}_{|C})$ i $(C, \mathfrak{B}(C))$ coincideixen.

Demostració: Considerem en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$ la σ-àlgebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+} \vee \sigma\{C\}$ (la més petita que conté tots els conjunts de $\mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+}$ i el conjunt C). Dit d'una altra manera, és la més petita σ-àlgebra que fa mesurables les projeccions $\delta_t(x) = x(t)$ i el conjunt C. Fent la traça per C, la σ-àlgebra resultant $\mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+}_{|C}$ serà exactament la generada per les projeccions $\{\delta_t, \ t\geqslant 0\}$, considerades com a funcions $C\to\mathbb{R}$. Només cal comprovar, doncs, que $\sigma\{\delta_t, \ t\geqslant 0\} = \mathfrak{B}(C)$.

L'aplicació $x\mapsto \delta_t(x)$ és contínua per a cada t i per tant mesurable respecte $\mathfrak{B}(C)$. Tenim doncs que $\sigma\{\delta_t, \ t\geqslant 0\}\subset \mathfrak{B}(C)$.

Per a la inclusió recíproca: Per a cada x^0, T, ε fixats, podem posar el conjunt $V_{x^0,T,\varepsilon}$ de (6.4.1) com

$$V_{x^0,T,\varepsilon} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big\{x : \ |\delta_t(x) - \delta_t(x^0)| \leqslant \varepsilon(1-\frac{1}{n}), \ \forall t\in[0,T]\cap\mathbb{Q}\Big\} \quad .$$

Cada conjunt d'aquesta unió numerable és de $\sigma\{\delta_t, \ t\geqslant 0\}$, d'on la unió també, i la σ-àlgebra generada per aquests $V_{x^0,T,\varepsilon}$ estarà inclosa en $\sigma\{\delta_t, \ t\geqslant 0\}$. O sigui $\mathfrak{B}(C)\subset\sigma\{\delta_t, \ t\geqslant 0\}$. □

6.4.2 Teorema
Sigui $\{\mu_{t_1,\dots,t_n}, \ t_i\in\mathbb{R}^+, \ n\in\mathbb{N}\}$ una família consistent de lleis en dimensió finita.
Suposem que per a cada $T>0$ existeixen $\alpha>0$, $r>0$, $K>0$ tals que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |y-z|^r \, \mu_{s,t}(d(z,y)) \leqslant K|t-s|^{1+\alpha} \quad , \quad \forall 0\leqslant s<t\leqslant T \quad . \tag{6.4.2}$$

Aleshores existeix una única probabilitat μ sobre $(C,\mathfrak{B}(C))$ tal que

$$\mu(\delta^{-1}_{t_1,\dots,t_n}(B)) := \mu_{t_1,\dots,t_n}(B) \ ,$$

$\forall 0\leqslant t_1<\cdots<t_n, \ \forall B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$.

Demostració: La unicitat ve del fet que $\mathfrak{B}(C) = \sigma\{\delta_t, \ t\geqslant 0\}$, procedint com en la demostració del Teorema de Daniell–Kolmogorov 1.5.2.

Vegem l'existència: Existeix μ' en $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}, \mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+})$ única determinada per la família $\mu_{t_1,\dots,t_n}$. Llavors, (6.4.2) implica (6.3.1) i C té mesura exterior 1 en $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}, \mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+}, \mu')$.

μ' determina una probabilitat μ al restringir-la a l'espai $(C, \mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+}_{|C})$, definida per $\mu(A\cap C) = \mu'(A)$, $\forall A\in\mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+}$. Però $\mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+}_{|C} = \mathfrak{B}(C)$, segons el Teorema 6.4.1. □

Suposem que tenim un procés X definit en un espai de probabilitat $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ i amb totes les trajectòries en C. Anem a veure que l'aplicació $X\colon\Omega\to C$ és també mesurable respecte la σ-àlgebra $\mathfrak{B}(C)$, i per tant es pot definir la seva llei com una probabilitat μ en $(C,\mathfrak{B}(C))$:

En efecte, si $A \in \mathfrak{B}(C)$, llavors $A = B \cap C$, per algun $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+}$, i

$$X^{-1}(A) = X^{-1}(B \cap C) = X^{-1}(B) \cap X^{-1}(C) \in \mathfrak{F} .$$

La llei en $(C, \mathfrak{B}(C))$ serà

$$\mu(A) = P(X^{-1}(A)) = P(X^{-1}(B \cap C)) = P(X^{-1}(B) \cap X^{-1}(C)) = P(X^{-1}(B)) = \nu(B) ,$$

on ν és la llei considerada en $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}, \mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+})$. Per tant, μ és la única probabilitat sobre $(C, \mathfrak{B}(C))$ complint $\mu(B \cap C) = \nu(B)$, $\forall B \in (\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+}$.

Tot aquest raonament val també en general. Si X té trajectòries en Γ, aleshores tot el raonament val substituint C i $\mathfrak{B}(C)$ per Γ i $\mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+}_{|\Gamma}$.

6.5 Processos continus per la dreta o per l'esquerra

6.5.1 Definició

Un procés estocàstic X és *continu per la dreta* (resp. *continu per l'esquerra*), si totes les seves trajectòries són funcions contínues per la dreta (resp. contínues per l'esquerra).
Abreviadament, en diem procés càd (*continu à droite*) i procés càg (*continu à gauche*). □

6.5.2 Definició

Un procés estocàstic X diem que és *càdlàg* (resp. *càglàd*) si totes les seves trajectòries són funcions contínues per la dreta amb límits per l'esquerra (resp. *contínues per l'esquerra amb límits per la dreta*).
càdlàg és l'abreviatura de *continu à droite avec des limites à gauche*. □

Naturalment, si quasi segurament totes les trajectòries d'un procés són càd, càg, càdlàg, etc., es diu que el procés té la propietat corresponent quasi segur.

6.5.3 Proposició

Siguin X, Y dos processos q.s. càd o càg que són versions l'un de l'altre. Aleshores són indistingibles.

Demostració: Ho farem pel cas càd. Notem per $\mathbb{Q}^+$ el conjunt de tots els nombres racionals positius. Per hipòtesi, el conjunt

$$A = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}^+} \{X_r \neq Y_r\}$$

té probabilitat zero.

Sigui $N \in \mathfrak{F}$ el conjunt de probabilitat zero fora del qual les trajectòries de X i Y són contínues per la dreta.

Suposem que per algun $\omega \in \Omega$ i algun $t \in \mathbb{R}^+$ es té $X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)$. Aleshores existirà $r \in \mathbb{Q}^+$ amb $X_r(\omega) \neq Y_r(\omega)$, perquè en cas contrari, aproximant-nos a t per la dreta sobre racionals arribariem a $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$. Conclusió:

$$\{\omega : \; X_t(\omega) \neq Y_t(\omega) \text{ pera algun } t \in \mathbb{R}^+\} \subset N \cup A ,$$

i és per tant un conjunt de probabilitat zero. □

Una condició suficient per tal que un procés sigui mesurable ve donada per la proposició següent.

6.5.4 Proposició

Sigui X un procés càd o càg. Aleshores, X és un procés mesurable.

Demostració: Definim, per $n \in \mathbb{N}$, el procés

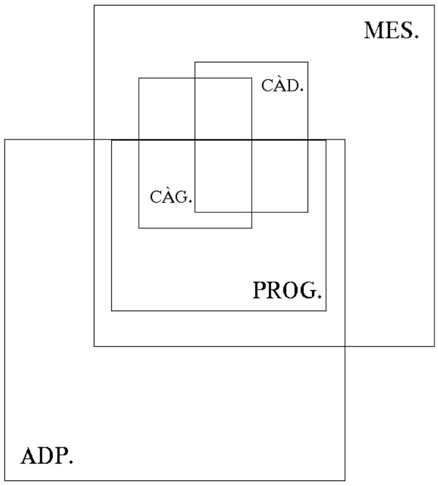
$$X_t^n(\omega) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[}(t) X_{\frac{k+1}{2^n}}(\omega) \ .$$

Cada sumand és un procés mesurable (es comprova fàcilment). Per altra banda, de la continuïtat per la dreta s'obté que, per a tot (t, ω), $\lim_{n\to\infty} X_t^n(\omega) = X_t(\omega)$, i la proposició està demostrada. □

6.5.5 Proposició

Sigui X un procés càd o càg adaptat a una certa filtració $\{\mathfrak{F}_t, \ t \in \mathbb{R}^+\}$. Aleshores, X és un procés progressivament mesurable.

Demostració: Es fa amb un argument semblant al de la proposició anterior, veient que els processos X^n són progressivament mesurables. □



A partir de la llei d'un procés no es pot assegurar que sigui mesurable. Fins i tot pot ser que no tingui cap versió mesurable.

6.5.6 Exemple

Sigui $X = \{X_t, \ t \in \mathbb{R}^+\}$ un procés tal que les variables X_t són independents idènticament distribuïdes amb llei uniforme en $[-1, 1]$. Suposem que X té una versió mesurable, que denotarem també per X.

Gràcies a la mesurabilitat, estarà ben definit el procés $Y_t := \displaystyle\int_0^t X_s \, ds$, que té totes les trajectòries contínues.

Suposem que $Y_t = 0$ q.s., per a tot t. Aleshores, la funció $t \mapsto Y_t(\omega)$ serà idènticament zero sobre els racionals, ω-q.s. I per la continuïtat de les trajectòries, serà idènticament zero sobre tot $\mathbb{R}^+$, ω-q.s. Això implicaria que quasi per tot t (respecte la mesura de Lebesgue), $X_t(\omega) = 0$, ω-q.s. Això contradiu la llei donada per a les variables X_t.

Suposem, al contrari, que existeix un t tal que $P\{Y_t \neq 0\} > 0$. Aleshores tindrem $\mathrm{E}[Y_t^2] > 0$. Però per altra banda,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[Y_t^2] &= \mathrm{E}\Big[\Big(\int_0^t X_s \, ds\Big)^2\Big] = \mathrm{E}\Big[\int_0^t \int_0^t X_s X_r \, ds \, dr\Big] \\
&= \int_0^t \int_0^t \mathrm{E}[X_s X_r] \, ds \, dr = \frac{1}{3} \int_0^t \int_0^t \mathbf{1}_{\{s=r\}} \, ds \, dr = 0 \ ,
\end{aligned}$$

que també és contradictori. Per tant, un procés amb la llei donada no pot tenir cap versió mesurable. □

Marginalment, esmentarem que, anàlogament al cas dels processos continus, es pot construir un bon espai canònic per a processos càdlàg. La convergència uniforme sobre acotats a l'espai

$D(\mathbb{R}^+)$ de funcions càdlàg no és massa adequada, perquè l'espai resultant no és separable. Es defineix la *topologia de Skorokhod* en $D(\mathbb{R}^+)$ mitjançant la següent noció de convergència:

Una successió de funcions $\{x_n\}_n \subset D(\mathbb{R}^+)$ convergeix a la funció x si existeix una successió de funcions $\lambda_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ contínues, bijectives, tals que $|\lambda_n(t) - t| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ uniformement i $|x_n(\lambda_n(t)) - x(t)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ uniformement.

Es pot demostrar que:

1) Existeix una mètrica que indueix aquesta convergència i que fa de $D(\mathbb{R}^+)$ un espai polonès.
2) L'espai $C(\mathbb{R}^+)$ de funcions contínues, com a subspai de $D(\mathbb{R}^+)$, hereda una topologia que coincideix amb la de la convergència uniforme sobre acotats.
3) La σ-àlgebra dels borelians $\mathfrak{B}(D(\mathbb{R}^+))$ relativa a aquesta topologia coincideix amb la generada per les projeccions δ_t. D'aquí es dedueix l'anàleg a la Proposició 6.4.1: Els espais mesurables $(D, \mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+}_{|D})$ i $(D, \mathfrak{B}(D))$ coincideixen.

6.6 Propietats trajectorials del procés de Wiener

6.6.1 Proposició

Sigui W un procés de Wiener. Aleshores existeix una modificació de W que té totes a $\bigcap_{\gamma<1/2} \text{Hölder}(\gamma)$.

Demostració: Recordem que si W és un procés de Wiener amb variància σ^2, aleshores $\mathrm{E}\,|W_t - W_s|^{2n} = C_n|t-s|^n$, per certa constant C_n. Prenem $n = 2$. Podrem aplicar el criteri de continuïtat de Kolmogorov amb $r = 4$, $\alpha = 1$ per obtenir la continuïtat i un exponent Hölder $0 < \gamma < 1/4$. Agafant en general $r = 2n$ i $\alpha = n - 1$, obtenim $0 < \gamma < \frac{n-1}{2n}$, i per tant les trajectòries són Hölder-contínues amb exponent $0 < \gamma < 1/2$. □

6.6.2 Definició

Segons el Teorema 6.4.2, existeix una probabilitat μ en $(C, \mathfrak{B}(C))$ tal que les seves lleis en dimensió finita corresponen a les del procés de Wiener. L'espai de probabilitat $(C, \mathfrak{B}(C), \mu)$ s'anomena *espai de Wiener*, i μ és la *mesura de Wiener*. □

$(C, \mathfrak{B}(C), \mu)$ és l'espai canònic per un procés de Wiener continu: Si prenem aquest mateix espai com a $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, i definim W com la identitat, aleshores W és un procés de Wiener continu.

6.6.3 Observació

Si W és un procés de Wiener començant en zero, aleshores es pot prendre com a espai canònic l'espai $(C_0, \mathfrak{B}(C_0), \mu)$, on C_0 representa l'espai de funcions contínues sobre $\mathbb{R}^+$ que s'anul·len en zero. Tot el que hem fet per C es pot fer per C_0. □

D'ara en endavant, quan parlem del procés de Wiener, suposarem que és continu, i el pensarem com a aplicació $\Omega \to C$.

6.6.4 Proposició

Quasi segurament, les trajectòries d'un procés de Wiener W són no-diferenciables en cap punt.

Demostració: Suposem per simplificar que estem parlant d'un procés de Wiener estàndard. (Si no, algunes de les quantitats que apareixeran vindran afectades per una constant, però els arguments no canvien.) Per $k, n \in \mathbb{N}$, siguin

$$X_{nk} := \max\left\{|W_{k2^{-n}} - W_{(k-1)2^{-n}}|, |W_{(k+1)2^{-n}} - W_{k2^{-n}}|, |W_{(k+2)2^{-n}} - W_{(k+1)2^{-n}}|\right\}$$

i

$$Y_n := \min_{\frac{k}{n} \leqslant 2^n} X_{nk} .$$

Les tres variables dins els valores absoluts són independents i tenen la mateixa llei que $2^{-n/2}W_1$, d'on

$$P\{X_{nk} \leqslant \varepsilon\} = \big(P\{|W_1| \leqslant \varepsilon 2^{n/2}\}\big)^3 \leqslant (2\varepsilon 2^{n/2})^3 \ ,$$

i obtenim

$$P\{Y_n \leqslant \varepsilon\} \leqslant \sum_{k=0}^{n2^n} P\{X_{nk} \leqslant \varepsilon\} \leqslant n2^n(2^{n/2+1}\varepsilon)^3 \ .$$

Denotem

$$A := \{\omega \in \Omega : \ W(\omega) \text{ té derivada en algun punt}\} \ .$$

Si $W(\omega)$ és derivable en el punt t i D és la seva derivada, aleshores existirà $\delta = \delta(t,\omega)$ tal que $|s-t| \leqslant \delta \Rightarrow |W_s(\omega) - W_t(\omega)| \leqslant (|D|+1)|s-t|$.

Existeix un $n_0 = n_0(t,\omega)$ tal que

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow \begin{cases} n > t \ , \\ n > 2(|D|+1) \ , \\ 2^{-n} < \delta/2 \ . \end{cases}$$

Per a cada $n \geqslant n_0$, triem k tal que $k2^{-n} \leqslant t < \frac{k+1}{2^n}$. Aleshores $|t - i2^{-n}| < \delta$ per $i = k-1, k, k+1, k+2$. Per tant,

$$X_{nk} \leqslant (|D|+1)2 \cdot 2^{-n} \leqslant n2^{-n} \ ,$$

i en conseqüència, com que $k \leqslant 2^n t < 2^n n$,

$$Y_n \leqslant n2^{-n} \ .$$

Hem provat que $\omega \in A \Rightarrow \omega \in A_n := \{Y_n \leqslant n2^{-n}\}$, per a tot n a partir d'un cert n_0. És a dir,

$$A \subset \underline{\lim}_n A_n \ .$$

Finalment,

$$\begin{aligned} P(A) &\leqslant P(\underline{\lim}_n A_n) = P(\cup_n \cap_{k\geqslant n} A_k) = \lim_{n\to\infty} P(\cap_{k\geqslant n} A_k) \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} P(A_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} n2^n(2\cdot 2^{n/2} n 2^{-n})^3 = 0 \ . \end{aligned}$$ □

6.6.5 Definicions

Donats una funció $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ i una partició $\pi = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ de $[a,b]$, s'anomena *variació de f en $[a,b]$ respecte la partició π* a la quantitat

$$V_{[a,b],\pi}(f) := \sum_{t_i, t_{i+1} \in \pi} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \ .$$

S'anomena *variació de f en $[a,b]$* a la quantitat

$$V_{[a,b]}(f) := \sup_{\pi} \sum_{t_i, t_{i+1} \in \pi} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \ ,$$

on π varia en el conjunt de totes les particions de $[a,b]$.
Una funció tal que $V_{[a,b]}(f) < \infty$ es diu que és de *variació acotada* (o *finita*) en $[a,b]$. □

Tota funció real de variable real amb variació acotada en un interval $[a,b]$ és derivable en $[a,b]$ excepte en un conjunt de mesura de Lebesgue zero. Per tant, com a conseqüència de la Proposició 6.6.4, les trajectòries del procés de Wiener són de variació no-acotada en tot interval no degenerat $[a,b]$, quasi segur. Veurem que això es dedueix també del fet que les trajectòries tenen quasi segur variació quadràtica no nul·la (vegeu la Proposició 6.6.10).

La definició de variació quadràtica que s'usa en Anàlisi és la que sembla natural: La variació quadràtica de f en un interval $[a,b]$ és

$$V^2_{[a,b]}(f) := \sup_{\pi} \sum_{t_i,t_{i+1}\in\pi} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|^2 \ ,$$

i en general es pot definir V^k (variació d'ordre k) de manera similar. No obstant, quan parlem de variació quadràtica en la teoria de procesos estocàstics no ens referim a això, sino al concepte que definim tot seguit.

Denotarem per $\|\pi\| := \max_{t_i,t_{i+1}\in\pi} |t_{i+1} - t_i|$ la *norma* d'una partició π. Una succesió $\{\pi_n\}_n$ de particions de $[a,b]$ diem que es refinant si $\pi_n \subset \pi_{n+1}$, $\forall n$.

6.6.6 Definició

Sigui $\{\pi_n\}_n$ una successió refinant de particions de $[a,b]$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|\pi_n\| = 0$.
S'anomena *variació quadràtica* de $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ al límit, si existeix i no depèn de la successió $\{\pi\}_n$ escollida,

$$V^2_{[a,b]}(f) := \lim_{n\to\infty} V^2_{[a,b],\pi}(f) := \lim_{n\to\infty} \sum_{t_i,t_{i+1}\in\pi_n} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|^2 \ . \quad \square$$

Per a funcions contínues, es té que

$$V_{[a,b]}(f) := \lim_{n\to\infty} \sum_{t_i,t_{i+1}\in\pi_n} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \ ,$$

si $\{\pi\}_n$ és qualsevol successió refinant amb $\lim_{n\to\infty} \|\pi_n\| = 0$. Però això no és cert per a la variació quadràtica.

6.6.7 Proposició

Les trajectòries d'un procés de Wiener estàndard W tenen quasi segur variació quadràtica igual a la constant $b-a$ en tot interval $[a,b]$.

Pseudo-Demostració: La idea de la demostració d'aquest resultat és la següent:

1) Agafar una successió refinant $\{\pi_n\}_n$ de $[a,b]$ amb $\lim_{n\to\infty} \|\pi_n\| = 0$ i veure que

$$L^2\text{-}\lim_{n\to\infty} V^2_{[a,b],\pi_n}(W) = b-a \ .$$

2) Demostrar que

$$\text{q.s.-}\lim_{n\to\infty} V^2_{[a,b],\pi_n}(W)$$

existeix.

3) De 1) i 2) s'obté que el límit quasi segur de $V^2_{[a,b],\pi_n}(W)$ ha de ser $b-a$. $\square$

La manera eficient de demostrar la part 2) de la proposició anterior requereix aprofondir prèviament en la teoria de martingales, i no ho farem aquí. Ens limitarem a demostrar la part 1), amb una petita ampliació: Com és habitual quan es té convergència en L^2 (o simplement en probabilitat), si podem assegurar que la convergència es prou ràpida, s'obté també convergència quasi segura (via el Lema de Borel–Cantelli).

6.6.8 Proposició

Sigui W un procés de Wiener estándard. Sigui $\{\pi_n\}_n$ una successió refinant de particions de $[a,b]$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|\pi_n\| = 0$.
Aleshores

$$L^2\text{-}\lim_{n\to\infty} V^2_{[a,b],\pi_n}(W) = b-a \ .$$

Si, a més, es compleix $\sum_n \|\pi_n\| < \infty$, *aleshores*

$$q.s.\text{-}\lim_{n\to\infty} V^2_{[a,b],\pi_n}(W) = b - a\ .$$

Demostració: Simplificarem la notació posant

$$\begin{aligned}
\Delta_i &:= t_{i+1} - t_i \\
\dot W(\Delta_i) &:= W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \\
V_n^2 &:= V^2_{[a,b],\pi_n}(W) = \sum_{t_i,t_{i+1}\in\pi} \dot W(\Delta_i)^2\ .
\end{aligned}$$

Usant la independència d'increments del procés de Wiener i les propietats de la llei normal, tenim que

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[(V_n^2 - (b-a))^2] &= \sum_{i,j} \mathrm{E}\left[\dot W(\Delta_i)^2 \dot W(\Delta_j)^2\right] - 2(b-a)\sum_i \mathrm{E}\left[\dot W(\Delta_i)^2\right] + (b-a)^2 \\
&= \sum_{i\neq j} \Delta_i\Delta_j + 3\sum_i \Delta_i^2 - 2(b-a)\sum_i \Delta_i + (b-a)^2 \\
&= 3\sum_i \Delta_i^2 + \sum_{i\neq j}\Delta_i\Delta_j - \Big(\sum_i \Delta_i\Big)^2 + \Big(\sum_i \Delta_i - (b-a)\Big)^2 \\
&= 3\sum_i \Delta_i^2 - \sum_i \Delta_i^2 \\
&\leqslant 2\|\pi_n\| \sum_i \Delta_i \\
&= 2\|\pi_n\|(b-a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\ .
\end{aligned}$$

Suposem ara que $\|\pi\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Denotem $X_n = V_n^2 - (b-a)$. Acabem de veure que $\mathrm{E}[X_n^2] \leqslant 2\|\pi_n\|(b-a)$, per a tot n. Per al desigualtat de Txebixev, si posem $A_n := \{|X_n| > \varepsilon\}$,

$$P(A_n) \leqslant \frac{\mathrm{E}[X_n^2]}{\varepsilon^2} \leqslant \frac{2\|\pi_n\|(b-a)}{\varepsilon^2}, \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty\ .$$

Pel Lema de Borel–Cantelli, $P\big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_n^c\big) = 1$. És a dir, per a tot ω en aquest conjunt de probabilitat 1, existeix n tal que si $m \geqslant n$, es té $|X_n(\omega)| \leqslant \varepsilon$, i obtenim la convergència quasi segura. □

6.6.9 Observació

Si el procés de Wiener té variància σ^2, aleshores la variació quadràtica en $[a,b]$ és $\sigma^2(b-a)$. □

Ja hem raonat que les trajectòries del procés de Wiener han de ser quasi segur de variació no-acotada. Vegem com es pot deduir això de la Proposició 6.6.8.

6.6.10 Proposició

Les trajectòries d'un procés de Wiener estàndard W *tenen quasi segur variació no-acotada en tot interval no degenerat* $[a,b]$.

Demostració: En el conjunt $\{V_{[a,b]}(W) < \infty\}$, tindrem

$$\begin{aligned}
b - a &= \lim_{n\to\infty} \sum_{t_i,t_{i+1}\in\pi_n} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}|^2 \\
&\leqslant \lim_{n\to\infty} \sup_{t_i,t_{i+1}\in\pi_n} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}| \sum_{t_i,t_{i+1}\in\pi_n} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}| \\
&\leqslant V_{[a,b]}(W) \lim_{n\to\infty} \sup_{t_i,t_{i+1}\in\pi_n} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}| \\
&= 0\ , \quad \text{q.s.}
\end{aligned}$$

puix que les trajectòries de W són uniformement contínues en $[a,b]$, i la desigualtat és absurda. Per tant, el conjunt $\{V_{[a,b]}(W) < \infty\}$ té probabilitat zero.

A més, el conjunt de probabilitat zero on la variació sí és acotada, no depèn de l'interval $[a,b]$ escollit. En efecte, això és òbviament cert si ens restringim a intervals amb extrems racionals. Però qualsevol interval obert és unió numerable d'intervals d'aquesta mena. $\square$

7. Integració estocàstica elemental

En aquest capítol volem donar sentit a l'expressió

$$\int_a^b f(t)\,dZ_t\ , \tag{7.0.1}$$

on Z és un procés estocàstic amb increments ortogonals, i f és una funció d'un cert espai L^2 a precisar. Això és al que anomenarem la "integral estocàstica elemental". Un dels objectius principals del curs és estendre aquesta integral al cas en què f és també un procés estocàstic (encara que especificant més Z). La integral estocàstica elemental té interès independent en la teoria dels processos estacionaris, com veurem a l'Apartat 7.2.

La manera que sembla lògica i natural de definir l'expressió (7.0.1) seria: La integral estocàstica de f respecte el procés Z és la variable aleatòria

$$\Big[\int_a^b f(t)\,dZ_t\Big](\omega) := \int_a^b f(t)\,dZ_t(\omega)\ .$$

És a dir, per a cada trajectòria $Z(\omega)$ del procés Z, considerar la integral ordinària de f respecte $dZ(\omega)$. Això no funciona, perquè Z no té en general trajectòries de variació acotada, i no podriem integrar funcions f prou generals. A l'Apartat 7.1 recordem certes nocions de teoria de la integració que justifiquen el que acabem de dir.

7.1 Integració respecte mesures reals

Recordem algunes nocions de la teoria de la integració de Lebesgue: Una *mesura de Lebesgue–Stieljes* μ en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ és una mesura que dóna valor finit a cada interval acotat. Una *funció de distribució* és una funció no-decreixent contínua per la dreta. La relació entre mesures de Lebesgue–Stieljes i funcions de distribució és la següent:

Si μ és una mesura de Lebesgue–Stieljes, aleshores tota funció F complint

$$F(b) - F(a) = \mu(]a,b]) \tag{7.1.1}$$

és una funció de distribució. Si dues funcions de distribució satisfan (7.1.1), aleshores difereixen en una constant. Per tant, si imposem que $F(0) = 0$, per exemple, hi ha una única funció F complint (7.1.1).

Recíprocament, donada una funció de distribució F, la funció de conjunt $\mu(]a,b]) = F(b) - F(a)$ determina una mesura de Lebesgue-Stieljes en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$.

Si μ té funció de distribució F, de vegades s'escriu

$$\int_a^b f(t)\,dF(t) := \int_a^b f(t)\,\mu(dt)\ .$$

Una *mesura real* (o *mesura signada*) sobre $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ és una funció de conjunt $\mu: \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que per a tota família numerable $\{B_n\}_n$ de conjunts disjunts dos a dos, es té

$$\mu(\bigcup_n B_n) = \sum_n \mu(B_n) \ .$$

Tota mesura real μ es pot posar com a diferència de dues mesures positives λ i ν. Aquesta representació no és única: Si τ és una altra mesura positiva, aleshores

$$\mu = (\lambda + \tau) - (\nu + \tau) \ .$$

Però hi ha una representació minimal: S'obté posant

$$\lambda(A) = \sup_{B \subset A} \mu(B) \ ,$$

on B varia en la col·lecció de tots els borelians.

Les mesures λ i ν així definides s'anomenen la *variació positiva* i la *variació negativa* de μ, respectivament. La mesura $\rho = \lambda + \nu$ s'anomena la *variació total* de μ. Si f és ρ-integrable, aleshores es defineix la integral de f respecte de μ com

$$\int_a^b f(t)\,\mu(dt) := \int_a^b f(t)\,\lambda(dt) - \int_a^b f(t)\,\nu(dt) \ .$$

Sabem que la mesures λ i ν tenen associades funcions de distribució respectives F_λ i F_ν. Associem a μ la funció $F_\lambda - F_\nu$, que serà, per definició, la seva *funció de distribució* F_μ (serà contínua per la dreta, però no necessàriament creixent). Així, podem denotar

$$\int_a^b f(t)\,dF_\mu(t) := \int_a^b f(t)\,\mu(dt) - \int_a^b f^-(t)\,dF_\mu(t) \ .$$

Per altra banda, la diferència de dues funcions creixents és una funció de variació acotada, i recíprocament, tota funció de variació acotada és diferència de dues funcions creixents. D'aquí que, per a tota funció de variació acotada α, es pot definir la integral respecte $d\alpha$

$$\int_a^b f(t)\,d\alpha(t)$$

per a tota funció f que sigui integrable en $[a, b]$ respecte la variació total de α (si $\alpha = F_\lambda - F_\mu$, aleshores la variació total de α és $F_\lambda + F_\mu$, o equivalentment, la mesura positiva, $\rho = \lambda + \mu$).

L'espai $L^p([a, b], d\alpha)$ és el de les funcions de potència p integrable en $[a, b]$ respecte la variació total de α.

En definitiva, integrar respecte de funcions de variació acotada té sentit dins de la teoria clàssica de la integral. Si l'integrand no és de variació acotada, només podrem integrar funcions prou regulars, però no totes les que normalment interessa integrar.

7.2 Integral estocàstica respecte processos amb increments ortogonals

7.2.1 Proposició

Sigui $\{Z_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ *un procés amb increments ortogonals, continu per la dreta en* L^2 *(i.e.,* $\mathrm{E}[|Z_t - Z_s|^2] \to 0$ *quan* $t \searrow s$*.*

Aleshores existeix una funció de distribució F *tal que*

$$F(b) - F(a) = \mathrm{E}[|Z_b - Z_a|^2] \ , \quad 0 \leqslant a \leqslant b \ . \tag{7.2.1}$$

Demostració: Posem arbitràriament $F(t) = 0$, si $t < 0$, i definim $F(t) = \mathrm{E}[|Z_t - Z_0|^2]$, si $t \geqslant 0$.
Llavors, si $0 \leqslant s \leqslant t$,

$$F(t)-F(s) = \mathrm{E}[|Z_t-Z_0|^2]-\mathrm{E}[Z_s-Z_0|^2] = \mathrm{E}[|(Z_t-Z_s)+(Z_s-Z_0)|^2]-\mathrm{E}[|Z_s-Z_0|^2] = \mathrm{E}[|Z_t-Z_s|^2] ,$$

usant la propietat d'increments ortogonals. Això demostra (7.2.1). F és clarament no-decreixent i contínua per la dreta. □

Observem que Z és continu en L^2 en el punt t_0 si i només si la funció F és contínua en t_0.

Volem definir la integral de f respecte Z en $[a,b]$ per a tota funció f de l'espai $L^2([a,b],dF)$. Sigui $\mathcal{S} \subset L^2([a,b],dF)$ el conjunt de totes les funcions f de la forma

$$f(t) := \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{1}_{]t_{i-1},t_i]}(t) \ ,$$

$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ (funcions "esglaonades").
Per $f \in \mathcal{S}$ definim

$$\int_a^b f(t)\,dZ_t := \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot (Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}}) \ .$$

Aquesta definició és independent de la representació particular de la funció f (comprovació fàcil però avorrida).

7.2.2 Proposició
L'aplicació

$$\begin{aligned} I\colon \mathcal{S} \subset L^2([a,b],dF) &\longrightarrow L^2(\Omega,\mathfrak{F},P) \\ f &\longmapsto \int_a^b f(t)\,dZ_t \end{aligned}$$

té les propietats següents:

1) $I(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 I(f_1) + c_2 I(f_2)$.
2) $\mathrm{E}[I(f)] = 0$.
3) $\mathrm{E}\big[I(f)I(g)\big] = \int_a^b f(t)g(t)\,dF(t)$, *i, en particular, preserva la norma:* $\|I(f)\|_{L^2(\Omega)} = \|f\|_{L^2([a,b],dF)}$.

Demostració:
(1) Immediat.

(2) Surt del fet que Z és un procés centrat.

(3) Representem f i g respecte la mateixa partició:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{1}_{]t_{i-1},t_i]} \ ,$$
$$g(t) = \sum_{i=1}^{n} d_i \mathbf{1}_{]t_{i-1},t_i]} \ .$$

Llavors,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\big[I(f)I(g)\big] &= \mathrm{E}\Big[\sum_{i,j=1}^{n} c_i d_j (Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}})(Z_{t_j} - Z_{t_{j-1}})\Big] \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i d_i\, \mathrm{E}\big[(Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}})^2\big] = \sum_{i=1}^{n} c_i d_i \big[F(t_i) - F(t_{i-1})\big] \\ &= \int_a^b f(t)g(t)\,dF(t) \ . \end{aligned}$$ □

7.2.3 Proposició
El conjunt $\mathcal{S}$ és un subespai dens de $L^2([a,b],dF)$. $\square$

Sigui $f \in L^2([a,b],dF)$, i sigui $\{f_n\}_n \subset \mathcal{S}$ una successió convergent a f en $L^2([a,b],dF)$. Aquesta successió serà de Cauchy en $L^2([a,b],dF)$ i, per la propietat d'isometria (Proposició 7.2.3, 3), la seva imatge $\{I(f_n)\}_n$ serà de Cauchy en $L^2(\Omega)$, i per tant convergent.

7.2.4 Definició
En la situació anterior, es defineix la integral estocàstica de f respecte Z en $[a,b]$ com

$$\int_a^b f(t)\,dZ_t := \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dZ_t\ . \quad \square$$

Per tal que la definició tingui sentit, cal que sigui independent de la successió $\{f_n\}_n$ escollida. Es pot comprovar que ho és.

Hem definit doncs un operador

$$\begin{aligned} I\colon L^2([a,b],dF) &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ f &\longmapsto \int_a^b f(t)\,dZ_t \end{aligned}$$

7.2.5 Proposició
L'operador integral estocàstica I té les propietats 1), 2) i 3) de la Proposició 7.2.2

Demostració: Només cal veure que les esmentades propietats es conserven per pas al límit en $L^2([a,b],dF)$: La linealitat és òbvia; la convergència en L^p implica la convergència de les esperances; per últim, en tot espai de Hilbert, si $x_n \to x$ i $y_n \to y$, aleshores $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$. $\square$

Hom pot considerar l'integral estocàstica com un procés: Donats $f \in \bigcap_{t\in\mathbb{R}^+} L^2([0,t],dF)$, i Z el procés amb increments ortogonals que defineix F, podem considerar el *procés integral estocàstica*

$$\left\{Y_t := \int_0^t f(s)\,dZ_s,\ t \in \mathbb{R}^+\right\}\ .$$

7.2.6 Proposició
El procés integral estocàstica té increments ortogonals.

Demostració: En primer lloc, l'esperança de tota integral estocàstica és sempre zero. Per tant, el procés integral estocàstica és centrat. Clarament és de L^2, per construcció.

Finalment, siguin $t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant t_4$. Les variables aleatòries

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dZ_t \quad \text{i} \quad \int_{t_3}^{t_4} f(t)\,dZ_t$$

són independents perquè depenen dels increments de Z sobre intervals disjunts. Per tant, l'esperança del seu producte és igual al producte de les esperances, que és zero. $\square$

L'enunciat següent és una mena de Teorema de Radon-Nikodým per a la integral estocàstica.

7.2.7 Proposició
Sigui F la funció de distribució associada al procés amb increments ortogonals Z. Siguin $f \in \bigcap_{t\in\mathbb{R}^+} L^2([0,t],dF)$ i $Y_t := \int_0^t f(s)\,dZ_s$.

Aleshores, el procés amb increments ortogonals Y té funció de distribució associada $G(t) = \int_0^t f^2(s)\,dF_s$, i si $g \in L^2([0,t], dG)$ és té

$$\int_0^t g(s)\,dY_s = \int_0^t g(s)f(s)\,dZ_s\ , \quad q.s.$$

Demostració: En primer lloc,

$$G(t) = \int_0^t f(s)^2\,dF(s) = \mathrm{E}\Big[\Big(\int_0^t f(s)\,dZ_s\Big)^2\Big] = \mathrm{E}[|Y_t - Y_0|^2]\ ,$$

i per tant una funció de distribució associada al procés Y és aquesta G.

En segon lloc, l'expressió de la dreta té sentit: Si g és de L^2 respecte la mesura $dG(t) = f^2(t)\,dF(t)$ en $[0,t]$, aleshores $\int_0^t g(s)^2 f(s)^2\,dF(s) < \infty$, i resulta que $g(s)f(s)$ és de L^2 en $[0,t]$ respecte la mesura $dF(t)$.

Finalment, veiem la igualtat. Suposem primer que g és esglaonada: $g(t) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}$. Llavors,

$$\begin{aligned}\int_0^t g(s)\,dY_s &= \sum_{i=1}^n c_i \cdot (Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \cdot \Big(\int_{]t_{i-1},t_i]} f(s)\,dZ_s\Big) \\ &= \sum_{i=1}^n \Big(\int_{]t_{i-1},t_i]} g(s)f(s)\,dZ_s\Big) = \int_{[0,t]} g(s)f(s)\,dZ_s\ .\end{aligned}$$

En general, si $\{g_m\}_m$ és una successió de funcions esglaonades que convergeix a g en $L^2([0,t], dG)$, aleshores

$$\int_0^t g(s)\,dY_s = L^2\text{-}\lim_{m\to\infty} \int_0^t g_m(s)\,dY_s = L^2\text{-}\lim_{m\to\infty} \int_0^t g_m(s)f(s)\,dZ_s\ ,$$

que és igual a

$$\int_0^t g(s)f(s)\,dZ_s$$

perquè $\{g_m \cdot f\}_m$ convergeix a $g \cdot f$ en $L^2([0,t], dF)$. $\square$

7.2.8 Observacions

1) Tot el que hem fet en aquest apartat val exactament igual per processos on l'espai de paràmetres és qualsevol interval, infinit o no, de la recta real. Per exemple, si $\{Z_t,\ t \in \mathbb{R}\}$ és un procés amb increments ortogonals, defineix una mesura sobre $\mathbb{R}$ amb funció de distribució

$$F(t) = \begin{cases} \mathrm{E}\left[(Z_t - Z_0)^2\right], & \text{si } t \geqslant 0, \\ -\mathrm{E}\left[(Z_0 - Z_t)^2\right], & \text{si } t \leqslant 0, \end{cases}$$

(en lloc de Z_0 es pot posar qualsevol Z_{t_0}), i tot el que hem fet segueix essent vàlid.

2) Excepte en la última demostració, no hem anat massa en compte al escriure els límits d'integració. Recordem que si α és una funció de variació acotada, però no necessàriament contínua, no és el mateix integrar sobre un interval $[a,b]$ que sobre un interval $]a,b[$. De fet, hi ha quatre possibilitats:

$$\int_{]a,b]} d\alpha(t) = \alpha(b) - \alpha(a)$$
$$\int_{[a,b]} d\alpha(t) = \alpha(b) - \alpha(a^-)$$
$$\int_{]a,b[} d\alpha(t) = \alpha(b^-) - \alpha(a)$$
$$\int_{[a,b[} d\alpha(t) = \alpha(b^-) - \alpha(a^-)\ .$$

Per tant, quan hem escrit $\int_a^b$ ens referiem exactament a $\int_{]a,b]}$.

De tota manera, per a la integral estocàstica respecte a processos Z definits en $\mathbb{R}^+$ i continus per la dreta, es té

$$\int_{]0,t]} f(t)\, dZ_t = \int_{[0,t]} f(t)\, dZ_t\ .$$

Per què? □

7.3 Aplicació als processos estacionaris en sentit ampli

Per comoditat, considerarem en aquest apartat processos definits en tota la recta real ($t \in \mathbb{R}$).

7.3.1 Definició

Una funció $k\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diu que és definida no-negativa si $\forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ i per a tots $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, es té

$$\sum_{i,j=1}^{n} k(t_i, t_j) z_i \bar{z}_j \geqslant 0\ . \quad \square$$

Tota funció de covariància d'un procés de L^2 és definida no-negativa, i tota funció definida no-negativa és la funció de covariància d'un procés de L^2.

Recordem que per als processos estacionaris en sentit ampli X la funció de covariància $k(t,s)$ depèn només de la diferència $t-s$. Podem considerar-la doncs com una funció d'una sola variable $k(t) = \mathrm{Cov}[X_t, X_0]$. Aquesta funció és *definida no-negativa,* en el sentit que

$$\sum_{i,j=1}^{n} k(t_i - t_j) z_i \bar{z}_j \geqslant 0\ , \quad \square$$

per a tots $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^+$ i tots $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.

7.3.2 Teorema de Bochner-Khinxin

Una condició necessària i suficient per tal que una funció $k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sigui definida no-negativa és que existeixi una funció de distribució F tal que

$$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dF(\lambda) \ . \quad \square$$

La funció F s'anomena *funció espectral.* Si té densitat, de manera que podem escriure

$$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} f(\lambda)\, d\lambda \ ,$$

aleshores f és la densitat espectral.

El teorema de Bochner–Khinxin és un teorema de "representació espectral" de funcions de covariància. A partir d'ell es pot demostrar una representació espectral per als propis processos estacionaris.

7.3.3 Teorema

Sigui $\{X_t,\ t \in \mathbb{R}\}$ un procés estacionari en sentit ampli, centrat, amb funció de covariància k, que es pot escriure com

$$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dF(\lambda) \ ,$$

per certa funció de distribució F.
Aleshores, existeix un procés $\{Z_\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, amb increments ortogonals i

$$\mathrm{E}[(Z_{\lambda_1} - Z_{\lambda_2})^2] = F(\lambda_2) - F(\lambda_1) \ ,$$

i tal que

$$X_t = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda}\, dZ(\lambda) \ .$$

El procés Z és únic llevat de constant additiva i indistingibilitat. $\square$

8. El moviment brownià

Aquest capítol és de lectura opcional dins el curs. Parlem aquí del fenomen físic conegut com a "moviment brownià" i la seva modelització matemàtica, i motivem les "equacions diferencials estocàstiques" com a eina matemàtica per a l'estudi de l'evolució de sistemes sota la influència de l'atzar.

Referències que es fan en el text:

[Yeh]: *Stochastic processes and the Wiener integral,* Marcel Dekker, 1973.

[Einstein]: *Über die von molekular-kinetischen Theorie der Wärme gefoderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen,* Annalen der Physik, 17, 1905.

[Nelson]: *Dynamical theories of Brownian motion,* Princeton University Press, 1967.

[Jou]: *Mecànica estadística i biologia molecular,* Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, 1989.

[Fürth]: *Investigations on the theory of the Brownian movement, by Albert Einstein,* Dover, 1956.

[Wax]: *Selected papers on noise and stochastic processes,* Dover, 1954.

[Alabert–Delgado]: *Una presentació de les equacions diferencials estocàstiques,* Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques, 10, 1995.

8.1 Plantejament del problema

Considereu una petita partícula (de diàmetre, posem, 1 micra) en suspensió dins un fluid. A través d'un microscopi hom pot observar que la partícula es mou de manera molt ràpida i irregular en totes direccions, i que aquest moviment no s'atura mai. Quan el fenomen va ser descrit per primera vegada a principis del segle passat, diverses teories (equivocades) sorgiren per explicar-ne les causes. Avui dia, amb l'existència dels àtoms fermament establerta, sabem que aquests moviments "caòtics" són deguts al bombardeig intensiu de la partícula per part de les molècules del fluid que l'envolta. Sota condicions normals de pressió i temperatura, la partícula suporta de l'ordre de 10^{21} col·lisions moleculars per segon, cadascuna amb la seva pròpia direcció i energia. Malgrat que cada col·lisió individual té un efecte inapreciable (les molècules són encara molt més petites que la partícula) la superposició d'un tal nombre de xocs sí produeix un efecte observable.

És obvi que el càlcul diferencial clàssic pot ajudar ben poc a l'estudi d'aquesta situació. Què es pot fer doncs per resoldre (almenys parcialment) el problema?

Per simplicitat, suposem que cap altre camp de forces, com podria ser la gravetat, interactua amb el sistema que acabem de descriure, i normalitzem a 1 la massa de la partícula. Només hi ha aleshores dos origens de forces a considerar: Per una banda, la fricció dinàmica sistemàtica soferta per la partícula en les seves traslacions, i per l'altra, les col·lisions moleculars irregulars, negligibles individualment però amb efecte macroscòpic apreciable.

Si oblidem per un moment aquesta última font de moviment, i notem per $v(t)$ la velocitat a l'instant t, la segona llei de Newton ens porta immediatament a l'equació diferencial de primer ordre

$$\begin{cases} \dfrac{dv(t)}{dt} = -\beta \cdot v(t) \\ v(0) = v_0 \end{cases} , \qquad (8.1.1)$$

on la constant β es determina per a partícules esfèriques mitjançant la primera llei de Stokes: $\beta = 6\pi r\eta$, essent r el radi de la partícula i η el coeficient dinàmic de viscositat del fluid (per partícules no esfèriques cal canviar el factor 6π per un altre adequat).

Considerem la versió integral de l'equació (8.1.1):

$$\begin{cases} v(t+\Delta t) - v(t) = -\beta \displaystyle\int_t^{t+\Delta t} v(s)\, ds \\ v(0) = v_0 \end{cases} . \qquad (8.1.2)$$

Notem per $M(t)$ l'increment de moment net guanyat per la partícula degut a la segona font de forces esmentada durant l'interval temporal $[0, t]$. Tenint en compte aquesta funció, (8.1.2) canvia clarament a

$$\begin{cases} v(t+\Delta t) - v(t) = -\beta \displaystyle\int_t^{t+\Delta t} v(s)\, ds + M(t+\Delta t) - M(t) \\ v(0) = v_0 \end{cases} . \qquad (8.1.3)$$

$M(t)$ és una funció desconeguda, però si acceptem certes hipòtesis físiques sobre les forces que representa, aquestes es traduiran en propietats matemàtiques (probabilístiques) de M. Concretament, suposem:

1) Les condicions de l'entorn (tals com pressió, temperatura, ...) són constants en el temps.
2) El bombardeig sofert per la partícula durant un interval de temps donat és independent de (això és, no té relació física amb) el sofert en intervals de temps anteriors.
3) L'acceleració total fins a l'instant t canvia contínuament respecte de t.

Veurem a l'Apartat 8.2 com es pot construir un model matemàtic que representi aquestes condicions. Deixant de banda la qüestió de si 1, 2 i 3 són prou adequades al sistema que hem descrit (això pot ser tema de molta discussió, especialment 2), el fet és que el model que s'en deduirà produeix resultats que s'ajusten força bé a les observacions empíriques.

8.2 Construcció del model matemàtic

Comencem establint algunes relacions entre les propietats de continuïtat, independència d'increments, estacionarietat i gaussianitat d'un procés estocàstic.

8.2.1 Proposició

Sigui $X \equiv \{X_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ un procés estocàstic continu i amb increments independents del passat. Aleshores, existeixen una funció contínua $m\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ i una funció contínua no-decreixent $v\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ tals que $\forall s, t \in \mathbb{R}^+,\ s < t$, la variable aleatòria $X_t - X_s$ és gaussiana amb

$$\mathrm{E}[X_t - X_s] = m(t) - m(s), \quad \mathrm{Var}[X_t - X_s] = v(t) - v(s) . \qquad (8.2.1)$$

Si, a més, X té increments estacionaris, aleshores aleshores m i v satisfan

$$m(t) - m(s) = \mu \cdot (t - s)$$
$$v(t) - v(s) = \sigma^2 \cdot (t - s)$$

per certes constants $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$.
μ i σ^2 s'anomenen coeficient de deriva i coeficient de difusió respectivament.

Demostració: Vegeu en [Yeh], pàg. 202 i 255 una demostració molt detallada. □

El recíproc és cert, en el sentit que donades les funcions m contínua i v contínua no-decreixent, existeix un procés continu amb increments independents X satisfent les igualtats (8.2.1).

8.2.2 Observacions

1) Sota les hipòtesis de continuïtat i increments independents del passat, si a més X_0 és una variable gaussiana, llavors $\{X_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ és un procés gaussià. (Per la proposició anterior, els increments són gaussians, i al ser independents es dedueix que la llei de tot vector finit dimensional és gaussiana, per canvi de variable.)
2) Suposem que $X \equiv \{X_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ és un procés continu amb increments estacionaris i independents del passat, amb $X_0 = x$ q.s. i amb coeficient de deriva $\mu = 0$.
   En aquest situació, la llei de X serà gaussiana i $X_t - X_s \sim N(0, \sigma^2(t-s))$. Per tant, es tracta (vegeu el Capítol 5) d'un procés de Wiener de variància σ^2 començant en x. Si no imposem que el coeficient de deriva sigui zero, es diu que tenim un *procés de Wiener amb deriva* μ.
3) Finalment, si X és continu, amb increments estacionaris i independents del passat, $X_0 = 0$ q.s. i $\mu = 0$, podrem escriure $X = \sigma W$, on W és un procés de Wiener standard començant en 0.

□

Podem donar ara una versió matemàtica precisa de les hipòtesis físiques sobre la funció $M(t)$ de l'Apartat 8.1. Imaginarem, per simplificar, que el problema és unidimensional (la partícula es mou sobre una recta). De fet, serà evident de seguida que el problema real es pot estudiar coordenada per coordenada.

Primer de tot, ens hem referit a $M(t)$ com una "funció desconeguda". Per tant, es pot pensar de manera natural com un procés estocàstic $\{M_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ definit en algun espai de probabilitat $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. El fet que les causes de les forces resumides en M_t són invariants en el temps (condició 1) es modela imposant que la llei de $M_t - M_s$ depengui només de la diferència $t - s$. En altres paraules, el procés $\{M_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ ha de tenir *increments estacionaris*. La incorrelació física entre les forces que actuen en un interval donat i les que han actuat prèviament (condició 2) significa que el procés ha de tenir *increments independents del passat*. Finalment, la condició 3 de continuïtat simplement es tradueix en què $\{M_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ és un *procés continu*. Podem a més imposar arbitràriament $M_0 = 0$ quan comencem a comptar el temps. Segons la Proposició 8.2.1 i les Observacions 8.2.2 (1 i 2), en aquesta situació el procés ha de ser gaussià amb $\mathrm{E}[M_t] = \mu t$ i $\mathrm{Var}[M_t] = \sigma^2 t$. La isotropia del medi en què es mou la partícula (no hi ha cap direcció privilegiada per les forces provinents dels xocs moleculars) la representem posant coeficient de deriva $\mu = 0$.

Segons la Observació 8.2.2 (3), concloem que $M_t = \sigma W_t$, essent W un procés de Wiener standard començant en 0. Sobre el valor concret de σ hi tornarem a l'Apartat 8.3.

Sabem que les trajectòries del procés de Wiener (i per tant també les de M_t) són no-derivables en cap punt. Per tant, és clar que a l'equació (8.1.3) no podem dividir per Δt i prendre $\lim_{\Delta t \to 0}$ per arribar a una equació diferencial ordinària, parametritzada per ω. Hem de quedar-nos amb la forma integral

$$v_t = v_0 - \beta \int_0^t v_s\, ds + \sigma W_t\ . \tag{8.2.2}$$

L'equació (8.2.2), malgrat tot, es pot resoldre derivant-la formalment i aplicant tècniques elementals d'equacions diferencials ordinàries. La solució que s'obté,

$$v_t = e^{-\beta t}\Big(v_0 + \sigma \int_0^t \dot{W}_s e^{\beta s}\, ds\Big)\ ,$$

pot expressar-se, després d'integrar per parts, com

$$v_t = v_0 e^{-\beta t} + \sigma W_t - \sigma\beta \int_0^t W_s e^{-\beta(t-s)}\, ds\ , \tag{8.2.3}$$

que torna a tenir sentit rigorós i es pot comprovar directament que satisfà (8.2.2). A partir de la velocitat trobem aleshores la funció que ens dóna la posició de la partícula browniana en cada instant:

$$x_t = x_0 + \int_0^t \Big[v_0 e^{-\beta s} + \sigma W_s - \sigma\beta \int_0^s W_r e^{-\beta(s-r)}\, dr \Big]\, ds \ . \tag{8.2.4}$$

Els processos $\{x_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ i $\{v_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ reben el nom de *procés de posició* i *procés de velocitat* d'Ornstein–Uhlenbeck (vegeu el Capítol 2). No obstant, l'equació (8.2.2) fou ja plantejada per Langevin el 1908, i es coneix amb el seu nom. Les fórmules (8.2.3) i (8.2.4) donen explícitament les trajectòries de x i v en funció de les de W, i a partir d'elles podem calcular la llei d'aquests processos, que és en realitat la informació útil que busquem. Els processos x i v resulten ser gaussians amb

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}[v_t] = v_0 e^{-\beta t} \\
&\mathrm{Cov}[v_t, v_s] = \frac{\sigma^2}{2\beta}\big(e^{2\beta(t\wedge s)} - 1\big) e^{-\beta(t+s)} \\
&\mathrm{E}[x_t] = x_0 + \frac{v_0}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) \\
&\mathrm{Cov}[x_t, x_s] = \frac{\sigma^2}{\beta^2}(s \wedge t) + \frac{\sigma^2}{2\beta^3}\Big(-e^{-\beta(t+s)} - e^{-\beta|t-s|} + 2(e^{-\beta s} + e^{-\beta t} - 1)\Big) \ .
\end{aligned}$$

Hem pogut resoldre l'equació (8.2.2) sense usar res més que els trucs habituals del càlcul, però es tracta de fet d'un cas molt particular. La hipòtesi d'isotropia del medi en l'espai i en el temps ens ha portat a una expressió molt senzilla del procés $\{M_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ en termes del procés de Wiener. El punt clau és que, encara que no tingui sentit parlar del diferencial dW_t per a cap trajectòria, en canvi sí es pot donar un sentit evident a l'expressió $\int_0^t dW_s$. Només cal definir aquest símbol com $W_t - W_0$, que no és més que el valor que s'obté mitjançant sumes de Riemann. En general, si f_t és una funció (o un procés) de variació fitada, i tenint en compte que W és continu, hom pot definir

$$\int_0^t f_s dW_s$$

mitjançant sumes de Riemann per a cada valor del paràmetre ω i el resultat coincideix amb el que s'obtindria integrant formalment per parts:

$$f_t W_t - f_0 W_0 - \int_0^t W_s df_s \ ,$$

on l'última integral té sentit com a integral de Riemann–Stieljes clàssica.

En situacions més generals pot passar molt bé que la influència d'una pertorbació externa a un sistema depengui del temps i de l'estat del sistema a cada instant. Si la magnitud de la pertorbació durant un interval de temps $[s, t]$ ve donada per l'increment $M(t) - M(s)$ d'una funció M, freqüentment es pot modelar el sistema resultant mitjançant una equació diferencial del tipus

$$dx(t) = f(t, x(t))\, dt + \sigma(t, x(t))\, dM(t) \ , \tag{8.2.5}$$

on $dx(t) = f(t, x(t))dt$ és l'equació corresponent al sistema sense pertorbar i g és una funció que representa la "sensitivitat" del sistema a la pertorbació M.

Si M és coneguda i prou regular la situació no té més complicacions que les habituals. Però si M representa una pertorbació de magnitud desconeguda governada per certes lleis de probabilitat (i per tant estem tractant amb un procés, i no pas amb una sola funció), la situació esdevé diferent. La solució de (8.2.5) serà aleshores també un procés estocàstic i l'interès girarà cap a l'estudi de la llei del procés solució, ja que el valor puntual $x(t)$ ha deixat de ser abastable. Aquesta situació apareix en forces aplicacions de la física i d'altres camps diversos.

La dificultat fonamental en aquests casos, quan M és un procés de Wiener, o qualsevol altre amb trajectòries igualment irregulars, rau en el fet que l'expressió (8.2.5) no té sentit, ni tan sols si s'escriu en forma integral

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(s, x_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, x_s)\, dW_s \ , \tag{8.2.6}$$

llevat que σ sigui tan regular que suavitzi les irregularitats que x_t hereda de W_t, com era el cas de la partícula browniana (σ constant).

Cal doncs donar un sentit al símbol

$$\int_0^t \sigma(s, x_s)\, dW_s \tag{8.2.7}$$

de forma que es pugui interpretar com l'aportació total de la pertorbació aleatòria a l'estat del sistema en l'interval $[0, t]$.

La definició de (8.2.7) donarà sentit a l'equació (8.2.6), que al seu torn s'escriu habitualment (per conveni) com

$$dx_t = f(t, x_t)\, dt + \sigma(t, x_t)\, dW_t \ . \tag{8.2.8}$$

En tal situació diem que tenim una *equació diferencial estocàstica*. (Aquesta terminologia és deguda a Bernštein, 1934). L'equació de Langevin (8.2.2) es pot expressar amb aquest formalisme com

$$dv_t = -\beta v_t\, dt + \sigma\, dW_t \ . \tag{8.2.9}$$

8.3 Formulació completa de l'equació de Langevin

Fem aquí una petita digressió històrica: Els moviments erràtics de partícules petites en un fluid foren estudiats per primer cop pel botànic anglès Robert Brown al voltant de 1827 (sembla haver-hi també un treball anterior del neerlandès Jan Ingenhousz, cap al 1785). Des d'aleshores, aquest fenomen ha estat conegut amb el nom de *moviment brownià*. La primera descripció matemàtica del moviment brownià fou presentada per Albert Einstein [Einstein] el 1905 (vegeu [Nelson] per a un breu resum de la història del tema), qui proposà el procés de Wiener com a model matemàtic per a les trajectòries de les partícules. Per cert, Einstein diu que no coneixia el treball de Brown; ell deduí l'existència de moviments observables de les petites partícules a través de raonaments purament teòrics, com a conseqüència de la teoria atòmica. Avui dia, "moviment brownià" i "procés de Wiener" s'usen com a sinònims.

Més tard, però, el model d'Einstein va ser millorat per Ornstein i Uhlenbeck, els quals feren intervenir el procés de Wiener en el seu model però no directament com a versió matemàtica del Moviment Brownià. Per evitar confusions, sembla millor usar el nom de procés de Wiener per l'objecte matemàtic, i el de moviment brownià per al fenomen físic.

El procés de Wiener té trajectòries de variació total infinita en tot interval. Aquesta propietat, que per a la partícula browniana implicaria recòrrer camins de longitud infinita en temps finit, estimulà l'abandó del model d'Einstein.

El procés de Wiener fou estudiat per primer cop amb rigor per Norbert Wiener, en una sèrie de treballs entre 1923 i 1934, i d'aquí el seu nom. Wiener es beneficià dels recents avenços en teoria de la mesura portats a terme per Émile Borel, Henri Lebesgue i J. P. Daniell, per tal de fer una construcció del procés a partir de l'espai de trajectòries. Einstein, encara sense aquestes eines, deduí en els seus treballs sobre moviment brownià, a partir de certes hipòtesis físiques (més aviat vagament formulades), que la llei de probabilitat que segueix a l'instant t la posició de la partícula browniana que parteix en $t = 0$ de l'origen de coordenades té una densitat $f(t, x)$ que ha de satisfer l'equació

$$\frac{\partial f}{dt} = D\Delta f \ , \tag{8.3.1}$$

on Δ és l'operador de Laplace i D és una constant. A aquesta conclusió havia arribat també abans (1900) Louis Bachelier, encara que el seu treball va passar més aviat desapercebut a l'època. (8.3.1) no és més que l'*equació de la difusió*, ja coneguda en temps de Einstein. La difusió és un fenomen físic que consisteix en el fet que un conjunt de partícules dissoltes en un fluid tendeixen a desplaçar-se de les zones de més concentració a les zones de menys concentració, com ara una gota de tinta en un cubell d'aigua, que es va escampant i perdent color, fins a desaparèixer. En la interpretació original, $f(t,x)$ és la concentració de partícules. (Vegeu [Jou], capítols 3 i 4, per a una exposició planera dels fenòmens de sedimentació i difusió i la seva relació amb el moviment brownià.) D és una constant dependent del medi que s'anomena *coeficient de difusió*. Einstein descobrí també la senzilla relació entre el coeficient de difusió i el de fricció β:

$$D = \frac{kT}{\beta}$$

on k és la constant de Boltzmann i T la temperatura absoluta.

La solució fonamental de l'equació (8.3.1) és (en $\mathbb{R}^3$)

$$f(t,x) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} \exp\left\{\frac{-|x|^2}{4Dt}\right\}$$

Aquesta densitat essencialment caracteritza al procés de Wiener (el Procés de Wiener en $\mathbb{R}^3$ té per coordenades processos de Wiener reals independents). Més precisament, és la densitat de $X_t = \sqrt{2D}W_t$, on W és un procés de Wiener estàndard (tridimensional). Això justifica el nom de coeficient de difusió per a la constant σ^2 en la Proposició 8.2.1. (En realitat, surt $\sigma^2 = 2D$. Si es vol que el 2 no aparegui, cal canviar D per $D/2$ en l'equació (8.3.1). Això no té cap importància.)

Els diversos articles d'Einstein sobre el moviment brownià estan recollits en el llibre [Furth]. Els articles clàssics posteriors de Uhlenbeck i Ornstein, Chandrasekar, Wang i Uhlenbeck, i Doob, es troben reunits també en forma de llibre [Wax].

Tornem a l'equació de Langevin, l'equació que regeix la velocitat de la partícula browniana de l'Apartat 8.1. Hem començant formulant unes certes hipòtesis físiques de tipus microscòpic (de comportament mecànic molecular) amb la idea que a partir d'elles es puguin predir de forma teòrica els comportaments macroscòpics observables. Això ens ha portat a l'equació "física" (8.1.3). Posteriorment, hem vist les eines matemàtiques que possibiliten de formular un model amb ple sentit matemàtic, (8.2.2), que podem expressar també amb el formalisme de les equacions diferencials estocàstiques (8.2.8) com

$$dv_t = -\beta v_t + \sigma\, dW_t \ .$$

L'únic element d'aquesta equació que no ens han permès determinar les hipòtesis inicials és el coeficient σ. Deduïrem què val σ en termes de constants físiques fent ús d'una important llei de mecànica estadística.

De la fórmula per $\mathrm{Cov}[v_t, v_s]$ de l'Apartat 8.2, deduïm que $\mathrm{Var}[v_t] = \frac{\sigma^2}{2\beta}\big(1 - e^{-2\beta t}\big)$, i per tant, fent $t \to \infty$, obtenim una variància límit de $\frac{\sigma^2}{2\beta}$, sigui quina sigui la velocitat inicial v_0. Anàlogament, s'observa que $\lim_{t\to\infty} \mathrm{E}[v_t] = 0$. La llei d'equirepartició de l'energia en mecànica estadística afirma que l'energia cinètica mitjana d'un sistema de partícules (molècules d'un fluid) en estat d'equilibri termodinàmic ha de valer $\frac{1}{2}kT$ per grau de llibertat del sistema. La partícula immergida en el fluid ha de compartir aquesta mateixa energia mitjana. L'esperança de l'energia cinètica es pot calcular doncs com $\mathrm{E}[\frac{1}{2}v^2] = \dfrac{\sigma^2}{4\beta}$ (on v representa la velocitat límit i seguim fent el conveni que la massa de la partícula val 1), i obtenim per tant la igualtat

$$\frac{\sigma^2}{4\beta} = \frac{kT}{2} \ .$$

Deduïm que, en el cas de dimensió 1, σ^2 és, en termes dels coeficients de fricció i de difusió,

$$\sigma^2 = 2\beta^2 D \ .$$

L'equació de Langevin es pot expressar doncs

$$dv_t = -\beta v_t + \beta\sqrt{2D}\, dW_t \ ,$$

i queda completa la seva formulació. La nova hipòtesi que hem introduit per poder determinar σ és que el sistema de molècules verifica l'equació tèrmica dels gasos ideals

$$pV = nkT \ ,$$

que és d'on es dedueix la llei d'equirepartició. Aquí p és la pressió, V el volum i n el nombre total de molècules.

Remetem als comentaris finals de [Alabert-Delgado] per altres referències històriques i bibliogràfiques sobre integrals i equacions diferencials estocàstiques.

8.4 El raonament d'Einstein

La primera explicació mínimament satisfactòria del moviment brownià va ser donada per Einstein (1905) i també independentment per Marian von Smoluchowski (1906), qui va treballar més en el tema tant des del punt de vista teòric com experimental. La modelació del moviment brownià com a procés de Wiener es coneix com el *model d'Einstein–Smoluchowski*.

El raonament que va fer Einstein és com segueix (no hi ha massa rigor matemàtic, però les idees són bones):

Se suposa que cada partícula individual executa un moviment que és independent dels moviments de les demés partícules. Se suposa també que els moviments d'una determinada partícula en intervals diferents de temps són processos físics independents, sempre que aquests intervals "no s'agafin massa petits".

Introduïm un interval temporal τ, molt petit comparat amb els intervals temporals observables, però encara prou gran per tal que en dos intervals τ successius, els moviments executats puguin pensar-se com independents l'un de l'altre.

Sigui N el nombre total de partícules en suspensió en un líquid. En un interval temporal τ, les coordenades X de les partícules individuals s'incrementaran en una quantitat Δ, on, per a cada partícula, Δ tindrà un valor diferent (positiu o negatiu). Δ seguirà una certa "llei de freqüències"; la quantitat dN de partícules que experimentaran un desplaçament que està entre Δ i $\Delta + d\Delta$ serà expressable com

$$dN = N\phi(\Delta)\, d\Delta \ ,$$

on

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\Delta)\, d\Delta = 1 \ ,$$

i ϕ és diferent de zero només per valors molt petits de Δ, i satisfà

$$\phi(\Delta) = \phi(-\Delta) \ .$$

Ens restringirem al cas en què la quantitat ν de partícules per unitat de volum depèn només de la coordenada x i el temps t. Sigui $\nu = f(x,t)$ la quantitat de partícules per unitat de volum.

Calcularem la distribució de les partícules a l'instant $t+\tau$ a partir de la distribució a l'instant t. La quantitat de partícules que a l'instant $t+\tau$ es trobaran entre els dos plans perpendiculars a l'eix X que passen pels punts x i $x+dx$ serà

$$f(x, t+\tau)\, dx = dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+\Delta, t)\phi(\Delta)\, d\Delta \ . \tag{8.4.1}$$

Com τ és molt petit, podem posar

$$f(x, t+\tau) = f(x,t) + \tau \frac{df}{dt}(x,t) \ .$$

Per altra banda, desenvolupem $f(x+\Delta,t)$ en potències de Δ:

$$f(x+\Delta,t)=f(x,t)+\Delta\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}+\frac{\Delta^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}+\cdots$$

Podem usar aquesta sèrie per fer la integral de (8.4.1), perquè només ens interessen valor petits de Δ. Obtenim

$$f+\tau\frac{df}{dt}=f\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\Delta)\,d\Delta+\frac{\partial f}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty}\Delta\phi(\Delta)\,d\Delta+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta^2}{2}\phi(\Delta)\,d\Delta+\cdots \tag{8.4.2}$$

Per la simetria de ϕ, els termes segon, quart, etc, de la dreta s'anul·len. Entre els altres, cada terme és molt petit comparat amb l'anterior. Ens quedarem només amb el primer i el tercer. El primer és f. Introduïm la constant

$$D:=\frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Delta^2}{2}\phi(\Delta)\,d\Delta\ .$$

Ens queda:

$$\frac{df}{dt}=D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\ , \tag{8.4.3}$$

l'equació de la difusió. La solució és, suposant que fem difusió de N partícules a partir de l'origen, menyspreant la interacció entre elles,

$$f(x,t)=\frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp -|x|^2/4Dt\ . \tag{8.4.4}$$

A partir d'aquí, es pot calcular el desplaçament en la direcció de l'eix X que una partícula experimenta "en mitjana", o dit més pròpiament, l'arrel quadrada de la mitjana del quadrat del desplaçament. És

$$\sqrt{2Dt}\ . \tag{8.4.5}$$

El raonament d'Einstein es basa en una suposició de temps discrets $0,\tau,2\tau,3\tau,\dots$, els únics en què la partícula pot rebre impactes, i l'equació (8.4.3) resultant i la seva solució (8.4.4) s'han d'entendre com aproximacions, quan τ es fa tan petit que el temps pot considerar-se continu.

El raonament d'Einstein conté en forma embrionària alguns elements que s'han desenvolupat més tard amb més generalitat i rigor. Per exemple:

i) L'equació (8.4.1) estableix que la probabilitat que la partícula estigui en el punt x a l'instant $t+\tau$ ve donada per la suma de la probabilitat de tots els possibles desplaçaments Δ des de les posicions $x+\Delta$ multiplicats per la probabilitat d'estar en $x+\Delta$ a l'instant t. Això pressuposa que hi ha una independència de Δ de l'història prèvia del moviment. Això és la propietat de Markov, i (8.4.1) és una forma particular de l'equació de Chapman–Kolmogorov, que és l'equació central que governa la dinàmica de l'evolució de les lleis d'un procés de Markov.

ii) L'equació (8.4.3) és un cas particular d'equació de Fokker-Planck (o Kolmogorov forward) que descriu l'evolució de la llei de certs processos estocàstics a temps continu. La trajectòria X_t de la partícula serà aleatòria, però una funció contínua del temps. Això ens porta a pensar si no seria possible estudiar directament l'evolució de les trajectòries amb eines probabilístiques a partir d'algun tipus "d'equació diferencial" aleatòria per les trajectòries.

iii) El pas del procés discret al procés continu té a veure amb el tema *d'aproximació per difusions.*

8.5 El raonament de Langevin

Langevin afirma que el seu mètode és "infinitament més simple" que el d'Einstein.

De consideracions de mecànica estadística, l'energia cinètica mitjana de la partícula browniana, en estat d'equilibri termodinàmic, ha de ser

$$\mathrm{E}[\frac{1}{2}v^2] = \frac{1}{2}kT \ , \tag{8.5.1}$$

on k és la constant de Boltzmann i T la temperatura absoluta, i suposem que la massa és 1, i que estem en dimensió 1.

Dues forces actuen sobre la partícula:

i) Força de fricció, que se suposa que segueix la mateixa fórmula que en hidrodinàmica macroscòpica,

$$-6\pi r\eta \frac{dx}{dt} \quad ,$$

on η és la viscositat i r el diàmetre de la partícula, que se suposa esfèrica.

ii) Força fluctuant X representant els impactes moleculars de l'entorn. Només sabem sobre ella que "pot ser positiva o negativa amb igual probabilitat".

Segons la segona llei de Newton,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -6\pi r\eta \frac{dx}{dt} + X \ .$$

Multiplicant per x,

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(x^2) - \Big(\frac{d}{dt}x\Big)^2 = -3\pi r\eta \frac{d}{dt}(x^2) + Xx \ .$$

Fent la mitjana per un gran nombre de diferents partícules,

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{E}[x^2] - \mathrm{E}\Big[\Big(\frac{d}{dt}x\Big)^2\Big] = -3\pi r\eta \frac{d}{dt}\,\mathrm{E}[x^2] \ ,$$

on $\mathrm{E}[Xx] = 0$, degut, diu Langevin, "a la irregularitat de la quantitat X". Usant (8.5.1),

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{E}[x^2] + 3\pi r\eta \frac{d}{dt}\,\mathrm{E}[x^2] = kT \ .$$

Integrand una vegada aquesta equació diferencial obtenim

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{E}[x^2] = \frac{kT}{3\pi r\eta} + C\exp\{-6\pi r\eta t\} \ ,$$

on C és una constant.

Langevin estimà que l'exponencial s'aproxima a zero ràpidament en 10^{-8} segons; a efectes pràctics, almenys en aquell temps, podem dir que instantàniament. Podem menysprear aquest terme, i integrant un altre cop,

$$\mathrm{E}[x^2] - \mathrm{E}[x^2(0)] = \frac{kT}{3\pi r\eta}t \ ,$$

i això és exactament (8.4.5), si identifiquem $D = \frac{kT}{6\pi r\eta}$, cosa que Einstein ja havia deduït per una altra via.

El raonament de Langevin (més simple? qüestió de gustos!) amaga algunes coses implícites:

Al posar $\mathrm{E}[Xx] = 0$ estem implícitament posant independència dels desplaçaments en intervals successius, tant petits com es vulgui. També hi ha implícit que X i x són independents.

No obstant, el mètode de Langevin es pot considerar més directe que el d'Einstein, al tractar directament de les trajectòries, i sembla que obre les portes a un mètode natural de generalitzar les equacions deterministes a equacions estocàstiques. Els fonaments matemàtics per poder fer-ho no van arribar fins quaranta anys després, gràcies a Kiyosi Itô.

8.6 La integral estocàstica no és trivial

Segons hem apuntat a l'Apartat 8.2, el problema de la integració estocàstica consisteix a definir $\int_0^t f_s\, dW_s$, on $\{W_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ és un procés de Wiener i $\{f_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ és un procés amb trajectòries no necessàriament de variació fitada.

El resultat d'integrar un procés en un interval fixat $[0,t]$ serà naturalment una variable aleatòria. Per tant el que busquem és un operador amb domini un cert espai de processos, a valors en $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i que per tal de merèixer el nom d'integral, hauria de ser

1) lineal,
2) continu en algun sentit (el que equival a tenir algun teorema de convergència).

Volem, a més, que

3) si $f_s(\omega)$ és de variació fitada per a tot ω, es tingui

$$\Big[\int_0^t f_s\, dW_s\Big](\omega) = \int_0^t f_s(\omega)\, dW_s(\omega)\ ,$$

estenent d'aquesta manera el concepte d'integral de Stieljes usual.

Un objectiu modest, a la vista de la situació creada per l'equació (8.2.6), és intentar que l'operador actui almenys sobre processos continus. Les condicions 2 i 3 suggereixen aleshores definir la integral d'un procés continu $f_t(\omega)$ respecte el procés de Wiener com el límit de les sumes

$$\Big[\int_0^t f_t\, dW_s\Big](\omega) := \lim_{n\to\infty} \sum_{t_i, t_{i+1}\in\pi_n} f_{\xi_i}(\omega)\cdot \big(W_{t_{i+1}}(\omega) - W_{t_i}(\omega)\big)\quad ,$$

si el límit de la dreta existeix i és independent de la successió de particions refinant $\{\pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ amb $||\pi_n|| \to 0$ i els punts $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$ escollits. I això per a cada ω fixat o, més feblement, prenent el límit en la topologia natural de $L^0(\Omega,\mathcal{F},P)$, i.e. la topologia de la convergència en probabilitat. Això correspondria a definir un operador continu entre l'espai de processos continus amb la topologia induïda per la convergència uniforme (en (t,ω)) i l'espai de variables aleatòries $L^0(\Omega,\mathcal{F},P)$ amb la convergència en probabilitat.

Malauradament, però, això és impossible. En efecte:

8.6.1 Teorema

Sigui $\alpha(t)$ una funció contínua en $[0,1]$ (càdlàg seria suficient).
Sigui $\{\pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió refinant de particions de $[0,1]$ tal que la successió de normes tendeix a zero.

Llavors,

$$\sum_{t_i,t_{i+1}\in\pi_n} f(t_i)\cdot(\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i))$$

convergeix a un límit finit quan $n\to\infty$ per a tota funció contínua f si i només si $\alpha(t)$ és de variació fitada. □

La demostració següent conté la clau "per sortir d'aquesta situació". S'utilitza el Teorema de Banach–Steinhauss:

8.6.2 Lema (Teorema de Banach–Steinhauss)

Siguin B_1 un espai de Banach i B_2 un espai normat.
Sigui $\{T_i\}_{i\in I}$ una família d'operadors lineals acotats $T_i\colon B_1 \longrightarrow B_2$.
Si per a cada $x\in B_1$, $\sup_{i\in I}\|T_i x\| < \infty$, aleshores $\sup_{i\in I}\|T_i\| < \infty$. □

Demostració del Teorema: La implicació $\Leftarrow$) és coneguda. Les sumes convergeixen a la integral de Riemann–Stieljes $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, d\alpha(t)$.

Pel recíproc: Siguin B_1 l'espai de funcions contínues en $[0,1]$ amb la norma del suprem, $B_2 = \mathbb{R}$ amb el valor absolut.

Per a cada $n \in \mathbb{N}$, sigui $A_n \colon B_1 \longrightarrow B_2$ l'operador definit per

$$A_n f := \sum_{t_i, t_{i+1} \in \pi_n} f(t_i) \cdot (\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)) \quad .$$

Per hipòtesi, $\lim_{n\to\infty} A_n f$ existeix, i per tant $\sup_n |A_n f| < \infty$. Gràcies al Lema, $\sup_n \|T_n\| < \infty$.

Anem a veure que la variació de α,

$$V^{(1)}(\alpha) := \sup_{\pi \in \mathcal{P}} \sum_{t_i, t_{i+1} \in \pi} |\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)| \quad ,$$

és més petita que $\sup_n \|T_n\|$, amb la qual cosa haurem acabat. Efectivament, per a cada $n \in \mathbb{N}$ fixat, sigui f una funció contínua tal que $f(t_i) = \text{signe}\{\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\}$ i $\|f\|_\infty = 1$. Llavors:

$$\begin{aligned} &A_n f = \sum_{t_i, t_{i+1} \in \pi_n} f(t_i)(\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)) = \sum_{t_i, t_{i+1} \in \pi_n} |\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)| \Rightarrow \\ &\|A_n\| \geqslant \sum_{t_i, t_{i+1} \in \pi_n} |\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)| \Rightarrow \\ &\sup_n \|A_n\| \geqslant \sup_n \sum_{t_i, t_{i+1} \in \pi_n} |\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)| = V^{(1)}(\alpha) \quad . \quad \square \end{aligned}$$

Aquest Teorema demostra la impossibilitat d'estendre la definició de la integral de Riemann–Stieljes més enllà d'integradors de variació fitada, si es vol integrar, com a mínim, totes les funcions contínues. Un pot pensar que, al ser l'operador que busquem valuat en $L^0(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ en lloc de $\mathbb{R}$, potser sí que es pot obtenir la convergència en probabilitat de les sumes

$$\sum_{t_i, t_{i+1} \in \pi_n} f_{t_i}(\omega) \cdot (\alpha_{t_{i+1}}(\omega) - \alpha_{t_i}(\omega)) \tag{8.6.1}$$

en lloc de la convergència quasi segura en ω. Però la situació no és millor, ja que en el conjunt $A = \{\omega \in \Omega : \alpha_t(\omega) \text{ no és de variació fitada}\}$ podriem construir una successió parcial de (8.6.1) convergent quasi segur, i repetir la demostració del Teorema per a aquesta parcial. Per tant, si $P(A) > 0$, arribem a la mateixa dificultat que en el cas determinista, en què ω no hi és.

Malgrat tot això, resulta que sí pot definir-se la integral de processos continus (i fins i tot més generals) respecte el procés de Wiener com a límit de sumes de Riemann. El truc és adonar-se que el paràmetre aleatori ω ha fet un paper d'espectador passiu en tota la discussió anterior: Simplement hem intentat definir la integral respecte el procés de Wiener trajectòria per trajectòria, per a cada ω fixat, i hem vist que no era possible. En segon lloc, és evident que caldrà imposar alguna restricció a l'integrand, però no estem disposats a demanar més regularitat a les seves trajectòries. Hauran de ser restriccions d'una altra mena.

Amb aquestes idees en ment, repassem un moment la demostració de l'últim Teorema. Per veure la necessitat que l'integrador sigui de variació fitada hem usat funcions amb valors prefixats sobre els punts de cada partició:

$$f(t_i) := \text{signe}\{\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\}$$

Observem que, per assignar aquests valors, cal "mirar endavant" la funció α; és a dir, el valor de f en t_i depèn del valor de α en t_{i+1}. Si prohibim aquesta dependència, la demostració queda invalidada, i de fet el resultat és fals.

Al capítol següent posarem aquesta restricció en termes matemàtics i construïrem la integral desitjada.

8.7 Més exemples

Acabem aquest capítol amb dos exemples més de situacions similars a la que planteja el moviment brownià, i que es poden modelar de manera semblant.

8.7.1 Exemple 1

El conegut model de Verhulst per a l'evolució del volum d'individus d'una espècie ve donat per l'equació diferencial

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)\big(a - bx(t)\big) \tag{8.7.1}$$

(l'equació logística), que es dedueix de suposar una taxa de natalitat constant a i una taxa de mortalitat proporcional a la població $bx(t)$. L'equació (8.7.1) és pot pensar com l'aproximació contínua del planteig discret

$$x(n+1) - x(n) = x(n)\big(a - bx(n)\big)\ . \tag{8.7.2}$$

Típicament, les constants a i b són idealitzacions de quantitats sotmeses a fluctuacions imprevisibles a priori. Suposem, per exemple, que canviem a per una funció $a+\xi(n)$, on $\xi(n)$ representa una petita pertorbació de la taxa de natalitat, que és desconeguda i que és independent (i.e., no hi ha relació de causa–efecte) de les pertorbacions $\xi(m)$, $m \neq n$. Si notem per $M(n)$ l'acumulació d'aquestes pertorbacions des de l'instant 0 fins al $n-1$, o sigui $M(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi(n)$, obtindrem l'equació modificada

$$x(n+1) - x(n) = x(n)\big(a + M(n+1) - M(n) - bx(n)\big)\quad . \tag{8.7.3}$$

Construïm ara l'aproximació contínua de (8.7.3). L'anàleg dels increments $x(n+1)-x(n)$ en mode continu és $\dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$, i semblantment per a $M(n+1)-M(n)$. Escriurem doncs

$$x(t+\Delta t) - x(t) = x(t)\big(a - bx(t)\big)\Delta t + x(t)\big(M(t+\Delta t) - M(t)\big)\quad . \tag{8.7.4}$$

Si suposem constant l'entorn en els sentit que les causes de les pertorbacions són invariables en el temps, mantenim la independència del valor de les pertorbacions que afecten al sistema en intervals disjunts, i finalment fem la hipòtesi raonable que la funció $M(t)$ ha de ser contínua en el temps, retrobem exactament les condicions 1, 2 i 3 proposades a l'Apartat 8.1 com a propietats de la funció desconeguda M. En resulta doncs formalment la mateixa situació que allà.

8.7.2 Exemple 2

Considerem ara el problema de portar un satèl·lit artificial a la seva òrbita geoestacionària, a partir de l'òrbita el·líptica de transferència, que és l'estadi intermig entre la fase de llançament i el posicionament definitiu.

Per controlar aquesta delicada maniobra cal tenir una informació el més acurada possible de la posició del satèl·lit en cada instant. En primera aproximació, tenint en compte només l'acció del camp gravitatori terrestre, les equacions del moviment es poden escriure en la forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) \tag{8.7.5}$$

amb $x(t) \in \mathbb{R}^6$ (tres paràmetres de posició, tres paràmetres de velocitat).

Altres elements que influeixen la trajectòria del satèl·lit, com ara la no-esfericitat i no-homogeneïtat de la terra, la influència d'altres cossos celestes, la pressió de radiació solar, etc., poden ser incorporats al model si es té un bon coneixement de com actuen. Tanmateix, hi intervindran també pertorbacions la direcció i intensitat de les quals no és coneguda a priori.

Una heurística similar a la dels exemples anteriors ens porta a escriure

$$x(t+\Delta t) - x(t) = \int_t^{t+\Delta t} f(x(s))\, ds + M(t+\Delta t) - M(t)\ ,$$

on M és una funció amb les característiques 1, 2, 3 llistades a l'Apartat 8.1.

A més, hom compta amb la informació addicional aportada per les estacions de seguiment, que reben un senyal

$$y(t) = g(t, x(t)) \quad ,$$

al seu torn contaminat també per pertorbacions de medició:

$$y(t + \Delta t) - y(t) = \int_t^{t+\Delta t} g(s, x(s))\, ds + N(t + \Delta t) - N(t) \quad ,$$

essent $N(t)$ desconeguda i independent (en el sentit que les causes ho són) de $M(t)$. El problema, que s'anomena *filtratge*, consisteix en obtenir la millor informació possible sobre el valor de $x(t)$, tenint en compte les observacions $y(r)$, $r \leqslant t$.

Relacionat amb el problema del filtratge, hi ha el problema de la *predicció,* si utilitzem només les observacions $y(r)$, $r \leqslant s$, per un cert $s < t$, i el problema de *l'allisament,* si utilitzem $y(r)$, $r \leqslant s$, per un cert $s > t$.

9. La integral de Itô

L'objectiu és definir la integral

$$\int_a^b X_t\,dW_t\ , \tag{9.0.1}$$

on W és un procés de Wiener, per a una classe de processos estocàstics X el més gran possible. Hem vist al Capítol 7 que si X és una funció determinista, aleshores es pot definir (9.0.1) per a $X \in L^2([a,b],dt)$. (En el cas del procés de Wiener, $F(t)-F(s) := \mathrm{E}[|W_t - W_s|^2] = t-s$, i per tant la mesura que cal posar en aquest espai L^2 és precisament la mesura de Lebesgue.) Això es podia fer gràcies a què la integral de funcions esglaonades $X \in \mathcal{S}$ era un operador lineal continu de $\mathcal{S} \subset L^2([a,b],dt)$ en $L^2(\Omega)$, i a més $\bar{\mathcal{S}} = L^2([a,b],dt)$.

Quan X depèn també de ω, demanarem en primer lloc que, amb probabilitat 1, les trajectòries de X siguin de $L^2([a,b],dt)$. Però això sol no serà suficient. Haurem de fer una altra restricció, no sobre la regularitat de les trajectòries de X, sinò sobre les seves propietats de mesurabilitat com a aplicació $X\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$.

9.1 Filtracions no–anticipatives

9.1.1 Definició

Sigui $W \equiv \{W_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ un procés de Wiener definit en un cert espai de probabilitat $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Sigui $\{\mathfrak{F}_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ una filtració de sub-σ-àlgebres de $\mathfrak{F}$.
Diem que $\{\mathfrak{F}_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ *no anticipa* W si se satisfan les condicions següents:

1) W és adaptat a $\{\mathfrak{F}_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$.
2) $\forall s \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{F}_s$ i $\sigma\{W_t - W_s,\ t \geqslant s\}$ són σ-àlgebres independents. □

Filtracions no-anticipatives sempre existeixen. Per exemple, la filtració generada pel propi procés de Wiener, o sigui, $\mathfrak{F}_t = \sigma\{W_s,\ s \leqslant t\}$, es no-anticipativa respecte W, gràcies a la propietat d'increments independents de W.

9.1.2 Definició

Direm que un procés estocàstic X és *no-anticipatiu* respecte un procés de Wiener W si:

1) X és un procés mesurable.
2) X és adaptat a alguna filtració no-anticipativa de W.

De vegades en direm simplement processos "mesurables i adaptats". □

9.1.3 Observacions

1) Tota funció mesurable $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ és no-anticipativa respecte qualsevol filtració.

2) Tot procés estocàstic X tal que X_t sigui mesurable respecte $\sigma\{W_s,\ s \leqslant t\}$ és no-anticipatiu. (Serà adaptat respecte qualsevol filtració no-anticipativa.)
3) Intuïtivament, la condició de no-anticipació diu que el procés ha de ser independent dels increments futurs del procés de Wiener. □

9.1.4 Notació

Notarem per $\mathcal{P}[a,b]$ la col·lecció de processos no-anticipatius X tals que $P\{\omega :\ X(\omega) \in L^2([a,b])\} = 1$.
(No hi ha una notació estàndard per aquest conjunt. Usem la notació que fa servir [Karatzas-Shreve].)
Normalment, identificarem en $\mathcal{P}[a,b]$ dos processos que siguin indistingibles. D'aquesta manera estem fent un pas al quocient, però seguirem usant la notació $\mathcal{P}[a,b]$ per aquest conjunt quocient. □

9.1.5 Proposició

El conjunt $\mathcal{P}[a,b]$ és un espai vectorial amb les operacions usuals de suma i producte per escalars.

Demostració: Si $X^1,\dots,X^n$ són processos no-anticipatius i $H\colon\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és una funció mesurable, està clar que $H(X^1,\dots,X^n)$ és un procés no-anticipatiu. En particular, és cert si H és una funció lineal. □

Anem a introduir una convergència a l'espai vectorial $\mathcal{P}[a,b]$, i veurem que el dota d'estructura d'espai mètric.

9.1.6 Definició

Sigui $\{X^n\}_n \subset \mathcal{P}[a,b]$.
Direm que $\{X^n\}_n$ convergeix a $X \in \mathcal{P}[a,b]$ si la successió de variables aleatòries

$$\Big\{\omega \longmapsto \int_a^b |X_t^n(\omega) - X_t(\omega)|^2\, ds\Big\}_n$$

convergeix a zero en probabilitat. Dit d'una altra manera, si

$$\|X^n - X\|_{L^2([a,b])} \xrightarrow{P} 0\ . \quad \square$$

9.1.7 Proposició

L'aplicació

$$\begin{aligned} d\colon \mathcal{P}[a,b] \times \mathcal{P}[a,b] &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (X,Y) &\longmapsto \mathrm{E}\Big[\frac{\|X-Y\|_{L^2([a,b])}}{1+\|X-Y\|_{L^2([a,b])}}\Big] \end{aligned}$$

és una distància i metritza la convergència de la Definició 9.1.6.

Demostració: Sabem que $d(X,Y) := \|X-Y\|$ és una distància en $L^2([a,b])$. Per altra banda, sempre que d és una distància en un espai mètric, es té que $d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ és també una distància en el mateix espai (equivalent a l'anterior). Això ens dóna la desigualtat triangular

$$\frac{\|X-Y\|_{L^2([a,b])}}{1+\|X-Y\|_{L^2([a,b])}} \leqslant \frac{\|X-Z\|_{L^2([a,b])}}{1+\|X-Z\|_{L^2([a,b])}} + \frac{\|Z-Y\|_{L^2([a,b])}}{1+\|Z-Y\|_{L^2([a,b])}}\ .$$

Prenent esperances, resulta la desigultat triangular de l'aplicació d, que és l'única dificultat per comprovar que és una distància.

Vegem ara que metritza la convergència que hem definit en $\mathcal{P}[a,b]$: Suposem primer que

$$\forall\varepsilon > 0,\ P\{\|X^n - X\|_{L^2([a,b])} > \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ .$$

Aleshores,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\Big[\frac{\|X^n - X\|_{L^2([a,b])}}{1+\|X^n - X\|_{L^2([a,b])}}\Big] \\
&= \int_{\{\|X^n-X\|_{L^2([a,b])}\geqslant\varepsilon\}} \frac{\|X^n - X\|_{L^2([a,b])}}{1+\|X^n - X\|_{L^2([a,b])}}\,dP + \int_{\{\|X^n-X\|_{L^2([a,b])}<\varepsilon\}} \frac{\|X^n - X\|_{L^2([a,b])}}{1+\|X^n - X\|_{L^2([a,b])}}\,dP \\
&\leqslant P\{\|X^n - X\|_{L^2([a,b])} \geqslant \varepsilon\} + \varepsilon P\{\|X^n - X\|_{L^2([a,b])} < \varepsilon\} \\
&\leqslant P\{\|X^n - X\|_{L^2([a,b])} \geqslant \varepsilon\} + \varepsilon \xrightarrow[n\to\infty]{} \varepsilon \ .
\end{aligned}$$

Essent això vàlid per a tot $\varepsilon > 0$, resulta que $d(X^n, X) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, com voliem veure.

Recíprocament, suposem que $d(X^n, X) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Fixem $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}
P\{\|X^n - X\|_{L^2([a,b])} \geqslant \varepsilon\} &= P\Big\{\frac{\|X^n - X\|_{L^2([a,b])}}{1+\|X^n - X\|_{L^2([a,b])}} \geqslant \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\Big\} \\
&\leqslant \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\,\mathrm{E}\Big[\frac{\|X^n - X\|_{L^2([a,b])}}{1+\|X^n - X\|_{L^2([a,b])}}\Big] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ . \quad \square
\end{aligned}$$

9.1.8 Notació

Notarem per $L^2_a([a,b]\times\Omega)$ el conjunt de processos de $L^2([a,b]\times\Omega)$ adaptats a la filtració no-anticipativa $\{\mathfrak{F}_t,\ t\in\mathbb{R}^+\}$:

$$L^2_a([a,b]\times\Omega) := \Big\{X:\ X \text{ és no-anticipatiu i } \mathrm{E}\Big[\int_a^b X_t^2\,dt\Big] < \infty\Big\} \ .$$

Està clar que el conjunt $L^2_a([a,b]\times\Omega)$ és un subespai de l'espai de Hilbert $L^2([a,b]\times\Omega)$ i que està contingut en $\mathcal{P}[a,b]$. $\square$

9.2 La integral de processos simples

9.2.1 Definició

Un procés estocàstic no-anticipatiu X direm que és *simple* (o *esglaonat*) en $[a,b]$ si existeix una partició $\{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ tal que

$$X_t(\omega) = X_{t_k}(\omega)\ , \quad \forall\omega\in\Omega\ , \quad \forall t\in\,]t_k, t_{k+1}]\ .$$

Equivalentment, si X es pot escriure en $[a,b]$ com

$$X_t(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(\omega)\mathbf{1}_{]t_k,t_{k+1}]}(t)\ ,$$

amb c_k variables aleatòries $\mathfrak{F}_{t_k}$-mesurables.

Notarem per $\mathcal{S}[a,b]$ el conjunt de processos simples, que és clarament un subespai vectorial de $\mathcal{P}[a,b]$ (identificant processos indistingibles). $\square$

9.2.2 Definició

Sigui $X\in\mathcal{S}[a,b]$.

Definim la integral de X respecte el procés de Wiener W com la variable aleatòria sobre $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$

$$\Big[\int_a^b X_t\, dW_t\Big](\omega) := \sum_{k=0}^{n-1} c_k(\omega)\big[W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\big](\omega) \ . \quad \square$$

9.2.3 Proposició

L'aplicació entre espais vectorials

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[a,b] \subset \mathcal{P}[a,b] &\longrightarrow L^0(\Omega) \\ X &\longmapsto \int_a^b X_t\, dW_t \end{aligned}$$

està ben definida i és lineal.

Demostració: Siguin $X, Y \in \mathcal{S}[a,b]$. Representem-los respecte la mateixa partició:

$$X_t(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(\omega)\mathbf{1}_{]t_k,t_{k+1}]}(t) \ ,$$
$$Y_t(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k(\omega)\mathbf{1}_{]t_k,t_{k+1}]}(t) \ .$$

Si X i Y són indistingibles, aleshores, per a tot ω fora d'un conjunt de probabilitat zero,

$$\Big[\int_a^b X_t\, dW_t\Big](\omega) := \sum_{k=0}^{n-1} c_k(\omega)[W_{t_k+1} - W_{t_k}](\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k(\omega)[W_{t_k+1} - W_{t_k}](\omega) =: \Big[\int_a^b Y_t\, dW_t\Big](\omega) \ ,$$

i es comprova que aquest valor no depèn de la representació concreta escollida.

Per altra banda, si $X, Y \in \mathcal{S}[a,b]$ amb la representació anterior,

$$\begin{aligned} \int_a^b (\alpha X_t + Y_t)\, dW_t &= \sum_{k=0}^{n-1} [\alpha c_k(\omega) + d_k(\omega)][W_{t_k+1} - W_{t_k}](\omega) \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{n-1} c_k(\omega)[W_{t_k+1} - W_{t_k}](\omega) + \sum_{k=0}^{n-1} d_k(\omega)[W_{t_k+1} - W_{t_k}](\omega) \\ &= \alpha \int_a^b X_t\, dW_t + \int_a^b Y_t\, dW_t \ . \quad \square \end{aligned}$$

9.2.4 Proposició

Sigui $X \in \mathcal{S}[a,b]$. Aleshores:

1) Si $[a',b'] \subset [a,b]$, aleshores $X \in \mathcal{S}[a',b']$, $X \cdot \mathbf{1}_{]a'b']} \in \mathcal{S}[a,b]$, i

$$\int_{a'}^{b'} X_t\, dW_t = \int_a^b X_t \cdot \mathbf{1}_{]a',b']}(t)\, dW_t \ .$$

2) Si $c \in \,]a,b[$, aleshores $X \in \mathcal{S}[a,c]$, $X \in \mathcal{S}[c,b]$, i

$$\int_a^b X_t\, dW_t = \int_a^c X_t\, dW_t + \int_c^b X_t\, dW_t \ .$$

3) $\Big[\ \mathrm{E}[X_t] < \infty, \ \forall t \in [a,b]\ \Big] \Longrightarrow \mathrm{E}\Big[\int_a^b X_t\, dW_t\Big] = 0 \ .$

4) $\Big[\ \mathrm{E}[X_t^2] < \infty, \ \forall t \in [a,b]\ \Big] \Longrightarrow \mathrm{E}\Big[\Big|\int_a^b X_t\, dW_t\Big|^2\Big] = \int_a^b \mathrm{E}[X_t^2]\, dt \ .$

Demostració:

(1) Fàcil.

(2)
$$\int_a^c X_t\,dW_t + \int_c^b X_t\,dW_t = \int_a^b X_t \mathbf{1}_{]a,c]}(t)\,dW_t + \int_a^b X_t \mathbf{1}_{]c,b]}(t)\,dW_t$$
$$= \int_a^b X_t \mathbf{1}_{]a,b]}(t)\,dW_t = \int_a^b X_t\,dW_t \ ,$$

gràcies a la Proposició 9.2.3 (linealitat).

(3)
$$\begin{aligned} \mathrm{E}\,\Big[\int_a^b X_t\,dW_t\Big] &= \mathrm{E}\,\Big[\sum_{k=0}^{n-1} c_k (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})\Big] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{E}\,\big[c_k (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})\big] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{E}[c_k]\,\mathrm{E}[W_{t_{k+1}} - W_{t_k}] = 0 \ . \end{aligned}$$

Hem usat la independència de c_k i $W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$, i el fet que l'esperança d'aquest increment és zero.

(4)
$$\begin{aligned} \mathrm{E}\Big[\Big(\int_a^b X_t\,dW_t\Big)^2\Big] &= \mathrm{E}\Big[\Big(\sum_{k=0}^{n-1} c_k (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})\Big)^2\Big] \\ &= \mathrm{E}\Big[\sum_{k,j=0}^{n-1} c_k c_j (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})\Big] \\ &= \mathrm{E}\Big[\sum_{k=0}^{n-1} c_k^2 (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2\Big] + 2 \sum_{\substack{k,j=0\\k<j}}^{n-1} \mathrm{E}[c_k c_j (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{E}[c_k^2]\,\mathrm{E}[(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2] + 2 \sum_{\substack{k,j=0\\k<j}}^{n-1} \mathrm{E}[c_k c_j (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})]\,\mathrm{E}[(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})] \ . \end{aligned}$$

En l'últim sumatori, el segon factor és zero, mentre que el primer és una quantitat finita, doncs, usant la desigualtat de Schwarz i l'adaptació de X, està fitat per

$$\mathrm{E}[c_j^2]^{1/2}\,\mathrm{E}\,\big[c_k^2 (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2\big]^2 = \mathrm{E}[c_j^2]^{1/2}\,\mathrm{E}[c_k^2]^{1/2} (t_{k+1} - t_k)^{1/2} \ .$$

Per tant,
$$\mathrm{E}\Big[\Big(\int_a^b X_t\,dW_t\Big)^2\Big] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{E}[c_k^2](t_{k+1} - t_k) = \int_a^b \mathrm{E}[X_t^2]\,dt \ . \quad \square$$

9.2.5 Proposició

Sigui $X \in \mathcal{S}[a,b]$.
Aleshores, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall N > 0$,

$$P\Big\{\Big|\int_a^b X_t\,dW_t\Big| > N\Big\} \leqslant P\Big\{\Big|\int_a^b X_t^2\,dt\Big| > \varepsilon\Big\} + \frac{\varepsilon}{N^2} \ .$$

Demostració: Suposem que
$$X_t = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \mathbf{1}_{]t_k, t_{k+1}]}(t) \ .$$

Considerem el procés

$$\phi_t^N := \begin{cases} X_t, \text{ si } t_k \leqslant t < t_{k+1} \text{ i } \sum\limits_{j=0}^{k} c_j^2(t_{j+1}-t_j) \leqslant \varepsilon \\ 0, \text{ si } t_k < t \leqslant t_{k+1} \text{ i } \sum\limits_{j=0}^{k} c_j^2(t_{j+1}-t_j) > \varepsilon \end{cases}$$

Resulta que $\phi_t^N \in \mathcal{S}[a,b]$, perquè

$$\int_a^b (\phi_t^N)^2\,dt \leqslant \int_a^b X_t^2\,dt < \infty \quad (\forall\omega)\ ,$$

i

$$\phi_t^N = X_t \mathbf{1}_{\{\sum\limits_{j=0}^{k} c_j^2(t_{j+1}-t_j)\leqslant N\}} \mathbf{1}_{]t_k,t_{k+1}]}(t)\ ,$$

que és una funció de les variables $c_0,\dots,c_k$ i per tant $\mathfrak{F}_t$-mesurable.

A més,

$$\int_a^b (\phi_t^N)^2\,dt = \sum_{j=0}^{m} c_j^2(t_{j+1}-t_j)\ ,$$

on m és l'enter més gran ($\leqslant n-1$) tal que $\sum\limits_{j=0}^{m} c_j(t_{j+1}-t_j) \leqslant N$. Això implica que

$$\mathrm{E}\Big[\int_a^b (\phi_t^N)^2\,dt\Big] \leqslant \varepsilon$$

i per tant

$$\mathrm{E}\big[(\phi_t^N)^2\big] < \infty\ , \quad \forall t\in[a,b]\ .$$

Podem aplicar doncs la Proposició 9.2.4, i obtenim

$$\mathrm{E}\Big[\Big|\int_a^b \phi_t^N\,dW_t\Big|^2\Big] \leqslant \varepsilon\ .$$

Això ens permet finalment veure l'estimació de l'enunciat:

$$\begin{aligned} P\Big\{\Big|\int_a^b X_t\,dW_t\Big| > N\Big\} &= P\Big\{\Big|\int_a^b (X_t-\phi_t^N+\phi_t^N)\,dW_t\Big| > N\Big\} \\ &\leqslant P\Big\{\Big|\int_a^b \phi_t^N\,dW_t\Big| + \Big|\int_a^b (X_t-\phi_t^N)\,dW_t\Big| > N\Big\} \\ &\leqslant P\Big\{\Big|\int_a^b \phi_t^N\,dW_t\Big| > N \quad \text{o} \quad \Big|\int_a^b (X_t-\phi_t^N)\,dW_t\Big| > 0\Big\} \\ &\leqslant P\Big\{\Big|\int_a^b \phi_t^N\,dW_t\Big| > N\Big\} + P\Big\{\Big|\int_a^b (X_t-\phi_t^N)\,dW_t\Big| > 0\Big\} \\ &\leqslant \frac{1}{N^2}\,\mathrm{E}\Big[\Big|\int_a^b \phi_t^N\,dW_t\Big|^2\Big] + P\Big\{\Big|\int_a^b X_t^2\,dt\Big| > \varepsilon\Big\} \\ &\leqslant P\Big\{\Big|\int_a^b X_t^2\,dW_t\Big| > \varepsilon\Big\} + \frac{\varepsilon}{N^2}\ , \end{aligned}$$

la penúltima desigualtat deguda a la desigualtat de Txebixev i la de definició de ϕ^N. □

9.3 La integral de processos de $\mathcal{P}$

9.3.1 Proposició
$\mathcal{S}$ és dens en $\mathcal{P}$.

Demostració: Es demostra seguint aquests tres passos:
1) $\mathcal{S}$ és dens en els processos continus.
2) Els processos continus són densos en els acotats.
3) Els processos acotats són densos en $\mathcal{P}$.

(De fet, es pot demostrar que existeix una successió $\{X^n\}_n$ de processos en $\mathcal{S}$ tal que es té

$$\int_a^b |X_t^n - X_t|^2\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{\text{q.s.}} 0\ ,$$

Això s'usarà a la demostració de la Proposició 9.3.9.) □

9.3.2 Proposició
L'aplicació entre espais mètrics

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[a,b] \subset P[a,b] &\longrightarrow L^0(\Omega) \\ X &\longmapsto \int_a^b X_t\,dW_t \end{aligned}$$

és contínua i transforma successions de Cauchy en successions de Cauchy.

Demostració: Sigui $\{X^n\}_n$ de Cauchy en $\mathcal{S}[a,b]$, és a dir,

$$\forall\varepsilon>0,\ \forall\eta>0,\ \exists n_0:\ n,m\geqslant n_0 \Rightarrow P\Big\{\int_a^b |X_t^n - X_t^m|^2\,dt > \varepsilon\Big\} < \eta\ .$$

Per la Proposició 9.2.5,

$$\forall N>0,\ \forall\varepsilon>0,\ \forall\eta>0,\ \exists n_0:\ n,m\geqslant n_0 \Rightarrow P\Big\{\Big|\int_a^b (X_t^n - X_t^m)\,dW_t\Big| > N\Big\} < \eta + \frac{\varepsilon}{N^2}\ .$$

Fent $\varepsilon\to 0$, obtenim que $\Big\{\int_a^b X_t^n\,dW_t\Big\}_n$ és de Cauchy en $L^0(\Omega)$.

La continuïtat es fa igual, amb $X^n \to X$ en $\mathcal{S}[a,b]$ i aplicant la Proposició 9.2.5 a $X^n - X$.
□

Gràcies a les Proposicions 9.3.1 i 9.3.2, és aplicable el Lema general següent sobre prolongació de funcions contínues entre espais mètrics.

9.3.3 Lema (Teorema d'extensió de funcions contínues.)
Siguin E un espai mètric i F un espai mètric complet.
Siguin $A\subset\bar{A}=E$, i $f\colon A\to F$ una funció contínua.
Aleshores: Existeix una extensió contínua de f a E si i només si f transforma successions de Cauchy en successions de Cauchy.
En cas afirmatiu, l'extensió és única i ve donada per

$$\begin{aligned} \bar{f}\colon E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto \bar{f}(x) := \lim_{n\to\infty} f(x_n) \end{aligned}$$

on $\{x_n\}_n \subset A$ *és una successió qualsevol que convergeixi a* x*.*

9.3.4 Definició

Sigui $X \in \mathcal{P}[a,b]$.

Sigui $\{X^n\}_n \subset S[a,b]$ una successió qualsevol que convergeixi a X en l'espai mètric $\mathcal{P}[a,b]$.

Aleshores definim la integral estocàstica de X respecte el procés de Wiener W com la variable aleatòria sobre $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$

$$\int_a^b X_t\, dW_t := P\text{-}\lim_{n\to\infty} \int_a^b X_t^n\, dW_t \ .$$

9.3.5 Proposició

L'aplicació entre espais vectorials

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[a,b] &\longrightarrow L^0(\Omega) \\ X &\longmapsto \int_a^b X_t\, dW_t \end{aligned}$$

obtinguda a la Definició 9.3.4 és lineal.

Demostració: Siguin $X, Y \in \mathcal{P}[a,b]$, i $\alpha \in \mathbb{R}$.

Siguin $\{X^n\}_n, \{Y^n\}_n \subset \mathcal{S}[a,b]$ tals que $X^n \to X$ i $Y^n \to Y$ en $(\mathcal{P}, d)$.

Aleshores, es comprova fàcilment que $\alpha X^n + Y^n \to \alpha X + Y$ en $(\mathcal{P}, d)$, el que demostra que les operacions d'espai vectorial són "compatibles amb la mètrica", i.e. són operacions contínues.

Tenim

$$\int_a^b (\alpha X_t^n + Y_t^n)\, dW_t = \alpha \int_a^b X_t^n\, dW_t + \int_a^b Y_t^n\, dW_t$$

i que

$$\int_a^b (\alpha X_t^n + Y_t^n)\, dW_t \xrightarrow[n\to\infty]{P} \int_a^b (\alpha X_t + Y_t)\, dW_t$$

i

$$\alpha \int_a^b X_t^n\, dW_t + \int_a^b Y_t^n\, dW_t \xrightarrow[n\to\infty]{P} \alpha \int_a^b X_t\, dW_t + \int_a^b Y_t\, dW_t \ ,$$

d'on es dedueix l'enunciat. □

9.3.6 Proposició

Sigui $X \in \mathcal{P}[a,b]$*.*

Aleshores, $\forall \varepsilon > 0$*,* $\forall N > 0$*,*

$$P\Big\{ \Big| \int_a^b X_t\, dW_t \Big| > N \Big\} \leqslant P\Big\{ \int_a^b X_t^2\, dW_t \Big| > \varepsilon \Big\} + \frac{\varepsilon}{N^2} \ .$$

Demostració: Sigui $\{X^n\}_n \subset \mathcal{S}[a,b]$ tal que $X^n \to X$ en $(\mathcal{P}, d)$.

Siguin $\varepsilon' \geqslant \varepsilon$, $N' \leqslant N$.

Llavors,

$$
\begin{aligned}
&P\Big\{\Big|\int_a^b X_t\,dW_t\Big| > N\Big\}\\
&\leqslant P\Big\{\Big|\int_a^b (X_t^n - X_t)\,dW_t\Big| + \Big|\int_a^b X_t^n\,dW_t\Big| > N\Big\}\\
&\leqslant P\Big\{\Big|\int_a^b (X_t^n - X_t)\,dW_t\Big| > N - N'\Big\} + P\Big\{\Big|\int_a^b X_t^n\,dW_t\Big| > N'\Big\}\\
&\leqslant P\Big\{\Big|\int_a^b (X_t^n - X_t)\,dW_t\Big| > N - N'\Big\} + P\Big\{\int_a^b (X_t^n)^2\,dt > \varepsilon'\Big\} + \frac{\varepsilon'}{(N')^2}\\
&\leqslant P\Big\{\Big|\int_a^b (X_t^n - X_t)\,dW_t\Big| > N - N'\Big\} + P\Big\{\int_a^b (X_t^n - X_t)^2\,dt > \varepsilon' - \varepsilon\Big\}\\
&\quad + P\Big\{\int_a^b X_t^2\,dt > \varepsilon\Big\} + \frac{\varepsilon'}{(N')^2}\ ,
\end{aligned}
$$

la tercera desigualtat gràcies a la Proposició 9.2.5. Això val per a tot n. Fent $n \to \infty$, els dos primers sumands tendeixen a zero i queda

$$
P\Big\{\Big|\int_a^b X_t\,dW_t\Big| > N\Big\} \leqslant P\Big\{\int_a^b X_t^2\,dt > \varepsilon\Big\} + \frac{\varepsilon'}{(N')^2}\ .
$$

Fent $\varepsilon' \searrow \varepsilon$ i $N' \nearrow N$, queda demostrada la proposició. □

9.3.7 Proposició (Aproximació per sumes de Riemann.)
Sigui $X \in \mathcal{P}[a,b]$ un procés continu q.s.
Aleshores, per a qualsevol successió de particions $\pi_n = \{a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_{m_n}^{(n)} = b\}$ de $[a,b]$ tal que $\|\pi_n\| \to 0$, es compleix

$$
\sum_{k=0}^{m_n-1} X_{t_k^{(n)}}\big[W_{t_{k+1}^{(n)}} - W_{t_k^{(n)}}\big] \xrightarrow[n\to\infty]{P} \int_a^b X_t\,dW_t\ .
$$

Demostració: Definim la successió $\{X^n\}_n \subset \mathcal{S}[a,b]$ per

$$
X_t^n := \sum_{k=0}^{m_n-1} X_{t_k^{(n)}} \mathbf{1}_{]t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]}(t)\ .
$$

És fàcil veure que $X^n \to X$ en $(\mathcal{P}, d)$. Per tant, per la continuïtat de la integral estocàstica,

$$
\int_a^b X_t^n\,dW_t \xrightarrow[n\to\infty]{P} \int_a^b X_t\,dW_t\ .
$$

Clarament, la successió d'integrals coincideix amb la successió de l'enunciat. □

9.3.8 Observació
Si, en la situació de la Proposició 9.3.7, considerem

$$
S_n = \sum_{k=0}^{m_n-1} W_{u_k^{(n)}}\big[W_{t_{k+1}^{(n)}} - W_{t_k^{(n)}}\big]\ ,
$$

on cada $u_k^{(n)}$ és un punt arbitrari de $[t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]$, aleshores l'existència i el valor concret de $P\text{-}\lim_{n\to\infty} S_n$ depèn de l'elecció dels $u_k^{(n)}$.

Per exemple, si posem

$$u_k^{(n)} = \alpha t_{k+1}^{(n)} + (1-\alpha) t_k^{(n)} \ , \quad \text{per un cert } \alpha \in [0,1], \forall n, \forall k,$$

s'obté

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \frac{1}{2}(W_b^2 - W_a^2) + (\alpha - \frac{1}{2})(b-a) \ .$$

En particular, usant la Proposició 9.3.7, això ens diu que

$$\int_a^b W_t\, dW_t = \frac{1}{2}(W_b^2 - W_a^2) - \frac{1}{2}(b-a) \ ,$$

i concloem que la integral de Itô no segueix les regles del càlcul newtonià.

Es pot definir una integral estocàstica que respecti les regles del càlcul newtonià? L'exemple que hem vist suggereix que podriem fer-ho, almenys per a processos continus, definit

$$\int_a^b X_t \circ dW_t := P\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m_n-1} X_{\frac{1}{2}(t_k^{(n)}+t_{k+1}^{(n)})} \big[W_{t_{k+1}^{(n)}} - W_{t_k^{(n)}}\big] \ .$$

Això es pot fer, en efecte, i obtindriem

$$\int_a^b W_t \circ dW_t = \frac{1}{2}(W_b^2 - W_a^2) \ .$$

Però aquesta integral (*integral de Stratonovich*) té altres inconvenients. No la tractarem en aquest curs.

9.3.9 Proposició
Sigui $X \in L_a^2([a,b]\times\Omega)$.
Aleshores, existeix $\{X^n\}_n \in \mathcal{S}[a,b] \cap L_a^2([a,b]\times\Omega)$ tal que

1) $\|X_t^n - X_t\|_{L^2([a,b]\times\Omega)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

2) $\| \int_a^b X_t^n\, dW_t - \int_a^b X_t\, dW_t \|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Demostració: Sigui $\{Y^k\}_k \subset \mathcal{S}[a,b]$ una successió de processos simples tal que

$$\int_a^b |Y_t^k - X_t|^2\, dt \xrightarrow[n\to\infty]{\text{q.s.}} 0$$

(vegeu la demostració de la Proposició 9.3.1). Per a $N \in \mathbb{N}$, sigui

$$\phi_N(t) = \begin{cases} t & \text{si } |t| \leqslant N \\ N & \text{si } |t| > N \ . \end{cases}$$

Podem escriure

$$E\Big[\int_a^b |\phi_N(Y_t^k) - X_t|^2\, dt\Big] \leqslant A(N,k) + B(N) \ ,$$

on

$$A(N,k) := E\Big[\int_a^b |\phi_N(Y_t^k) - \phi_N(X_t)|^2\, dt\Big]$$

$$B(N) := E\Big[\int_a^b |\phi_N(X_t) - X_t|^2\, dt\Big] \ .$$

Com que $|\phi_N(t) - \phi_N(s)| \leqslant |t-s|$, es té

$$\int_a^b |\phi_N(Y_t^k) - \phi_N(X_t)|^2\, dt \leqslant \int_a^b |Y_t^k - X_t|^2\, dt \xrightarrow[n\to\infty]{\text{q.s.}} 0 \ .$$

A més,

$$\int_a^b |\phi_N(Y_t^k) - \phi_N(X_t)|^2 \, dt \leqslant \int_a^b |\phi_N(Y_t^k)|^2 \, dt + \int_a^b |\phi_N(X_t)|^2 \, dt \leqslant 2N^2(b-a) \ .$$

Per tant, podem aplicar el Teorema de la Convergència Dominada, obtenint $A(N,k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Per altra banda,

$$B(N) = \int_{\{|X|>N\}} \int_a^b |\phi_N(X_t) - X_t|^2 \, dt \, dP \leqslant \int_{\{|X|>N\}} \int_a^b |2X_t|^2 \, dt \, dP \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \ ,$$

puix que $X \in L_a^2([a,b]\times\Omega)$.

Per a cada $n \in \mathbb{N}$, sigui N tal que $B(N) \leqslant \frac{1}{2n}$ i sigui $k := k(N)$ tal que $A(N,k) \leqslant \frac{1}{2n}$. Prenem

$$X_n = \phi_N(Y^{k(N)}) \ ,$$

que es comprova que compleix les propietats requerides per a la primera part de la proposició.

Per a la segona part, sabem que

$$\int_a^b X_t^n \, dW_t \xrightarrow[n\to\infty]{P} \int_a^b X_t \, dW_t \ .$$

La successió d'integrals estocàstiques és de Cauchy en $L^2([a,b]\times\Omega)$:

$$\mathrm{E}\Big[\Big|\int_a^b X_t^n \, dW_t - \int_a^b X_t^m \, dW_t\Big|^2\Big] = \mathrm{E}\Big[\int_a^b |X_t^n - X_t^m|^2 \, dt\Big] \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0 \ ,$$

gràcies a la primera part. Per tant,

$$\int_a^b X_t^n \, dW_t \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(\Omega)} \int_a^b X_t \, dW_t \ . \quad \square$$

9.3.10 Observació

La Proposició 9.3.9 suggereix que si ens restringim a processos de L_a^2, podem definir la integral estocàstica com un operador continu entre espais de Hilbert

$$L_a^2([a,b]\times\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \ .$$

Efectivament, podem repetir tot el que hem fet en aquesta situació més agradable, però menys general. $\square$

9.3.11 Proposició

Sigui $X \in \mathcal{P}[a,b]$. Aleshores:

1) Si $[a',b'] \subset [a,b]$, aleshores $X \in \mathcal{S}[a',b']$, $X \cdot \mathbf{1}_{]a'b']} \in \mathcal{S}[a,b]$, i

$$\int_{a'}^{b'} X_t \, dW_t = \int_a^b X_t \cdot \mathbf{1}_{]a',b']}(t) \, dW_t \ .$$

2) Si $c \in \,]a,b[$, aleshores $X \in \mathcal{S}[a,c]$, $X \in \mathcal{S}[c,b]$, i

$$\int_a^b X_t \, dW_t = \int_a^c X_t \, dW_t + \int_c^b X_t \, dW_t \ .$$

Si, a més, $X \in L^2_a([a,b]\times\Omega)$, *aleshores*

3) $\mathrm{E}\Big[\int_a^b X_t\,dW_t\Big] = 0$.

4) $\mathrm{E}\Big[\Big|\int_a^b X_t\,dW_t\Big|^2\Big] = \int_a^b \mathrm{E}[X_t^2]\,dt$.

Demostració: Les demostracions de 1) i 2) són immediates, usant les mateixes propietats per a processos de $\mathcal{S}[a,b]$ (Proposició 9.2.4) i passant al límit. Per veure 3) i 4) usarem la Proposició 9.3.9:

Sigui $\{X^n\}_n \subset \mathcal{S}[a,b]\cap L^2_a([a,b]\times\Omega)$ convergint a X en $L^2_a([a,b]\times\Omega)$. Tindrem que

$$\int_a^b X_t^n\,dW_t \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \int_a^b X_t\,dW_t \ ,$$

d'on

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\Big[\Big|\int_a^b X_t^n\,dW_t\Big|^2\Big] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{E}\Big[\Big|\int_a^b X_t\,dW_t\Big|^2\Big] \ , \\
&\int_a^b \mathrm{E}[(X_t^n)^2]\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b \mathrm{E}[X_t^2]\,dt \ , \mathrm{E}\Big[\Big|\int_a^b X_t^n\,dW_t\Big|\Big] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{E}\Big[\Big|\int_a^b X_t\,dW_t\Big|\Big] \ .
\end{aligned}$$

Aplicant la Proposició 9.2.4, obtenim les igualtats buscades. □

10. La integral de Itô com a procés

10.0.1 Definició

Sigui $X \in \mathcal{P}[0,T]$.
Definim el *procés integral estocàstica* com

$$I_t(X) = \int_0^t X_s \, dW_s \ , \quad t \in [0,T] \ .$$

Si $X \in \mathcal{P}[0,T]$, $\forall T > 0$, podem considerar $\{I_t(X),\ t \in \mathbb{R}^+\}$. $\square$

10.0.2 Proposició

$\{I_t(X),\ t \in [0,T]\}$ és no-anticipatiu respecte $\{\mathfrak{F}_t,\ t \in [0,T]\}$.

Demostració: Si $X^n \in \mathcal{S}[a,b]$ és tal que $X^n \to X$ en $\mathcal{P}$, aleshores

$$I_t(X^n) = \sum_{k=0}^{n-1} X_{t_k}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$$

per una certa partició de $[0,t]$, i és clarament una variable $\mathfrak{F}_t$-mesurable. Per tant $I_t(X) = \lim_{n\to\infty} I_t(X^n)$ és també $\mathfrak{F}_t$-mesurable.

10.0.3 Definició

Donada una filtració $\{\mathfrak{F}_t,\ t \in [0,T]\}$, un procés $\{Y_t,\ t \in [0,T]\}$ és una *martingala* respecte $\mathfrak{F}_t$ si $Y_t \in L^1(\Omega)$, $\forall t$, i

$$\mathrm{E}\left[{}^{Y_t}/_{\mathfrak{F}_s}\right] \ , \quad \forall s \leqslant t \ .$$

10.0.4 Proposició

Si $X \in L^2_a([0,T]\times\Omega)$, aleshores $\{I_t(X),\ t \in [0,T]\}$ és una $\mathfrak{F}_t$-martingala.

Demostració: Sabem que $I_t(X) \in L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$. Ara,

$$\mathrm{E}\left[{}^{I_t(X)}/_{\mathfrak{F}_s}\right] = \mathrm{E}\left[{}^{I_s(X)}/_{\mathfrak{F}_s}\right] + \mathrm{E}\left[{}^{I_t(X) - I_s(X)}/_{\mathfrak{F}_s}\right] \ .$$

El primer sumand és $I_s(X)$, per la Proposició 10.0.2. Només falta veure que el segon és zero. Sigui ξ una variable aleatòria $\mathfrak{F}_s$-mesurable i acotada.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[\xi\, \mathrm{E}\left[{}^{I_t(X) - I_s(X)}/_{\mathfrak{F}_s}\right]\right] &= \mathrm{E}\left[\, \mathrm{E}\left[{}^{\xi(I_t(X) - I_s(X)}/_{\mathfrak{F}_s}\right]\right] \\ = \mathrm{E}\left[\, \mathrm{E}\left[{}^{I_t(\xi X) - I_s(\xi X)}/_{\mathfrak{F}_s}\right]\right] &= \mathrm{E}\left[I_t(\xi X) - I_s(\xi X)\right] = 0 \ . \end{aligned}$$

(La segona igualtat és immediata per a $X \in \mathcal{S}$, i en general per pas al límit). □

10.0.5 Proposició (Localitat de la integral)
La integral estocàstica és local, en el sentit precís següent: Si $X, Y \in \mathcal{P}$ són tals que $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$, $\forall t \in [a,b]$, $\forall \omega \in A \in \mathfrak{F}$, aleshores

$$\int_a^b X_t\,dW_t = \int_a^b Y_t\,dW_t$$

sobre A.

Demostració: □

10.0.6 Teorema
Si $X \in \mathcal{P}[0,T]$, el procés $\{I_t,\ t \in [0,T]\}$ té una versió amb trajectòries contínues.

Demostració: □

A partir d'ara, suposarem sempre que prenem la versió de $I_t(X)$ amb trajectòries contínues.

10.0.7 Proposició
Si $X \in \mathcal{P}[0,T]$, aleshores $\forall \varepsilon > 0$, $\forall N > 0$,

$$P\Big\{\sup_{t\in[0,T]}\Big|\int_0^t X_s\,dW_s\Big| > N\Big\} \leqslant P\Big\{\int_0^T X_s^2\,dW_s\Big| > \varepsilon\Big\} + \frac{\varepsilon}{N^2}\ .$$

Demostració: □

10.0.8 Proposició
Si $\{X^n\}_n \subset CalP[0,T]$, $X \in \mathcal{P}[0,T]$, aleshores

$$\|X^n - X\|_{L^2([0,T])} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0 \Longrightarrow \sup_{t\in[0,T]}\Big|\int_0^t X_s^n\,dW_s\Big| > N - \int_0^t X_s\,dW_s\Big| > N\Big| \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0\ .$$

Demostració: □

11. Càlcul estocàstic

En el càlcul ordinari hi ha fórmules que ajuden a calcular les integrals sense haver de passar pel pas al límit de la definició.

En integració estocàstica també hi ha unes regles que ajuden en la manipulació de les integrals, és a dir, hi ha un càlcul estocàstic.

Aquest càlcul estocàstic té unes regles diferents del càlcul ordinari. Recordem que vam comentar que

$$\int_0^t W_s\,dW_s = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t \ ,$$

que no és el que escriuriem en el càlcul ordinari, on diriem que $d(\frac{1}{2}W_t^2) = W_t\,dW_t$.

Fem uns quants càlculs intuïtius:

Sigui $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C^\infty$. Volem calcular $\frac{d}{dt}(\varphi \circ W_t)$.

$$\varphi(W_{t+\Delta t}) - \varphi(W_t) = \varphi'(W_t)(W_{t+\Delta t} - W_t) + \frac{1}{2}\varphi''(W_t)(W_{t+\Delta t} - W_t)^2 + \dots$$

$$\frac{\varphi(W_{t+\Delta t}) - \varphi(W_t)}{\Delta t} = \varphi'(W_t)\frac{(W_{t+\Delta t} - W_t)}{\Delta t} + \frac{1}{2}\varphi''(W_t)\frac{(W_{t+\Delta t} - W_t)^2}{\Delta t} + \dots$$

Si W fos derivable,

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ W_t) = \varphi'(W_t)\frac{d}{dt}W_t \quad \text{(regla de la cadena)}$$

o

$$d(\varphi \circ W_t) = \varphi'(W_t)dW_t$$

o

$$\varphi \circ W_t = \varphi \circ W_0 + \int_0^t \varphi'(W_s)\,dW_s$$

En el nostre cas, podem fer tot això igualment, però com que $W_{t+\Delta t} - W_t$ té variació quadràtica Δt, el segon terme del desenvolupament de Taylor no va zero, sinò a $\frac{1}{2}\varphi''(W_t)$. Ens queda

$$\varphi \circ W_t = \varphi \circ W_0 + \int_0^t \varphi'(W_s)\,dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \varphi''(W_s)\,ds \ .$$

Veurem que aquesta intuïció és correcta i que això és el que surt realment. Obtindrem una fórmula per composicions del tipus $\varphi(W_t)$, però ens podem posar ja d'entrada den una situació una mica més general.

11.0.1 Definició $\{X_t,\ t \in [0,T]\}$ S'anomena *procés de Itô* si és de la forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_s\,ds + \int_0^t g_s\,dW_s \ ,$$

on
$$\{g_s,\ s\in[0,T]\}\in\mathcal{P}[0,T]\ ,$$
$$\{f_s,\ s\in[0,T]\}\text{ és no-anticipatiu i }\int_0^T|f_s(\omega)|\,ds<\infty,\text{ q.s.,}$$
$$X_0\text{ és }\mathfrak{F}_0\text{-mesurable.}$$

11.0.2 Proposició *Si X és una procés de Itô, aleshores*

1) X és no-anticipatiu.

2) X té una versió amb trajectòries contínues.

Demostració: □

11.0.3 Definició Si X és una procés de Itô de la forma anterior, direm que X té diferencial estocàstica
$$dX_t := f_t\,dt + g_t\,dW_t$$
en $[0,T]$.

11.0.4 Exemple Si admetem que $\int_0^t W_s\,dW_s = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t$, aleshores
$$W_t^2 = \int_0^t ds + \int 2W_s\,dW_s\ ,$$
d'on W_t^2 és un procés de Itô amb diferencial estocàstica
$$dW_t^2 = dt + 2W_t\,dW_t\ .$$

11.0.5 Teorema

it Sigui X un procés de Itô amb diferencial estocàstica
$$dX_t = f_t\,dt + g_t\,dW_t\ .$$
Sigui
$$\begin{aligned}\varphi\colon [0,T]\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (t,x) &\longmapsto \varphi(t,x)\end{aligned}$$
tal que $\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$, són funcions contínues en $[0,T]\times\mathbb{R}$.
Aleshores $Y_t := \varphi(t,X_t)$ és un procés de Itô en $[0,T]$ amb diferencial estocàstica
$$\begin{aligned}dY_t = &\Big[\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,X_t) + f_t\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,X_t) + \frac{1}{2}g_t^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t,X_t)\Big]\,dt\\ &\Big[g_t\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,X_t)\Big]\,dW_t\ .\end{aligned}$$

Demostració: □

11.0.6 Exemples

(1) Considerem el procés de Itô $W_t = \int_0^t dW_s$. Considerem $\varphi(t,x) = x^2$. Per la Fórmula d'Itô,

$$W_t^2 = \int_0^t \frac{1}{2} \cdot 2\,ds + \int_0^t 2W_s\,dW_s \ ,$$

d'on

$$\int_0^t W_s\,dW_s = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t \ .$$

(2) Considerem $X_t = \displaystyle\int_0^t s\,dW_s$. Integrant per parts,

$$\int_0^t s\,dW_s = tW_t - \int_0^t W_s\,ds \ .$$

(El mateix s'obté amb la Fórmula de Itô aplicada a $\varphi(t,x) = tx$ i W_t.)

Aquesta igualtat pot servir per calcular la llei de $\displaystyle\int_0^t W_s\,ds$:

$$\begin{aligned}\int_0^t W_s\,ds &= t\sum_{k=1}^m (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) - \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{k=1}^m t_{k-1}(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) \\ &= \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{k=1}^m (t - t_{k-1})(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) \sim N(0, \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{k=1}^m (t-t_{k-1})^2(t_k - t_{k-1}) \\ &= N(0, \int_0^t (t-s)^2\,ds = N(0, t^3/3) \ .\end{aligned}$$

11.0.7 Observació

La Fórmula de Itô es pot expressar de manera més fàcil de recordar:

$$d\varphi(t,X_t) = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,X_t)\,dt + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t,X_t)\,(dX_t)^2$$

("regla de la cadena" o "fórmula de les diferencials totals") convenint que, al fer

$$(f_t\,dt + g_t\,dW_t)^2 = f_t^2\,(dt)^2 + g_t^2\,(dW_t)^2 + f_t g_t\,dt\,dW_t \ ,$$

cal usar

$$dt \cdot dt = 0 \ , \quad dt \cdot dW_t = 0 \ , \quad dW_t \cdot dW_t = dt \ ,$$

fórmules que s'apoien intuïtivament en

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^m (t_k - t_{k-1})^2 \longrightarrow 0 \ , \\ &\sum_{k=1}^m (t_k - t_{k-1})(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) \longrightarrow 0 \ , \\ &\sum_{k=1}^m (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 \longrightarrow t \ .\end{aligned}$$

11.0.8 Teorema (Fórmula de Itô per n processos)

Siguin X^i, $i = 1,\dots,n$ processos d'Itô amb diferencial estocàstica

$$dX_t^i = f_t^i\,dt + g_t^i\,dW_t \ .$$

Sigui $\varphi\colon [0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tal que* $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i x_j}$, *són funcions contínues en* $[0,T]\times\mathbb{R}^n$. *Aleshores* $Y_t := \varphi(t, X_t^1,\dots,X_t^n))$ *és un procés de Itô en* $[0,T]$ *amb diferencial estocàstica*

$$dY_t = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,\vec{X}_t)\,dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(t,\vec{X}_t)\,dX_t^i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i x_j}(t,\vec{X}_t)\,dX_t^i\,dX_t^j \ .$$

11.0.9 Exemple

Siguin $\varphi(t,x_1,x_2) = x_1x_2$, i $dX_t^i = f_t^i\,dt + g_t^i\,dW_t$, $i=1,2$. Aleshores

$$d(X_t^1X_t^2) = X_t^2\,dX_t^1 + X_t^1\,dX_t^2 + dX_t^1\,dX_t^2 \ .$$

Obtenim així una "Fórmula d'Integració per Parts":

$$\int_0^t X_s^2\,dX_s^1 = X_t^1X_t^2X_0^1X_0^2 - \int_0^t X_s^1\,dX_s^2 - \int_0^t g_s^1g_s^2\,ds \ .$$

Per exemple,

$$\int_0^t W_s\,dW_s = W_t^2 - W_0^2 - \int_0^t W_s\,dW_s - \int_0^t ds \ ,$$

que implica que

$$\int_0^t W_s\,dW_s = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t \ .$$

□

11.0.10 Exemple

De la Fórmula de Itô, si $X_t = W_t$ i $\varphi(t,x) = \varphi(x)$, tenim

$$\varphi(W_t) = \varphi(W_0) + \int_0^t \varphi'(W_s)\,dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \varphi''(W_s)\,ds$$

("Teorema Fonamental del Càlcul"), o

$$\int_0^t \varphi'(W_s)\,dW_s = \varphi(W_t) - \varphi(W_0) - \frac{1}{2}\int_0^t \varphi''(W_s)\,ds$$

("Regla de Barrow").
Per exemple, si $\varphi'(x) = x^n$, obtenim

$$\int_0^t W_s^n\,dW_s = \frac{1}{n+1}(W_t^{n+1} - W_0^{n+1}) - \frac{n}{2}\int_0^t W_s^{n-1}\,ds$$

□

11.0.11 Exemple

Volem trobar un procés X_t que satisfagui

$$\begin{cases} dX_t = X_t\,dW_t \ , & t \geqslant 0 \ , \\ X_0 = 1 \ . \end{cases}$$

Això és el que s'anomena "equació diferencial estocàstica" (molt senzilla). Equivalentment, podem formular-la com

$$X_t = 1 + \int_0^t X_s\,dW_s \ .$$

Si W_t fos derivable, esscriuriem

$$\frac{dX_t}{X_t} = \dot{W}_t\,dt \Rightarrow d(\log X_t) = \dot{W}_t\,dt \Rightarrow$$
$$\log X_t = \int_0^t \dot{W}_s\,ds \Rightarrow X_t = e^{W_t}\ .$$

FALS!

Podem fer un raonament similar, però usant la Fórmula de Itô, i obtindrem el resultat correcte:

$$\begin{aligned}
&d(\log X_t) = \frac{1}{X_t}\,dX_t + \frac{1}{2}\frac{-1}{X_t^2}\,(dX_t)^2 \\
&= \frac{1}{X_t} X_t\,dW_t - \frac{1}{2}\frac{-1}{X_t^2} X_t^2\,(dW_t)^2 \\
&= dW_t - \frac{1}{2}\,dt\ , \quad \Rightarrow \\
&\log X_t = \log X_0 + W_t - \frac{1}{2}t\ , \quad \Rightarrow \\
&X_t = \exp\{W_t - \frac{1}{2}t\}\ ,
\end{aligned}$$

("funció exponencial estocàstica").