Mesura i Probabilitat

Aureli Alabert

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

Originally published by *Servei de Publicacions de la UAB*, September 1996 (1st edition), and September 1997 (2nd edition).
Released to public domain by the author, May 2002.

Índex

Presentació

Aquest és un text introductori a la teoria matemàtica de la mesura i la probabilitat. Es dóna per suposat que el lector té un bon maneig del llenguatge de la teoria de conjunts, i coneixements bàsics de topologia i espais mètrics, com també del càlcul elemental a $\mathbb{R}^n$ i de les operacions amb nombres complexos. Des del punt de vista formal, per llegir-lo no és necessari cap coneixement previ sobre probabilitats, estadística, mesura o integració. Això no obstant, ha estat concebut com a llibre de text per a estudiants de matemàtiques que ja han seguit un curs elemental d'estadística i han tingut contacte amb la teoria de la integració de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. La matèria coberta es pot encabir amb comoditat en un curs quadrimestral.

L'estil expositor és deliberadament eixut, semblant al que tindrien unes notes preses a l'aula. L'autor pretén que el text sigui útil a l'estudiant que ha de digerir en un temps curt uns coneixements no trivials i demostrar immediatament després que els domina. Tanmateix, no puc deixar de recomanar a l'estudiant que cedeixi a la temptació de fer un passeig bibliogràfic cada cop que alguna cosa desperti la seva curiositat.

No s'ha fet cap esforç especial per simplificar la notació o substituir símbols matemàtics per llenguatge ordinari. Una notació prou descriptiva tendeix a estalviar males interpretacions i ambigüitats. De fet, la tendència a la sobresimplificació de notació és al meu parer una reminiscència del drama d'intentar escriure matemàtiques amb una màquina tradicional. Afortunadament, tals limitacions han passat a la història.

Al final de cada capítol s'hi inclou una llista de problemes. Gairebé tots els exercicis intercalats en el text fan referència a algun d'aquests problemes. Es suggereix intentar fer-los en el moment en què apareixen, com a ajuda al seguiment de la teoria.

El que segueix és una llista dels convenis de notació i nomenclatura que regeixen en tot el llibre; la majoria d'ells són habituals i obvis. Es recomana al lector de referir-s'hi en cas de dubte durant la lectura.

Lògica: 'sii' és l'abreviatura de 'si i només si'. La notació $a := b$ indica que a és *per definició* igual a b. El símbol d'implicació ($\Rightarrow$) pot servir per expressar la proposició lògica $p \Rightarrow q$, amb la qual no s'afirma la veracitat ni la falsedat de p o q, o bé que sabem que p és cert, i que d'això se'n dedueix q. Normalment aquesta distinció és evident pel context. Només quan hi ha possibilitat de confusió, escriurem $p, \Rightarrow q$ per enfasitzar que ja sabem la veracitat de p.

Conjunts: La paraula 'col·lecció' s'utilitza com a sinònim de 'conjunt', per evitar la cacofonia d'expressions com ara "conjunt de conjunts". Un conjunt A és *finit* si té una quantitat finita d'elements, que es denota per $\operatorname{card} A$. Un conjunt A és *numerable* si és finit o infinit numerable. La *resta* de dos conjunts $A - B$ és el conjunt que té els elements de A que no són de B. A^c és el conjunt *complementari de A* respecte d'un conjunt de referència Ω fixat prèviament; és a dir, $A^c = \Omega - A$. El conjunt de les *parts d'un conjunt* Ω es nota $\mathcal{P}(\Omega)$ i és la col·lecció de tots els subconjunts de Ω. Una *família de conjunts* $\{A_i\}_{i\in I}$ és una aplicació que a cada índex i del conjunt d'índexs I li assigna un conjunt. La notació $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathfrak{C}$ indica que els conjunts de la família són de la col·lecció de conjunts $\mathfrak{C}$. Quan parlem d'unió $\bigcup_{i\in I} A_i$ o intersecció $\bigcap_{i\in I} A_i$ *finita, numerable* o *arbitrària* d'una família ens referim que el conjunt d'índexs de la família és, respectivament, finit, numerable o de cardinalitat qualsevol. Quan se sap que una família és *disjunta* (és a dir, $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$), escriurem la seva unió com $\biguplus_{i\in I} A_i$. Normalment, una família numerable s'indexa amb els nombres naturals, i s'escriu $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en el cas infinit, o $\{A_n\}_{n=1}^{k}$ en el cas finit. Les notacions $\bigcup_n A_n$ i $\biguplus_n A_n$, on no s'especifica el conjunt al qual pertany l'índex n, indiquen que la unió és finita o infinita numerable. Una *successió* és una aplicació que té per conjunt inicial el dels nombres naturals $\mathbb{N}$, i per tant és un cas particular de família infinita numerable. La qüestió de si el zero és un nombre natural o no és irrellevant quan es tracta amb successions i en general en tot aquest llibre. El més còmode a efectes pràctics és pensar que $0 \notin \mathbb{N}$.

Funcions: La paraula 'funció' és sinònim de 'aplicació', llevat que s'indiqui explícitament un domini més petit que el conjunt inicial. La restricció d'una funció f a un conjunt A s'indica per $f_{|A}$. $\operatorname{Im} f$ és el conjunt imatge de f. f^{-1} és la funció inversa de f.

Nombres: Se suposen conegudes pel lector l'estructura d'ordre i l'aritmètica de la recta real estesa $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. A l'apartat 2.1 s'expliciten totes les estructures sobre $\bar{\mathbb{R}}$ que haurem de considerar. En el context de $\bar{\mathbb{R}}$, l'expressió 'a és finit' vol dir '$a \in \mathbb{R}$'. Si $r \in \mathbb{R}$, les expressions del tipus '$a > r$' indiquen implícitament que $a \in \mathbb{R}$, si no es diu el contrari. Les propietats bàsiques dels nombres complexos també se suposen conegudes. Si $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z$ i $\operatorname{Im} z$ denoten la part real i la part imaginària de z. $\bar{z}$ és el conjugat de z.

Topologia: Els límits de successions numèriques o de funcions es consideren com elements de $\bar{\mathbb{R}}$. En particular, si 'el límit existeix', pot ser un nombre real o un infinit. Explicitem que és un nombre real escrivint 'el límit existeix i és finit'. Per exemple, les successions monòtones de nombres reals sempre tenen límit (finit o no.) De vegades abreviarem $f(a^-) := \lim_{x\to a^-} f(x)$ i $f(a^+) := \lim_{x\to a^+} f(x)$ (límits laterals de la funció f en a). La derivada n-èsima de f l'escriurem $f^{(n}$. L'adherència d'un conjunt A es denota per $\overline{A}$, i el seu interior per $\mathring{A}$.

Ordre: Els intervals oberts els escriurem $]a, b[$ (mai amb parèntesis ordinaris). $A \subset B$ és una inclusió no estricta de conjunts. Reservem $A \subsetneq B$ per a la inclusió estricta ($A \subset B$ i $A \neq B$.) Un element $a \in \bar{\mathbb{R}}$ és *positiu* si $a \geqslant 0$, i *estrictament positiu* si $a > 0$. Anàlogament amb *negatiu* i *estrictament negatiu*. Una funció f és *creixent* si $x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$ i *estrictament creixent* si $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. Anàlogament amb *decreixent* i *estrictament decreixent*.

1. Mesures

1.1 Espais de mesura

1.1.1 Definició

Sigui Ω un conjunt qualsevol.
Sigui $\mathfrak{F}$ una col·lecció de subconjunts de Ω ($\mathfrak{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$).
$\mathfrak{F}$ és una *σ-àlgebra* de $\mathcal{P}(\Omega)$ sii

1) $\Omega \in \mathfrak{F}$.
2) $A \in \mathfrak{F} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{F}$.
3) Si $\{A_n\}_n$ és una família numerable d'elements de $\mathfrak{F}$, llavors $\bigcup\limits_n A_n \in \mathfrak{F}$.

1.1.2 Observacions

1) $\emptyset \in \mathfrak{F}$, per 1) i 2) de la definició. Aquesta condició pot substituir 1).
2) Si $\{A_n\}_n$ és una família numerable d'elements de $\mathfrak{F}$, llavors $\bigcap\limits_n A_n \in \mathfrak{F}$, gràcies a les condicions 2) i 3):
$$A_n \in \mathfrak{F} \Rightarrow A_n^c \in \mathfrak{F} \Rightarrow \bigcup_n A_n^c \in \mathfrak{F} \Rightarrow \left(\bigcup_n A_n^c\right)^c \in \mathfrak{F} \ ,$$
i $\left(\bigcup\limits_n A_n^c\right)^c = \bigcap\limits_n A_n$.
Aquesta condició pot substituir 3).

1.1.3 Exemples

1) $\mathfrak{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ és la σ-àlgebra de $\mathcal{P}(\Omega)$ més gran possible.
2) $\mathfrak{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ és la σ-àlgebra de $\mathcal{P}(\Omega)$ més petita possible.
3) Si $A \subset \Omega$, aleshores $\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ és una σ-àlgebra. Observeu que és la σ-àlgebra més petita que conté al conjunt A. $\square$

Donada una col·lecció qualsevol de subconjunts de Ω, volem considerar la mínima σ-àlgebra que els conté. 'Mínima' vol dir aquí la més petita per la relació d'inclusió.

1.1.4 Definició

Sigui $\mathfrak{C}$ una col·lecció de subconjunts de Ω.

S'anomena *σ-àlgebra generada per* $\mathfrak{C}$ la intersecció de totes les σ-àlgebres que contenen $\mathfrak{C}$. L'escriurem $\sigma(\mathfrak{C})$.

1.1.5 Exercici

(Vegeu el Problema **1.1**.) Per tal que la Definició 1.1.4 tingui sentit cal comprovar que almenys existeix una σ-àlgebra que conté $\mathfrak{C}$ (trivial: $\mathcal{P}(\Omega)$), i que la intersecció d'una família arbitrària no buida de σ-àlgebres és σ-àlgebra.
Per tal que assoleixi l'objectiu, cal comprovar que la σ-àlgebra generada per $\mathfrak{C}$ és en efecte la σ-àlgebra més petita possible a la qual pertanyen tots els elements de $\mathfrak{C}$. (Això també és evident.)

1.1.6 Definició

Sigui Ω un conjunt.
Sigui $\mathfrak{F}$ una σ-àlgebra de $\mathcal{P}(\Omega)$.
Una *mesura* sobre $\mathfrak{F}$ és una aplicació

$$\mu\colon \mathfrak{F} \longrightarrow [0, +\infty]$$

complint: Si $\{A_n\}_n \subset \mathfrak{F}$ és una família numerable d'elements de $\mathfrak{F}$ disjunts dos a dos (i.e. $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$), aleshores

$$\mu\big(\bigcup_n A_n\big) = \sum_n \mu(A_n) \qquad \square$$

La condició anterior s'anomena *propietat d'additivitat numerable* o de *σ-additivitat* de les mesures.

1.1.7 Definició

Sigui Ω un conjunt.
Sigui $\mathfrak{F}$ una σ-àlgebra de $\mathcal{P}(\Omega)$.
El parell $(\Omega, \mathfrak{F})$ és un *espai mesurable*. Els elements de $\mathfrak{F}$ s'anomenen *conjunts mesurables* de $(\Omega, \mathfrak{F})$.
La terna $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$, on μ és una mesura sobre $\mathfrak{F}$, s'anomena *espai de mesura*.

1.1.8 Exemples

1) En qualsevol espai mesurable $(\Omega, \mathfrak{F})$ s'hi poden posar mesures: $\mu \equiv 0$ i $\mu \equiv +\infty$ són mesures (completament inútils, per cert).
2) Sigui $(\Omega, \mathfrak{F})$ un espai mesurable. Definim, $\forall A \in \mathfrak{F}$,

$$\mu(A) = \begin{cases} \operatorname{card} A, & \text{si } A \text{ és finit.} \\ +\infty, & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

   Llavors μ és una mesura (vegeu el Problema **1.2**), que s'anomena *la mesura comptadora* en $(\Omega, \mathfrak{F})$.
3) (Per a lectors familiaritzats amb la Teoria de la Integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.) Si $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ és la col·lecció de conjunts mesurables en el sentit de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, i λ és la mesura de Lebesgue sobre $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$, llavors $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n), \lambda)$ és un espai de mesura. (Vegeu els Exemples 1.2.19, més endavant.)
4) (Molt important.) Sobre $\Omega = \mathbb{R}^n$ considerem la σ-àlgebra generada pels conjunts oberts de $\mathbb{R}^n$ per la topologia usual. Aquesta σ-àlgebra està inclosa estrictament en $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ i s'anomena *σ-àlgebra de Borel en* $\mathbb{R}^n$. L'escriurem $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$. Els elements de $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ s'anomenen *borelians de* $\mathbb{R}^n$. La mesura de Lebesgue (exemple anterior) restringida a $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ dóna lloc a un espai de mesura $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n), \lambda)$.

1.1.9 Observació

Una propietat immediata de les mesures és:

$$\forall A, B \in \mathfrak{F}, \quad A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leqslant \mu(B) \ . \tag{1.1.1}$$

Efectivament, $\mu(B) = \mu(A \uplus (B - A)) = \mu(A) + \mu(B - A) \geqslant \mu(A)$.
La propietat (1.1.1) s'anomena *Propietat de monotonia* de les mesures.

1.1.10 Definició

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ un espai de mesura.
μ és una *mesura finita* sii $\mu(\Omega) < +\infty$.
μ és una *mesura de probabilitat* (o una *probabilitat*, simplement) sii $\mu(\Omega) = 1$; en tal cas, $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ s'anomena *espai de probabilitat*, i dels conjunts mesurables se'n diu també *esdeveniments*. □

L'Observació 1.1.9 justifica el nom de "mesura finita": $\mu(\Omega) < +\infty$ implica que $\mu(A) < +\infty$, $\forall A \in \mathfrak{F}$, i per tant l'aplicació μ pren valors en $[0, +\infty[$. Anàlogament, una probabilitat pren valors en $[0, 1]$.

1.1.11 Exemple

Suposem que Ω és un conjunt numerable.
Associem a cada $\omega \in \Omega$ un nombre $p_\omega \geqslant 0$ de forma que $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$. (Òbviament és possible: qualsevol sèrie de termes positius de suma igual a 1 serveix.)
Per a tot $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, definim $\mu(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$.
Llavors, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu)$ és un espai de probabilitat. (Vegeu el Problema **1.3**.) □

Veurem a continuació algunes estructures més generals, de les quals els espais de mesura en seran un cas particular.

Una mesura és una aplicació el domini de la qual és una σ-àlgebra de subconjunts d'un cert conjunt de referència. En general, una aplicació que té per domini una col·lecció de subconjunts d'un conjunt univers donat, i a valors on sigui, l'anomenem una *funció de conjunt*. Convenim a anomenar *funció de conjunt positiva* la que pren valors a l'interval $[0, +\infty]$ (l'infinit inclòs!). Podem dir doncs que una mesura és una funció de conjunt positiva numerablement additiva definida sobre una σ-àlgebra.

1.1.12 Definició

Sigui Ω un conjunt.
Sigui $\mathfrak{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ una col·lecció qualsevol de subconjunts de Ω.
Sigui $\mu\colon \mathfrak{C} \longrightarrow [0, +\infty]$ una funció de conjunt positiva.
Diem que μ és *(finitament) additiva* sii

$$\begin{gathered} \forall \{A_k\}_{k=1}^n \subset \mathfrak{C} \text{ família finita,} \\ \Big[\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathfrak{C} \ \text{ i } \ \big(i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset\big)\Big] \Longrightarrow \mu\big(\bigcup_{k=1}^n A_k\big) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k) \ , \end{gathered} \tag{1.1.2}$$

Diem que μ és *numerablement additiva* (o *σ-additiva*) sii

$$\begin{gathered} \forall \{A_n\}_n \subset \mathfrak{C} \text{ família numerable,} \\ \Big[\bigcup_n A_n \in \mathfrak{C} \ \text{ i } \ \big(i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset\big)\Big] \Longrightarrow \mu\big(\bigcup_n A_n\big) = \sum_n \mu(A_n) \ . \end{gathered}$$

1.1.13 Exercicis

1) Suposem que $\emptyset \in \mathfrak{C}$. Si μ és additiva i $\mu \not\equiv +\infty$, aleshores $\mu(\emptyset) = 0$. (Vegeu el Problema **1.7**.)

2) Si $\mathfrak{C}$ és estable per unions finites (i.e. la unió de tota família finita de conjunts de $\mathfrak{C}$ és un conjunt de $\mathfrak{C}$), aleshores (1.1.2) és equivalent a

$$\forall A, B \in \mathfrak{C}, \quad A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \ .$$

Comproveu també que l'estabilitat per unions finites equival a l'enunciat: « $A, B \in \mathfrak{C} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{C}$ ».

1.1.14 Definició

Sigui Ω un conjunt.
Sigui $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.
$\mathfrak{A}$ és una *àlgebra* de $\mathcal{P}(\Omega)$ sii

1) $\Omega \in \mathfrak{A}$.
2) $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{A}$.
3) Si $\{A_k\}_{k=1}^n$ és una família finita d'elements de $\mathfrak{A}$, aleshores $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathfrak{A}$.

1.1.15 Observacions

1) Tota σ-àlgebra és una àlgebra. A l'inrevés no és cert.
2) Valen per a àlgebres observacions similars a les de 1.1.2 per a σ-àlgebres:
   i) $\emptyset \in \mathfrak{A}$.
   ii) Una àlgebra és estable per interseccions finites. □

Hom pot considerar l'àlgebra generada per una col·lecció de conjunts, de manera totalment anàloga al cas de les σ-àlgebres. De fet, és fàcil veure que té sentit considerar la "estructura" generada per una col·lecció de conjunts, sempre que la "estructura" estigui definida per propietats d'estabilitat. Per exemple, hom parla de la topologia generada per una col·lecció de conjunts (mínima topologia que fa oberts tots els conjunts de la col·lecció).

1.1.16 Definició

Sigui $\mathfrak{C}$ una col·lecció de subconjunts de Ω.
S'anomena *àlgebra generada per* $\mathfrak{C}$ a la intersecció de totes les àlgebres que contenen $\mathfrak{C}$.
L'escriurem $a(\mathfrak{C})$.

1.1.17 Proposició

Sigui $\mathfrak{A}$ una àlgebra de $\mathcal{P}(\Omega)$.
Sigui $\mu: \mathfrak{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ una funció de conjunt positiva additiva.
Aleshores:

1) $A, B \in \mathfrak{A} \Rightarrow \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.
2) Monotonia:
$$\forall A, B \in \mathfrak{A}, \quad A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leqslant \mu(B) \ .$$
3) Subadditivitat finita:
$$A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A} \Rightarrow \mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leqslant \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n) \ .$$

Suposem a més que μ és σ-additiva. Aleshores:

4) Subadditivitat numerable:
$$\forall \{A_n\}_n \subset \mathfrak{A} \textit{ família numerable}, \quad \bigcup_n A_n \in \mathfrak{A} \Rightarrow \mu\big(\bigcup_n A_n\big) \leqslant \sum_n \mu(A_n) \ .$$

Demostració:
1)

$$\mu(A)=\mu\big((A\cap B)\uplus(A\cap B^c)\big)=\mu(A\cap B)+\mu(A\cap B^c)\ . \tag{1.1.3.a}$$
$$\mu(B)=\mu\big((B\cap A)\uplus(B\cap A^c)\big)=\mu(B\cap A)+\mu(B\cap A^c)\ . \tag{1.1.3.b}$$

Sumant (1.1.3.a) i (1.1.3.b),

$$\begin{aligned}\mu(A)+\mu(B)&=\mu(A\cap B)+\big[\mu(A\cap B^c)+\mu(B\cap A^c)+\mu(B\cap A)\big]\\&\overset{(1)}{=}\mu(A\cap B)+\mu\big((A\cap B^c)\uplus(B\cap A^c)\uplus(B\cap A)\big)\\&\overset{(2)}{=}\mu(A\cap B)+\mu(A\cup B)\ .\end{aligned}$$

(1) Per l'additivitat de μ, puix que els conjunts en qüestió són disjunts.
(2) Es comprova fàcilment que la unió disjunta és igual a $A\cup B$.

2)

$$\mu(B)=\mu(A\uplus(B\cap A^c))=\mu(A)+\mu(B\cap A^c)\geqslant\mu(A)\ .$$

3)

$$\begin{aligned}&\mu(A_1\cup\cdots\cup A_n)\\&\overset{(1)}{=}\mu\big(A_1\uplus(A_2\cap A_1^c)\uplus(A_3\cap A_1^c\cap A_2^c)\uplus\cdots\uplus(A_n\cap A_1^c\cap\cdots\cap A_{n-1}^c)\big)\\&=\mu(A_1)+\mu(A_2\cap A_1^c)+\mu(A_3\cap A_1^c\cap A_2^c)+\cdots+\mu(A_n\cap A_1^c\cap\cdots\cap A_{n-1}^c)\\&\overset{(2)}{\leqslant}\mu(A_1)+\mu(A_2)+\mu(A_3)+\cdots+\mu(A_n)\ .\end{aligned}$$

(1) Aquest és el truc habitual per convertir una unió qualsevol en una unió disjunta.
(2) Per la propietat de monotonia.

4) El procés de *3)* es pot fer també amb una infinitud numerable de conjunts:

$$\begin{aligned}\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\big)&=\mu\big(\biguplus_{n=1}^{\infty}(A_n\cap A_1^c\cap\cdots\cap A_{n-1}^c)\big)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n\cap A_1^c\cap\cdots\cap A_{n-1}^c)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\end{aligned}\qquad\square$$

Ens interessa ara enunciar uns criteris per saber si una funció de conjunt positiva additiva sobre una àlgebra és o no σ-additiva sobre l'àlgebra.

Introduïm primer certa nomenclatura relativa a successions de conjunts: Una successió de conjunts $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és *creixent* sii $\forall n,\ A_n\subset A_{n+1}$; és *decreixent* sii $\forall n,\ A_n\supset A_{n+1}$; és *monòtona* sii és creixent o decreixent. Per definició, el límit d'una successió creixent de conjunts $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és $\lim\limits_{n\to\infty}A_n:=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$; anàlogament, el límit d'una successió decreixent de conjunts $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és $\lim\limits_{n\to\infty}A_n:=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. De vegades escrivim $A_n\nearrow A$ per abreviar $[A_n\subset A_{n+1}$ i $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n]$, i $A_n\searrow A$ per abreviar $[A_n\supset A_{n+1}$ i $A=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n]$. Vegeu els Problemes **1.17** i **1.18** per més informació (important!) sobre límits de successions de conjunts.

1.1.18 Proposició

Sigui Ω *un conjunt.*
Sigui $\mathfrak{A}$ *una àlgebra de* $\mathcal{P}(\Omega)$.

Sigui $\mu\colon \mathfrak{A} \longrightarrow [0,+\infty]$ *una funció de conjunt positiva additiva,* $\mu \not\equiv +\infty$.
Aleshores:

1) (Caracterització per successions creixents.)
μ *és* σ*-additiva* $\Longleftrightarrow$ *Per a tota successió* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$*, amb* $A_n \nearrow A \in \mathfrak{A}$*, es té* $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

2) (Caracterització per successions decreixents.)

a) μ *és* σ*-additiva* $\Longrightarrow$ *Per a tota successió* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$*, amb* $A_n \searrow A \in \mathfrak{A}$ *i* $\mu(A_1) < +\infty$*, es té* $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

b) Si per a tota successió $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$*, amb* $A_n \searrow \emptyset$*, es té que* $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$*, aleshores* μ *és* σ*-additiva.*

Demostració:
1)

$\Rightarrow$) Sigui $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ creixent amb $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A \in \mathfrak{A}$.

$$\mu(A) = \mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) \overset{(1)}{=} \mu\big(\biguplus_{n=1}^{\infty} (A_n - A_{n-1})\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n - A_{n-1})$$
$$\overset{(2)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \big(\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})\big) \overset{(3)}{=} \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) - \mu(A_0) \overset{(4)}{=} \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \ .$$

(1) Posant $A_0 = \emptyset$. Disjuntem els conjunts com en la Proposició 1.1.17, *3)*; aquí queda més senzill per la monotonia de la successió.

(2) Gràcies a l'additivitat finita. En la eventualitat que alguna resta no es pogués fer ($\infty - \infty$), la successió $\{\mu(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ seria idènticament $+\infty$ a partir d'un cert moment, i la propietat de monotonia (Proposició 1.1.17, *2)*) ens diria que $\mu(A) = \infty$ i l'enunciat seria cert també.

(3) És una sèrie telescòpica.

(4) Vegeu l'Exercici 1.1.13, 2).

$\Leftarrow$) Sigui $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ una família numerable de conjunts disjunts dos a dos tal que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A \in \mathfrak{A}$.

$$\mu(A) \overset{(1)}{=} \mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\big)\big) = \lim_{n\to\infty} \mu\big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\big) \overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \ .$$

(1) Aquest és el truc habitual per convertir una unió numerable qualsevol en límit d'una successió creixent. $\big\{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ és creixent.

(2) Per l'additivitat finita.

2)

a) Sigui $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ decreixent amb $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A \in \mathfrak{A}$ i $\mu(A_1) < \infty$.

$$\mu(A_1) - \mu(A) = \mu(A_1 - A) = \mu\big(A_1 - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\big) \overset{(1)}{=} \mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 - A_n)\big)$$
$$\overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 - A_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \ .$$

(1) Usem que el complementari d'una intersecció és la unió de complementaris.

(2) Aplicant l'apartat *1)*, puix que $\{A_1 - A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és creixent.

b) Sigui $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ una família numerable de conjunts disjunts dos a dos tal que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A \in \mathfrak{A}$.

$$\mu(A) = \mu\big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\big) + \mu\big(A - \bigcup_{k=1}^{n} A_k\big), \quad \forall n \quad \Rightarrow$$
$$\mu(A) \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} \mu\big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \ .$$

(1) Passant al límit. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \big(A - \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\big) = \emptyset$, i per tant, per hipòtesi, el segon sumand té límit zero. □

1.1.19 Observacions

Sobre la Proposició 1.1.18:

1) La condició $\mu(A_1) < +\infty$ en $2a)$ és fonamental (vegeu el Problema **1.6**), i implica que tots els conjunts de la successió tenen mesura finita. És clar, però, que es pot imposar simplement $\mu(A_{n_0}) < \infty$ per un cert n_0 qualsevol, puix que els canvis en els primers elements d'una successió no afecten el seu límit.

2) La hipòtesi de $2b)$ és equivalent a:
Per a tota successió $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$*, amb* $A_n \searrow A \in \mathfrak{A}$ *i* $\mu(A_1) < +\infty$*, es té que* $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$*.* (Exercici.)
L'enunciat de la proposició ens diu que només cal comprovar aquesta condició quan $A = \emptyset$.

1.1.20 Corol·lari

Si $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ *és un espai de probabilitat (o, més en general, si* μ *és una mesura finita), aleshores*

$$A_n \nearrow A \Rightarrow \mu(A_n) \nearrow \mu(A) \tag{1.1.4.a}$$
$$A_n \searrow A \Rightarrow \mu(A_n) \searrow \mu(A) \quad \square \tag{1.1.4.b}$$

Degut a (1.1.4), es diu que les probabilitats tenen la *propietat de continuïtat sobre successions monòtones*.

Introduïm encara una estructura més general que la d'àlgebra:

1.1.21 Definició

Sigui Ω un conjunt.
Sigui $\mathfrak{S} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.
$\mathfrak{S}$ és una *semiàlgebra* de $\mathcal{P}(\Omega)$ sii

1) $\Omega \in \mathfrak{S}$.
2) $A, B \in \mathfrak{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{S}$.
3) $A \in \mathfrak{S} \Rightarrow A^c$ és unió finita de conjunts de $\mathfrak{S}$ disjunts dos a dos.

1.1.22 Observacions

1) Tota àlgebra és una semiàlgebra. A l'inrevés no és cert.
2) ~~Es defineix la semiàlgebra~~ $\cancel{s(\mathfrak{C})}$ ~~generada per una col·lecció de conjunts~~ $\cancel{\mathfrak{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)}$ ~~de manera anàloga a la~~ $\cancel{\sigma}$~~-àlgebra i l'àlgebra generades.~~

1.1.23 Exemple (important)

Sigui $\Omega = \mathbb{R}$. La família de conjunts formada pels intervals de la forma $]a,b]$, $]-\infty,b]$, $]a,+\infty[$, $\emptyset$, $\mathbb{R}$ $(a < b \in \mathbb{R})$, és una semiàlgebra de $\mathcal{P}(\Omega)$ que no és àlgebra. La comprovació és un exercici trivial.

Hi ha un exemple anàleg per a $\mathbb{R}^n$ (vegeu el Problema **1.10**).

1.1.24 Observació

Les propietats *1), 2), 3)* i *4)* de la Proposició 1.1.17, vàlides per a àlgebres, també són certes per a semiàlgebres, amb lleugeres precisions a l'enunciat. (Vegeu el Problema **1.11**.)

1.2 Determinació de mesures

Donar una mesura sobre una σ-àlgebra és, en principi, donar el valor de $\mu(A)$ per a tot conjunt A de la σ-àlgebra.

Seria interessant saber si és possible fixar el valor de $\mu(A)$ sobre uns quants conjunts de la σ-àlgebra de manera que μ quedi determinada. En altres paraules, de manera que existeixi una única mesura que prengui els valors donats sobre la col·lecció més petita de conjunts. Això és en efecte possible, i de gran utilitat.

Hem d'introduir, per començar, una nova estructura auxiliar.

1.2.1 Definició

Sigui Ω un conjunt.

Sigui $\mathfrak{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathfrak{M} \neq \emptyset$.

$\mathfrak{M}$ és una *classe monòtona* sii per a tota successió $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}$ monòtona es té $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \in \mathfrak{M}$.

1.2.2 Observació

$\mathfrak{C}$ és σ-àlgebra $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{C}$ és àlgebra i classe monòtona.

La implicació $(\Rightarrow)$ és òbvia. Implicació contrària:

Si $A_n \in \mathfrak{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, llavors

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathfrak{C} \ ,$$

doncs $\big\{ \bigcup_{k=1}^{n} A_k \big\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió creixent de conjunts de $\mathfrak{C}$, i per tant el seu límit també és de $\mathfrak{C}$.

1.2.3 Definició

Sigui $\mathfrak{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

S'anomena *classe monòtona generada per* $\mathfrak{C}$ la intersecció de totes les classes monòtones que contenen $\mathfrak{C}$. L'escriurem $m(\mathfrak{C})$.

1.2.4 Teorema de les Classes Monòtones

Sigui Ω un conjunt.

Sigui $\mathfrak{A}$ una àlgebra de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Sigui $\mathfrak{M}$ una classe monòtona tal que $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}$.

Aleshores: $\sigma(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{M}$.

Demostració:

$$\left.\begin{array}{r} \sigma(\mathfrak{A}) \text{ és classe monòtona, } \Rightarrow m(\mathfrak{A}) \subset \sigma(\mathfrak{A}) \\ \left.\begin{array}{r} m(\mathfrak{A}) \text{ és àlgebra (a comprovar)} \\ m(\mathfrak{A}) \text{ és classe monòtona} \end{array}\right\} \Rightarrow\ m(\mathfrak{A}) \text{ és } \sigma\text{-àlgebra} \Rightarrow \sigma(\mathfrak{A}) \subset m(\mathfrak{A}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(\mathfrak{A}) = \sigma(\mathfrak{A}) \ . \tag{1.2.1}$$

De vegades és (1.2.1) el que s'enuncia sota el nom de Teorema de les Classes Monòtones. És a dir: La classe monòtona i la σ-àlgebra generades per una àlgebra coincideixen. El nostre enunciat s'obté immediatament a partir de (1.2.1):

$$\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M} \Rightarrow m(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{M} \Rightarrow \sigma(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{M} \ .$$

Ens queda un "petit" detall per comprovar:

Lema. $\mathfrak{A}$ és àlgebra $\Rightarrow m(\mathfrak{A})$ és àlgebra.

Demostració:

a) $\Omega \in m(\mathfrak{A})$? Obvi: $\Omega \in \mathfrak{A} \Rightarrow \Omega \in m(\mathfrak{A})$.

b) $A \in m(\mathfrak{A}) \Rightarrow A^c \in m(\mathfrak{A})$?

Usarem la tècnica dels "bons conjunts". Els bons conjunts són aquells que compleixen la propietat que un vol demostrar. En aquest cas són els elements de

$$m^c := \{A \in m(\mathfrak{A}) : \ A^c \in m(\mathfrak{A})\} \ .$$

L'objectiu és veure que tots els conjunts són bons, és a dir, que $m^c = m(\mathfrak{A})$.

i) m^c és classe monòtona:
Sigui $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset m^c$ una successió monòtona. La successió $\{A_n^c\}_{n\in\mathbb{N}}$ també ho serà.

$$\left.\begin{array}{r} \forall n,\ A_n \in m^c \subset m(\mathfrak{A}), \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} A_n \in m(\mathfrak{A}) \\ \forall n,\ A_n^c \in m^c \subset m(\mathfrak{A}), \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} A_n^c \overset{(1)}{=} \big(\lim\limits_{n\to\infty} A_n\big)^c \in m(\mathfrak{A}) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n \in m^c \ .$$

(1) El complementari d'una unió és la intersecció dels complementaris i el complementari d'una intersecció és la unió dels complementaris.

ii) $\mathfrak{A} \subset m^c$:

$$A \in \mathfrak{A} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A \in m(\mathfrak{A}) \\ A^c \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^c \in m(\mathfrak{A}) \end{array}\right\} \Rightarrow A \in m^c \ .$$

iii) $m^c = m(\mathfrak{A})$:

$$\left.\begin{array}{r} \mathfrak{A} \overset{(1)}{\subset} m^c \overset{(2)}{\Rightarrow} m(\mathfrak{A}) \subset m^c \\ m^c \subset m(\mathfrak{A}) \end{array}\right\} \Rightarrow m^c = m(\mathfrak{A}) \ .$$

(1) Per *ii)*.

(2) Per *i)*.

c) $A, B \in m(\mathfrak{A}) \Rightarrow A \cup B \in m(\mathfrak{A})$?

Definim, per a cada $A \in m(\mathfrak{A})$ fixat,

$$m_A := \{B \in m(\mathfrak{A}) : \ A \cup B \in m(\mathfrak{A})\} \ .$$

Aquests seran els "bons conjunts respecte de A". Volem veure que tots els conjunts són bons respecte de A, per a tot $A \in m(\mathfrak{A})$.

i) m_A és classe monòtona:
Sigui $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset m_A$ una successió monòtona. La successió $\{A \cup A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ també ho serà.

$$\left.\begin{array}{r} \forall n,\ A_n \in m_A \subset m(\mathfrak{A}), \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} A_n \in m(\mathfrak{A}) \\ \forall n,\ A \cup A_n \in m_A \subset m(\mathfrak{A}), \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (A \cup A_n) = A \cup \lim\limits_{n\to\infty} A_n \in m(\mathfrak{A}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n \in m_A \ .$$

ii) $\mathfrak{A} \subset m_A$, $\forall A \in \mathfrak{A}$:

$$\left.\begin{array}{r} A \in \mathfrak{A} \\ B \in \mathfrak{A} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{A} \subset m(\mathfrak{A}) \Rightarrow B \in m_A \ .$$

iii) $m_A = m(\mathfrak{A})$, $\forall A \in \mathfrak{A}$:

$$\left.\begin{array}{r} \mathfrak{A} \overset{(1)}{\subset} m_A, \overset{(2)}{\Rightarrow} m(\mathfrak{A}) \subset m_A \\ m_A \subset m(\mathfrak{A}) \end{array}\right\} \Rightarrow m_A = m(\mathfrak{A}) \ .$$

(1) Per *ii)*.

(2) Per *i)*.

iv) $\mathfrak{A} \subset m_A,\ \forall A \in m(\mathfrak{A})$:
Siguin $A \in m(\mathfrak{A})$ i $B \in \mathfrak{A}$.

$$A \in m(\mathfrak{A}) \overset{(1)}{=} m_B, \overset{(2)}{\Rightarrow} B \in m_A \ .$$

(1) Per *iii)*.

(2) De fet, és un 'si i només si'.

v) $m_A = m(\mathfrak{A}),\ \forall A \in m(\mathfrak{A})$:

$$\left.\begin{array}{r} \mathfrak{A} \overset{(1)}{\subset} m_A, \overset{(2)}{\Rightarrow} m(\mathfrak{A}) \subset m_A \\ m_A \subset m(\mathfrak{A}) \end{array}\right\} \Rightarrow m_A = m(\mathfrak{A}) \ .$$

(1) Per *iv)*.

(2) Per *i)*.

1.2.5 Definició

Sigui Ω un conjunt.
Sigui $\mathfrak{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tal que $\emptyset \in \mathfrak{C}$.
Sigui $\mu\colon \mathfrak{C} \longrightarrow [0, +\infty]$ una funció de conjunt positiva additiva.
Diem que μ és *σ-finita* sii es pot posar $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, amb $A_n \in \mathfrak{C}$ i $\mu(A_n) < +\infty$.

1.2.6 Exemples

1) La mesura de Lebesgue en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ o $(\mathbb{R}, \mathfrak{L}(\mathbb{R}))$ és σ-finita. Per exemple, podem escriure $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1]$, tenint en compte que la mesura de Lebesgue d'un interval és la seva longitud.
2) La mesura comptadora en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ o en qualsevol espai amb conjunt base no numerable no és σ-finita. □

Podem ara establir un primer teorema sobre determinació de mesures, que estableix la unicitat de l'extensió d'una funció de conjunt definida sobre una àlgebra a la σ-àlgebra generada.

1.2.7 Teorema

Sigui Ω un conjunt.
Sigui $\mathfrak{A}$ una àlgebra de $\mathcal{P}(\Omega)$.
Si μ_1 i μ_2 són dues mesures sobre $\sigma(\mathfrak{A})$ que coincideixen sobre $\mathfrak{A}$ i són σ-finites sobre $\mathfrak{A}$, aleshores $\mu_1 \equiv \mu_2$.

Demostració:
a) Cas preliminar: Suposem que μ_1 i μ_2 són finites.
Sigui $\mathfrak{M} := \{A \in \sigma(\mathfrak{A}) : \ \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$.
Per hipòtesi, $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}$. Si veiem que $\mathfrak{M}$ és classe monòtona, el Teorema 1.2.4 ens dirà que $\sigma(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{M}$.
En efecte: Sigui $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}$ una successió monòtona. Llavors,

$$\mu_1\big(\lim_{n\to\infty} A_n\big) \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} \mu_1(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_2(A_n) \overset{(1)}{=} \mu_2\big(\lim_{n\to\infty} A_n\big) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n \in \mathfrak{M} \ .$$

(1) Usant les caracteritzacions de la Proposició 1.1.18. Per això imposem de moment que μ_1 i μ_2 siguin finites.

b) Cas general:
Sigui $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ tal que $\Omega = \biguplus_{n=1}^{\infty} A_n$ i $\mu_1(A_n) = \mu_2(A_n) < +\infty$, $\forall n$. Podem prendre una mateixa família per a les dues mesures, clarament. A més, la podem prendre disjunta: si no ho és, la disjuntem (vegeu la demostració de la Proposició 1.1.17).
Per a cada $n \in \mathbb{N}$, definim

$$\mu_{i,A_n}(B) := \mu_i(B \cap A_n) \ , \quad B \in \sigma(\mathfrak{A}) \ , \quad i = 1, 2 \ .$$

És fàcil veure que μ_{i,A_n} $(i = 1, 2,\ n \in \mathbb{N})$ són mesures. A més, són finites, perquè $\mu_i(B \cap A_n) \leqslant \mu_i(A_n) < +\infty$.
Aplicant el cas preliminar anterior, obtenim $\mu_{1,A_n} = \mu_{2,A_n}$, $\forall n$.
Finalment:

$$\mu_1 \overset{(1)}{\equiv} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{1,A_n} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{2,A_n} \overset{(1)}{\equiv} \mu_2 \ .$$

(1) Usant que $B = \biguplus_{n=1}^{\infty} (B \cap A_n)$. Naturalment, $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_{i,A_n}\right)(B)$ vol dir $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_{i,A_n}(B)$. (Vegeu també el problema **1.5**.) □

Ens ocuparem ara de l'existència de l'extensió. Després d'uns quants preliminars, establirem el resultat d'existència en el Teorema 1.2.12.

1.2.8 Definició

Sigui Ω un conjunt.
Una *mesura exterior* sobre $\mathcal{P}(\Omega)$ és una aplicació

$$\mu^*\colon \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, +\infty]$$

tal que

1) $\mu^*(\emptyset) = 0$.
2) μ^* és creixent: $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$.
3) μ^* és numerablement subadditiva: $\{A_n\}_n \subset \mathcal{P}(\Omega)$ família numerable $\Rightarrow \mu^*\big(\bigcup_n A_n\big) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n)$.

1.2.9 Observació

Una mesura no és una mesura exterior, llevat que estigui definida sobre $\mathcal{P}(\Omega)$ i no sigui idènticament infinita.
Una mesura exterior no té perquè ser una mesura. Pot fallar la σ-additivitat, o fins i tot l'additivitat finita. □

Ens demanem si una mesura exterior pot convertir-se en una mesura al restringir-la a una σ-àlgebra més petita. Òbviament, restringint-la a $\{\emptyset, \Omega\}$ s'obté una mesura. Es tracta de trobar la σ-àlgebra més gran possible.

1.2.10 Definició

Sigui Ω un conjunt.
Sigui μ^* una mesura exterior sobre $\mathcal{P}(\Omega)$.
Un conjunt $A \subset \Omega$ és *μ^*-mesurable* sii

$$\forall B \in \mathcal{P}(\Omega) \ , \quad \mu^*(B) \geqslant \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B) \ .$$

(La desigualtat contrària sempre es compleix, per la subadditivitat. Per tant, es pot posar també una igualtat.)

1.2.11 1r Teorema de Carathéodory

Sigui Ω un conjunt.
Sigui μ^* una mesura exterior sobre $\mathcal{P}(\Omega)$.
Notem per $\mathfrak{F}_{\mu^*}$ la col·lecció de conjunts μ^*-mesurables.
Aleshores: $\mathfrak{F}_{\mu^*}$ és σ-àlgebra i $\mu^*_{|\mathfrak{F}_{\mu^*}}$ és una mesura.

Demostració:
1) $\mathfrak{F}_{\mu^*}$ és àlgebra:

i) $\Omega \in \mathfrak{F}_{\mu^*}$? Sí, perquè $\mu^*(\Omega \cap B) + \mu^*(\emptyset \cap B) = \mu^*(B), \forall B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

ii) $A \in \mathfrak{F}_{\mu^*} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{F}_{\mu^*}$? Evident.

iii) $A_1, A_2 \in \mathfrak{F}_{\mu^*} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{F}_{\mu^*}$?

$$\begin{aligned}\forall B \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mu^*(B) &= \mu^*(B \cap A_1) + \mu^*(B \cap A_1^c) \\ &= \mu^*(B \cap A_1 \cap A_2) + \mu^*(B \cap A_1 \cap A_2^c) + \mu^*(B \cap A_1^c \cap A_2) \\ &\quad + \mu^*(B \cap A_1^c \cap A_2^c) \\ &\overset{(1)}{\geqslant} \mu^*\big((B \cap A_1 \cap A_2) \cup (B \cap A_1 \cap A_2^c) \cup (B \cap A_1^c \cap A_2)\big) \\ &\quad + \mu^*(B \cap A_1^c \cap A_2^c) \\ &\overset{(2)}{=} \mu^*\big(B \cap (A_1 \cup A_2)\big) + \mu^*\big(B \cap (A_1 \cup A_2)^c\big) \ .\end{aligned}$$

(1) Apliquem la propietat de subadditivitat als tres primers sumands.

(2) Tenint en compte que el complementari de la unió és la intersecció de complementaris.

2) $\forall B \in \mathcal{P}(\Omega), \forall \{A_k\}_{k=1}^n \subset \mathfrak{F}_{\mu^*}$ disjunts dos a dos, $\mu^*\big(B \cap \big(\bigcup_{k=1}^n A_k\big)\big) = \sum_{k=1}^n \mu^*(B \cap A_k)$:
Per inducció: Si $n = 1$, és evident. Suposem-ho cert per n i veiem-ho per $n+1$.

$$\begin{aligned}\mu^*\big(B \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\big)\big) &\overset{(1)}{=} \mu^*\big(B \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\big) \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\big)\big) + \mu^*\big(B \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\big) \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\big)^c\big) \\ &= \mu^*\big(B \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\big)\big) + \mu^*(B \cap A_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \mu^*(B \cap A_k) \ .\end{aligned}$$

(1) Per *1)*, la unió finita d'elements de $\mathfrak{F}_{\mu^*}$ és de $\mathfrak{F}_{\mu^*}$.

3) $\mathfrak{F}_{\mu^*}$ és σ-àlgebra:
Sigui $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{F}_{\mu^*}$ família de conjunts disjunts dos a dos (si no ho són, es disjunten).
Sigui $B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

$$\begin{aligned}\mu^*(B) &= \mu^*\big(B \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\big)\big) + \mu^*\big(B \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\big)^c\big) \\ &\overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{n} \mu^*(B \cap A_k) + \mu^*\big(B \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\big)^c\big) \\ &\geqslant \sum_{k=1}^{n} \mu^*(B \cap A_k) + \mu^*\big(B \cap \big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\big)^c\big) \ .\end{aligned}$$

Passant al límit en n i usant la subadditivitat numerable,

$$\begin{aligned}\mu^*(B) &\geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(B \cap A_k) + \mu^*\big(B \cap \big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\big)^c\big) \qquad (1.2.2) \\ &\geqslant \mu^*\big(B \cap \big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\big)\big) + \mu^*\big(B \cap \big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\big)^c\big) \ .\end{aligned}$$

(1) Per *2)*.

4) $\mu^*_{|\mathfrak{F}_{\mu^*}}$ és σ-additiva:

En la desigualtat (1.2.2), prenem $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{F}_{\mu^*}$:

$$\mu^*\big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\big) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) \qquad \square$$

Suposem ara donada una funció de conjunt μ positiva σ-additiva sobre una àlgebra. En el teorema següent escollim adequadament la mesura exterior μ^* per tal que $\mu^*_{|\mathfrak{F}_{\mu^*}}$ sigui una mesura que estengui μ.

1.2.12 2n Teorema de Carathéodory

Sigui Ω un conjunt.
Sigui $\mathfrak{A}$ una àlgebra de $\mathcal{P}(\Omega)$.
Sigui $\mu\colon \mathfrak{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ una funció de conjunt σ-additiva, $\mu \not\equiv +\infty$.
Definim l'aplicació

$$\begin{aligned} \mu^*\colon \mathcal{P}(\Omega) &\longrightarrow [0, +\infty] \\ B &\longmapsto \inf_{\substack{B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \\ \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}}} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$

(i.e. l'ínfim es pren sobre tots els recobriments numerables $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ de B).
Aleshores:

1) *μ^* és una mesura exterior.*

2) $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{F}_{\mu^*}$.

3) $\mu^*_{|\mathfrak{A}} = \mu$.

Demostració: Comencem per la tercera afirmació.
3) Sigui $B \in \mathfrak{A}$. Sigui $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ un recobriment numerable de B. Podem escriure $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B)$.

$$\mu(B) = \mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B)\big) \overset{(1)}{\leqslant} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap B) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \ .$$

Prenent ínfims sobre tots els recobriments possibles, obtenim $\mu(B) \leqslant \mu^*(B)$. Per altra banda, $\mu^*(B) \leqslant \mu(B)$, perquè sempre podem recobrir B amb ell mateix.

(1) μ és numerablement subadditiva (Proposició 1.1.17).

1)

i) $\mu^*(\emptyset) = 0$? Sí. $\emptyset$ es pot recobrir per ell mateix i $\mu(\emptyset) = 0$.

ii) μ^* és creixent?
Si $B_1 \subset B_2$, tot recobriment numerable $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ de B_2 ho és de B_1. Per tant,

$$\mu^*(B_1) = \inf_{\substack{B_1 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \\ \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}}} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leqslant \inf_{\substack{B_2 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \\ \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}}} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu^*(B_2) \ .$$

iii) μ^* és numerablement subadditiva?
Sigui $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Fixem $\varepsilon > 0$.
Per a cada n, sigui $\{A_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ un recobriment numerable de B_n tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{n,k}) \leqslant \mu^*(B_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Llavors $\{A_{n,k}\}_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ n\in\mathbb{N}}}$ és un recobriment numerable de $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ per conjunts de $\mathfrak{A}$ tal que

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) \leqslant \sum_{\substack{k=1\\ n=1}}^{\infty} \mu(A_{n,k}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n) + \varepsilon \ .$$

Fent $\varepsilon \to 0$, obtenim $\mu^*\big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\big) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n)$.

2) Sigui $A \in \mathfrak{A}$.
Fixem $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ i $\varepsilon > 0$.
Sigui $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ un recobriment numerable de B tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leqslant \mu^*(B) + \varepsilon \ . \tag{1.2.3}$$

Tindrem també

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \overset{(1)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \big[\mu(A_n \cap A) + \mu(A_n \cap A^c)\big] \overset{(2)}{\geqslant} \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) \ . \tag{1.2.4}$$

Ajuntant (1.2.3) i (1.2.4), i fent $\varepsilon \to 0$, obtenim

$$\mu^*(B) \geqslant \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) \ .$$

(1) μ és additiva sobre l'algebra $\mathfrak{A}$.
(2) $\{A_n \cap A\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{A_n \cap A^c\}_{n\in\mathbb{N}}$ són recobriments de $B \cap A$ i $B \cap A^c$, respectivament. Estem usant la definició de μ^*.

1.2.13 Observació

El Teorema 1.2.12 ens diu que si μ és σ-additiva sobre l'àlgebra $\mathfrak{A}$, μ s'estén a una mesura sobre una certa σ-àlgebra $\mathfrak{F}_{\mu^*}$. Aquesta σ-àlgebra conté, naturalment, $\sigma(\mathfrak{A})$, la generada per $\mathfrak{A}$.
Pregunta: $\mathfrak{F}_{\mu^*} = \sigma(\mathfrak{A})$? Resposta: NO, en general.
És a dir: Si preteníem obtenir una mesura sobre $\sigma(\mathfrak{A})$, "ens hem passat de llarg". Ara bé, per quedar-nos amb $\sigma(\mathfrak{A})$ cal només restringir-hi la mesura obtinguda. El Teorema 1.2.7 ens assegura que si la funció de conjunt μ és σ-finita, l'extensió a $\sigma(\mathfrak{A})$ és única. □

Malgrat que, en general, $\sigma(\mathfrak{A}) \subsetneq \mathfrak{F}_{\mu^*}$, la relació entre aquestes dues σ-àlgebres és molt simple. S'estableix en el Teorema 1.2.16.

1.2.14 Definició

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ un espai de mesura.
Sigui $N \in \mathcal{P}(\Omega)$.
Diem que N és *negligible* si existeix $A \in \mathfrak{F}$ tal que $N \subset A$ i $\mu(A) = 0$.
Diem que $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ és *complet* si tots els conjunts negligibles són mesurables (i.e. N negligible $\Rightarrow N \in \mathfrak{F}$.)

1.2.15 Definició–Proposició

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ un espai de mesura.
Definim $\bar{\mathfrak{F}} := \{A \cup N : \ A \in \mathfrak{F}, \ N \text{ negligible}\}$.
Definim la funció de conjunt

$$\begin{aligned} \bar{\mu}\colon \bar{\mathfrak{F}} &\longrightarrow [0, +\infty] \\ A \cup N &\longmapsto \mu(A) \end{aligned}$$

Aleshores: $(\Omega, \bar{\mathfrak{F}}, \bar{\mu})$ és un espai de mesura complet i s'anomena la *compleció* de $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$.

Demostració: Es deixa com a exercici (vegeu el Problema **1.16**.)

1.2.16 Teorema

Sigui Ω un conjunt.
Sigui $\mathfrak{A}$ una àlgebra de $\mathcal{P}(\Omega)$.
Sigui $\mu\colon \mathfrak{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ σ-additiva i σ-finita.
Aleshores: L'espai de mesura $(\Omega, \mathfrak{F}_{\mu^*}, \mu^*)$ és la compleció de $(\Omega, \sigma(\mathfrak{A}), \mu^*)$. (Seguint les notacions dels Teoremes de Carathéodory. S'entén que μ^* és la mesura exterior definida en el 2n Teorema de Carathéodory, restringida a la σ-àlgebra corresponent.)

Demostració:
1) $(\Omega, \mathfrak{F}_{\mu^*}, \mu^*)$ és complet:
Sigui $N \in \mathcal{P}(\Omega)$ negligible.
Sigui $A \in \mathfrak{F}_{\mu^*}$ tal que $N \subset A$ i $\mu^*(A) = 0$.
Sigui $B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

$$\begin{aligned} &\mu^*(B \cap N) \overset{(1)}{\leqslant} \mu^*(N) \overset{(1)}{\leqslant} \mu^*(A) = 0 \quad \Rightarrow \\ &\mu^*(B) \overset{(1)}{\geqslant} \mu^*(B \cap N^c) = \mu^*(B \cap N) + \mu^*(B \cap N^c) \Rightarrow N \in \mathfrak{F}_{\mu^*} \ . \end{aligned}$$

(1) Per la monotonia de la mesura exterior. Recordem que μ^* està definida per a tot element de $\mathcal{P}(\Omega)$.

2) $\forall B \in \mathcal{P}(\Omega), \ \exists A \in \sigma(\mathfrak{A}) : \ B \subset A$ i $\mu^*(B) = \mu^*(A)$:
Per a cada $n \in \mathbb{N}$ sigui $\{A_{n,k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ un recobriment numerable de B tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{n,k}) \leqslant \mu^*(B) + \frac{1}{n} \ . \tag{1.2.5}$$

Prenem $A := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \big(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_{n,k} \big) \in \sigma(\mathfrak{A})$. Llavors,

$$\forall n, \quad \mu^*(B) \overset{(1)}{\leqslant} \mu^*(A) \overset{(1)}{\leqslant} \mu^*\big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n,k} \big) \overset{(2)}{\leqslant} \mu^*(B) + \frac{1}{n} \ .$$

Fent $n \to \infty$, obtenim $\mu^*(B) = \mu^*(A)$.

(1) Per la monotonia de la mesura exterior.
(2) Per la subadditivitat de la mesura exterior i (1.2.5).

3) $\mathfrak{F}_{\mu^*} = \{A \cup N : \ A \in \sigma(\mathfrak{A}), \ N \text{ negligible}\}$:
La inclusió $(\supset)$ és evident, perquè $\mathfrak{F}_{\mu^*}$ conté els negligibles i $\sigma(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{F}_{\mu^*}$. Veurem la inclusió contrària.

i) Cas preliminar: Suposem que μ és finita.
Sigui $B \in \mathfrak{F}_{\mu^*}$. Pel pas *2)*, existeix $A \in \sigma(\mathfrak{A})$ tal que $B \subset A$ i $\mu^*(B) = \mu^*(A) < +\infty$, $\Rightarrow \mu^*(A - B) = 0 \Rightarrow A - B$ és negligible $\Rightarrow \exists Z \in \sigma(\mathfrak{A}) : \ A - B \subset Z$ i $\mu^*(Z) = 0$.
Definim $N := B - (A - Z) \overset{(1)}{\subset} Z, \Rightarrow N$ negligible.
Tindrem que $B = (B - N) \cup N$, amb N negligible i $B - N \overset{(2)}{\in} \sigma(\mathfrak{A})$.
(1) És aconsellable fer un dibuix per veure clara aquesta relació.

(2) $B - N = A - Z$ (fàcil, i amb un dibuix encara més), i $A, Z \in \sigma(\mathfrak{A}) \Rightarrow A - Z \in \sigma(\mathfrak{A})$.

ii) Cas general:
Si $B \in \mathfrak{F}_{\mu^*}$, B és descompon com $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, amb $B_n \in \mathfrak{F}_{\mu^*}$ i $\mu^*(B_n) \overset{(1)}{<} +\infty$.
Per a cada $n \in \mathbb{N}$, $B_n = (B_n - N_n) \cup N_n$, amb N_n conjunt negligible construït com en el cas preliminar *i)*.
Llavors,

$$B = \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n - N_n) \Big) \cup \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \Big) \ ,$$

on $\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n - N_n) \in \sigma(\mathfrak{A})$ i $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ és negligible (és evident que la unió numerable de negligibles és negligible, pel fet que la unió numerable de conjunts de mesura zero té mesura zero, gràcies a la σ-additivitat).

(1) Donat que μ és σ-finita sobre $\mathfrak{A}$, es té $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, amb $\mu^*(A_n) = \mu(A_n) < +\infty$, per certs $A_n \in \mathfrak{A}$. Llavors, $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B \cap A_n)$, amb $\mu^*(B \cap A_n) < +\infty$. Prenem $B_n = B \cap A_n$. □

Anirem més lluny reduint la col·lecció de conjunts sobre els que cal especificar una mesura per tal de tenir-la determinada. Concretament, veurem que és suficient fer-ho sobre una semiàlgebra.

En primer lloc caracteritzarem de manera molt senzilla els elements de l'àlgebra generada per una semiàlgebra. Malauradament, no existeix un resultat anàleg per a la σ-àlgebra generada.

1.2.17 Proposició

Sigui $\mathfrak{S}$ una semiàlgebra de $\mathcal{P}(\Omega)$.
L'algebra $a(\mathfrak{S})$ és la col·lecció d'unions finites i disjuntes dos a dos de conjunts de $\mathfrak{S}$.

Demostració: Sigui $\mathfrak{S}^{\cup}$ la col·lecció d'unions finites i disjuntes dos a dos d'elements de $\mathfrak{S}$. Clarament, $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}^{\cup} \subset a(\mathfrak{S})$, puix que $a(\mathfrak{S})$ és estable per unions finites.
Per tant, és suficient veure que $\mathfrak{S}^{\cup}$ és una àlgebra.
1) $\emptyset \in \mathfrak{S}^{\cup}$? Evident, perquè $\emptyset \in \mathfrak{S}$.
2) $A, B \in \mathfrak{S}^{\cup} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{S}^{\cup}$?

$$\left.\begin{array}{r} A = A_1 \uplus \cdots \uplus A_n, \text{ amb } A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{S} \\ B = B_1 \uplus \cdots \uplus B_m, \text{ amb } B_1, \dots, B_m \in \mathfrak{S} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$A \cap B = (A_1 \uplus \cdots \uplus A_n) \cap (B_1 \uplus \cdots \uplus B_m) = \biguplus_{i=1}^{n} \biguplus_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j) \overset{(1)}{\in} \mathfrak{S}^{\cup} \ .$$

(1) Tenint en compte que $A_i \cap B_j \in \mathfrak{S}$.

3) $A \in \mathfrak{S}^{\cup} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{S}^{\cup}$?

$$A = A_1 \uplus \cdots \uplus A_n, \text{ amb } A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{S} \ , \quad \Rightarrow$$
$$A^c = A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c, \text{ amb } A_1^c, \dots, A_n^c \overset{(1)}{\in} \mathfrak{S}^{\cup} \ .$$

$\mathfrak{S}^{\cup}$ és estable per interseccions finites, segons hem vist en *2)*. Per tant, $A^c \in \mathfrak{S}^{\cup}$.

(1) Per la condició 3) de la Definició 1.1.21.

1.2.18 Teorema

Sigui $\mathfrak{S}$ una semiàlgebra de $\mathcal{P}(\Omega)$.
Sigui $\mu\colon \mathfrak{S} \longrightarrow [0,+\infty]$ additiva.
Aleshores:

1) Existeix una única extensió de μ additiva sobre $a(\mathfrak{S})$.

2a) Si, a més, μ és σ-additiva sobre $\mathfrak{S}$, també ho serà l'extensió sobre $a(\mathfrak{S})$.

2b) Si, a més, μ és σ-finita sobre $\mathfrak{S}$, també ho serà l'extensió sobre $a(\mathfrak{S})$.

Demostració:
1) Sigui $A \in a(\mathfrak{S})$. Siguin $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{S}$ tals que $A = A_1 \uplus \cdots \uplus A_n$ (Proposició 1.2.17). Definim

$$\mu(A) := \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \tag{1.2.6}$$

(estem utilitzant el mateix símbol μ per a l'extensió i per a la funció original). Observeu que l'additivitat és necessària perquè tingui sentit aquesta definició.

i) La definició és consistent:
Si $A = A_1 \uplus \cdots \uplus A_n = B_1 \uplus \cdots \uplus B_m$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) &= \sum_{i=1}^{n} \mu\big((A_i \cap B_1) \uplus \cdots \uplus (A_i \cap B_m)\big) \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j) \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{j=1}^{m} \mu\big((A_1 \cap B_j) \uplus \cdots \uplus (A_n \cap B_j)\big) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j)\ .
\end{aligned}$$

(1) Aquí estem aplicant la definició de μ (1.2.6). Els conjunts de la forma $A_i \cap B_j$ són de $\mathfrak{S}$.

ii) μ és additiva sobre $a(\mathfrak{S})$:
Si $A, B \in a(\mathfrak{S})$, $A \cap B = \emptyset$, amb $A = A_1 \uplus \cdots \uplus A_n$, $B = B_1 \uplus \cdots \uplus B_m$ ($A_i, B_j \in \mathfrak{S}$),

$$\begin{aligned}
\mu(A \cup B) &= \mu(A_1 \uplus \cdots \uplus A_n \uplus B_1 \uplus \cdots \uplus B_m) \\
&\overset{(1)}{=} \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n) + \mu(B_1) + \cdots + \mu(B_m) \\
&\overset{(1)}{=} \mu(A) + \mu(B)\ .
\end{aligned}$$

(1) Definició de μ (1.2.6).

iii) És la única extensió additiva:
Sigui ν una extensió additiva de μ a $a(\mathfrak{S})$.
Sigui $A \in a(\mathfrak{S})$, amb $A = A_1 \uplus \cdots \uplus A_n$, $A_i \in \mathfrak{S}$.

$$\nu(A) = \nu(A_1 \uplus \cdots \uplus A_n) \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} \nu(A_i) \overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \mu(A)\ .$$

(1) Ha de ser additiva.

(2) Ha de coincidir amb μ sobre $\mathfrak{S}$.

2a) Sigui $\{A_n\}_n \subset a(\mathfrak{S})$ una família numerable de conjunts disjunts dos a dos tal que $A := \bigcup_n A_n \in a(\mathfrak{S})$.

Per a cada n, sigui $\{B_k^n\}_{k=1}^{m_n} \subset \mathfrak{S}$ tal que $A_n = \biguplus_{k=1}^{m_n} B_k^n$.

Sigui $\{C_j\}_{j=1}^{m} \subset \mathfrak{S}$ tal que $A = \biguplus_{j=1}^{m} C_j$.

Llavors:

$$\begin{aligned}\mu(A) &\overset{(1)}{=} \sum_{j=1}^m \mu(C_j) = \sum_{j=1}^m \mu\Big(\biguplus_{n=1}^\infty (C_j \cap A_n)\Big) \\ &= \sum_{j=1}^m \mu\Big(\biguplus_{n=1}^\infty \biguplus_{k=1}^{m_n} (C_j \cap B_k^n)\Big) \overset{(2)}{=} \sum_{j=1}^m \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^{m_n} \mu(C_j \cap B_k^n) \overset{(3)}{=} \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) \ .\end{aligned}$$

(1) Definició de μ (1.2.6).

(2) Usem que els conjunts $C_j \cap B_k^n$ són de $\mathfrak{S}$, que la seva unió també, i la σ-additivitat de μ sobre $\mathfrak{S}$.

(3) L'ordre de sumació es pot intercanviar sense problemes perquè estem tractant amb sèries de termes positius. Altre cop s'aplica la definició de μ (1.2.6).

2b) Serveix la mateixa descomposició $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, $A_n \in \mathfrak{S}$, $\mu(A_n) < +\infty$, doncs $\mathfrak{S} \subset a(\mathfrak{S})$. □

Resumint el que hem vist en aquest apartat:

Si μ és una funció de conjunt positiva σ-additiva sobre una semiàlgebra $\mathfrak{S}$, μ es pot estendre a una mesura sobre $\sigma(\mathfrak{S})$, la σ-àlgebra generada per $\mathfrak{S}$ (Teoremes 1.2.12, 1.2.18, i Observació 1.2.13, més el fet trivial que $\sigma(a(\mathfrak{S})) = \sigma(\mathfrak{S})$.)

Si, a més, μ és σ-finita, només hi ha una extensió possible (Teoremes 1.2.7, 1.2.18).

1.2.19 Exemples (importants)

1) Considerem en $\mathbb{R}$ la semiàlgebra (vegeu Exemple 1.1.23)

$$\mathfrak{S} := \{]a,b],\ ]-\infty,b],\ ]a,+\infty[,\ \emptyset,\ \mathbb{R}\ :\ \ a<b\in\mathbb{R}\} \ .$$

Resulta que $\sigma(\mathfrak{S}) = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Veiem-ho:

$\supset)$

$$\begin{aligned}&\sigma(\mathfrak{S}) \text{ conté tots els intervals }]a,b] \overset{(1)}{\Rightarrow} \\ &\sigma(\mathfrak{S}) \text{ conté tots els intervals }]a,b[\overset{(2)}{\Rightarrow} \\ &\sigma(\mathfrak{S}) \text{ conté tots els oberts de } \mathbb{R} \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\sigma(\mathfrak{S}) \supset \sigma(\text{oberts de } \mathbb{R}) =: \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \ .$$

(1) $]a,b[= \bigcup_{n=1}^\infty]a, b-\frac{1}{n}]$.

(2) Tot obert de $\mathbb{R}$ és unió numerable d'intervals oberts acotats.

$\subset)$

$$\begin{aligned}&\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \text{ conté tots els oberts} \Rightarrow \\ &\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \text{ conté tots els intervals oberts} \overset{(1)}{\Rightarrow} \\ &\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \text{ conté tots els intervals oberts i els }]a,b] \text{ (inclòs } a=-\infty) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\sigma(\mathfrak{S}) \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \ .$$

(1) $]a,b] = \bigcap_{n=1}^\infty]a, b+\frac{1}{n}[$.

Per tant, especificar una funció de conjunt positiva σ-additiva i σ-finita sobre els intervals de $\mathbb{R}$ (o simplement sobre els intervals de la forma dels de $\mathfrak{S}$) equival a especificar una mesura sobre $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$.
Encara més: Es comprova fàcilment que la col·lecció $\mathfrak{I} := \{]a, b] : \ a, b \in \mathbb{R}\}$, que no és una semiàlgebra, compleix $\sigma(\mathfrak{I}) = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, i es pot demostrar (vegeu l'Apartat 1.3) que una funció de conjunt positiva σ-additiva i σ-finita sobre $\mathfrak{I}$ s'estén de manera única a $\mathfrak{S}$ i per tant determina una mesura sobre $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$.
De fet, seguint el procediment dels Teoremes de Carathéodory, el que obtenim és un espai de mesura $(\mathbb{R}, \overline{\mathfrak{B}(\mathbb{R})}, \bar{\mu})$, compleció de $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \mu)$. A cops pot anar bé treballar amb la compleció, per raons tècniques, però moltes vegades (sempre, en aquest text) és suficient considerar la σ-àlgebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, que està ben relacionada amb la topologia de $\mathbb{R}$.

2) En particular: Imposem que la mesura d'un interval sigui igual a la seva longitud,

$$\begin{cases} \mu(]a, b]) = b - a \\ \mu(]-\infty, b]) = +\infty \\ \mu(]a, +\infty[) = +\infty \\ \mu(\emptyset) = 0 \\ \mu(\mathbb{R}) = +\infty \end{cases}$$

i obtindrem, seguint els teoremes de Carathéodory, la *mesura de Lebesgue* λ en $(\mathbb{R}, \mathfrak{L}(\mathbb{R}))$ (vegeu l'Exemple 1.1.8, 3).) L'espai de mesura $(\mathbb{R}, \mathfrak{L}(\mathbb{R}), \lambda)$ és per tant la compleció de $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, i la relació que hi ha entre els mesurables-Lebesgue i els borelians és:

$$A \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A = B \cup N, \quad B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \quad N \subset Z \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \text{ amb } \lambda(Z) = 0.$$

3) Més en general: Donat un espai topològic (Ω, τ), hom pot considerar sempre la σ-àlgebra generada per τ (els oberts). Llavors $(\Omega, \sigma(\tau))$ és un espai mesurable, ben relacionat amb la topologia subjacent. $\sigma(\tau)$ s'anomena *la σ-àlgebra de Borel de* (Ω, τ).

1.3 Mesures a $\mathbb{R}$

Estudiarem en aquest apartat el cas particular important de l'espai mesurable $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$.

Sabem que per a obtenir una mesura en aquest espai és suficient especificar-la sobre els conjunts de la semiàlgebra

$$\mathfrak{S} := \{]a, b], \ ]-\infty, b], \ ]a, +\infty[, \ \emptyset, \ \mathbb{R} \ : \ a < b \in \mathbb{R}\} \ . \tag{1.3.1}$$

Però en realitat n'hi ha prou de fer-ho sobre la col·lecció dels intervals semioberts acotats $\mathfrak{I} := \{]a, b] : \ a \leqslant b \in \mathbb{R}\}$. Això és el que estableix el Corol·lari 1.3.3, que és conseqüència del Teorema 1.3.2 i els resultats generals de determinació de mesures de l'Apartat 1.2.

1.3.1 Observació

Si $\mu: \mathfrak{I} \longrightarrow [0, +\infty]$ és una funció de conjunt positiva additiva, les propietats *1), 2), 3)* i *4)* de la Proposició 1.1.17, enunciades per a àlgebres, són certes per a $\mathfrak{I}$, amb lleugeres precisions a l'enunciat. (Vegeu el Problema **1.12**, i compareu amb l'Observació 1.1.24 i el Problema **1.11**.)

1.3.2 Teorema

Sigui $\mathfrak{I} = \{]a, b] : \ a \leqslant b \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
Sigui $\mathfrak{S}$ *la semiàlgebra de* (1.3.1).
Sigui $\mu: \mathfrak{I} \longrightarrow [0, +\infty]$ *σ-additiva.*
Aleshores:

1) Existeix una única extensió de μ σ-additiva sobre $\mathfrak{S}$.

2) Si, a més, μ és σ-finita, l'extensió és σ-finita.

Demostració:
1) Sigui $A \in \mathfrak{S}$. Clarament, $A = \biguplus_{n=1}^{\infty} I_n$, per certs $I_n \in \mathfrak{I}$.
Definim

$$\mu(A) := \sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) \ .$$

Es demostra que la definició de μ és consistent, que l'extensió és σ-additiva i que és l'única possible extensió σ-additiva, seguint les mateixes idees de la demostració del Teorema 1.2.18. La diferència és que certes sumes finites són infinites en aquest cas, però això no aporta cap dificultat addicional. Els detalls es deixen al lector.

2) $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, per certs $I_n \in \mathfrak{I} \subset \mathfrak{S}$, amb $\mu(I_n) < +\infty$, $\forall n$. Per tant, μ és σ-finita també sobre $\mathfrak{S}$. □

1.3.3 Corol·lari

Una funció de conjunt $\mu\colon \mathfrak{I} \longrightarrow [0,+\infty]$ σ-additiva i σ-finita determina una mesura en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$. □

Això ja és un gran estalvi, però veurem que encara es poden especificar certes mesures de manera molt més senzilla.

1.3.4 Definició

Una *funció de distribució* és una aplicació $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ creixent i contínua a la dreta:

$$x \leqslant y \Rightarrow F(x) \leqslant F(y) \quad \text{i} \quad \lim_{x\to a^+} F(x) = F(a) \ .$$

1.3.5 Observació

És conseqüència fàcil de la monotonia que una funció de distribució sempre té límits laterals en tot punt i en els infinits (aquests últims poden ser infinits):

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to a^+} F(x) \in \mathbb{R} \ , \quad \lim_{x\to a^-} F(x) \in \mathbb{R} \ , \\ &\lim_{x\to +\infty} F(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \ , \quad \lim_{x\to -\infty} F(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \ . \end{aligned}$$

1.3.6 Proposició

Sigui $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció de distribució.
Definim

$$\begin{aligned} \mu\colon \mathfrak{I} &\longrightarrow [0,+\infty] \\ ]a,b] &\longmapsto F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Aleshores: μ és una funció de conjunt positiva σ-additiva i σ-finita sobre $\mathfrak{I}$.

Demostració:
1) μ és positiva:
Evidentment, $\mu(]a,b]) = F(b) - F(a) \geqslant 0$, perquè F és creixent.
2) μ és additiva:
Sigui $\{I_n\}_{n=1}^m \subset \mathfrak{I}$ tal que $\biguplus_{n=1}^{m} I_n \in \mathfrak{I}$.
Notem $I_n =]a_n, b_n]$, $I =]a,b]$. Reordenant si cal els intervals I_n, tindrem

$$a = a_1 \leqslant b_1 = a_2 \leqslant b_2 = a_3 \leqslant b_3 \ldots\ldots b_{m-1} = a_m \leqslant b_m = b \ .$$

Llavors,

$$\sum_{n=1}^{m} \mu(I_n) = \sum_{n=1}^{m} F(b_n) - F(a_n) = F(b) - F(a) = \mu(I) \ .$$

3) μ és σ-additiva:
Sigui $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{I}$ una família infinita numerable d'intervals disjunts dos a dos tal que $\biguplus_{n=1}^{\infty} I_n = I \in \mathfrak{I}$. Notem $I_n =]a_n, b_n]$, $I =]a, b]$.
Agafem els m primers intervals. Podem suposar que

$$a \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant a_2 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant a_m \leqslant b_m \leqslant b$$

(si no, els reordenem).

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} \mu(I_n) &= \sum_{n=1}^{m} \big(F(b_n) - F(a_n)\big) \\
&\overset{(1)}{\leqslant} \sum_{n=1}^{m} \big(F(b_n) - F(a_n)\big) + \sum_{n=1}^{m-1} \big(F(a_{n+1}) - F(b_n)\big) = F(b_m) - F(a_1) \\
&\overset{(1)}{\leqslant} F(b) - F(a) = \mu(I) \ .
\end{aligned}$$

Això val per a cada m. Fent $m \to \infty$, obtenim $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) \leqslant \mu(I)$.
Per veure la desigualtat contrària, demostrarem primer el lema següent:
Lema. $\forall I \in \mathfrak{I}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists J_1, J_2 \in \mathfrak{I}$ tals que:

a) $\overline{J}_1 \subset I \subset \mathring{J}_2$.

b) $\mu(I) - \mu(J_1) < \varepsilon$ i $\mu(J_2) - \mu(I) < \varepsilon$.

Demostració: Usant la continuïtat a la dreta de F, si $I =]a, b]$, només cal prendre $J_1 =]a', b]$ i $J_2 =]a, b']$, amb $a < a'$, $F(a') - F(a) < \varepsilon$, i $b < b'$, $F(b') - F(b) < \varepsilon$ □
Fixem $\varepsilon > 0$.
Sigui $J_1 \in \mathfrak{I}$ tal que $\overline{J}_1 \subset I$ i $\mu(I) - \mu(J_1) < \varepsilon$.
Per a cada $n \in \mathbb{N}$, sigui $J_{2,n} \in \mathfrak{I}$ tal que $I_n \subset \mathring{J}_{2,n}$ i $\mu(J_{2,n}) - \mu(I_n) < \dfrac{\varepsilon}{2^n}$.
Clarament, $\{\mathring{J}_{2,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ és un recobriment obert del compacte $\overline{J}_1$. Per tant, existeix un subrecobriment finit $\{\mathring{J}_{2,n}\}_{n=1}^{m}$. Llavors,

$$\begin{aligned}
\mu(I) < \mu(J_1) + \varepsilon &\overset{(2)}{\leqslant} \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{m} J_{2,n}\Big) + \varepsilon \overset{(3)}{\leqslant} \sum_{n=1}^{m} \mu(J_{2,n}) + \varepsilon \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{m} \mu(I_n) + \sum_{n=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2^n} + \varepsilon \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) + 2\varepsilon \ .
\end{aligned}$$

Fent $\varepsilon \to 0$, obtenim $\mu(I) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(I_n)$.

4) μ és σ-finita: És evident, perquè $F(b) - F(a) \in \mathbb{R}$, $\forall a, b$. De fet, μ pren valors a $[0, +\infty[$.

(1) F és creixent.

(2) Per la Observació 1.3.1, μ és monòtona. Tenim les inclusions $J_1 \subset \overline{J}_1 \subset \bigcup\limits_{n=1}^{m} \mathring{J}_{2,n} \subset \bigcup\limits_{n=1}^{m} J_{2,n}$, i només falta comprovar que $\bigcup\limits_{n=1}^{m} J_{2,n} \in \mathfrak{I}$.
Podem suposar que $\overline{J}_1 \cap \mathring{J}_{2,n} \neq \emptyset$, $\forall n = 1, \ldots, m$. Si això no es compleix per algun n, el podem treure del recobriment. Per tant, tindrem també $\overline{J}_1 \cap J_{2,n} \neq \emptyset$. Això, juntament amb el fet $\overline{J} \subset \bigcup\limits_{n=1}^{m} J_{2,n}$ i que $J_{2,n} \in \mathfrak{I}$, $\forall n$, impliquen que $\bigcup\limits_{n=1}^{m} J_{2,n} \in \mathfrak{I}$.

(3) Per la propietat de subadditivitat (vegeu l'Observació 1.3.1).

1.3.7 Corol·lari

Una funció de distribució determina una mesura μ en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ mitjançant la fórmula $\mu(]a,b]) = F(b) - F(a)$ $\square$

Hem obtingut un gran guany: En lloc de donar una funció de conjunt, és suficient donar una "funció de punt".

La pregunta natural subseqüent és: Tota mesura sobre $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ es pot obtenir a partir d'una funció de distribució mitjançant la fórmula $\mu(]a,b]) = F(b) - F(a)$? La resposta és: *No, però gairebé.*

Observeu que les mesures construïdes d'aquesta manera donen mesura finita a tot interval acotat. Veurem que són precisament aquestes les que es poden determinar amb funcions de distribució. Una àmplia classe de mesures interessants, en particular totes les mesures finites i per tant les probabilitats, compleixen l'esmentada propietat. Les hi donem un nom a la definició següent.

1.3.8 Definició

Una *mesura de Lebesgue–Stieljes* és una mesura μ en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ tal que

$$\forall A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \text{ acotat, } \mu(A) < +\infty \ .$$

1.3.9 Exemples

1) La *mesura de Lebesgue:*
Ve determinada per la funció de distribució $F(x) = x$. En efecte,

$$\lambda(]a,b]) = F(b) - F(a) = b - a \ ,$$

que coincideix amb la definició que n'hem donat als Exemples 1.2.19.

2) La probabilitat anomenada *Llei Normal centrada i reduïda* (abreviadament, llei $N(0,1)$):
Ve determinada per la funció de distribució

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}\, dy \ .$$

(Aquesta integral es pot entendre en el sentit de la integració impròpia de Riemann, per exemple.)
La probabilitat d'un interval acotat $]a,b]$ serà

$$\mu(]a,b]) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}\, dy \ .$$

3) La probabilitat anomenada *Delta de Dirac en $a \in \mathbb{R}$:*
Ve donada per la funció de distribució

$$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geqslant a \\ 0, & \text{si } x < a \ . \end{cases}$$

La notació habitual és δ_a. Es té, per a qualsevol $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$,

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & \text{si } a \in A \\ 0, & \text{si } a \notin A \ . \end{cases}$$

1.3.10 Proposició

Sigui μ una mesura de Lebesgue–Stieljes.
Aleshores:

1) *Existeix una funció de distribució F tal que*

$$\forall a < b \ \in \mathbb{R}, \quad F(b) - F(a) = \mu(]a,b]) \ . \tag{1.3.2}$$

2) *Si F_1 i F_2 són funcions de distribució complint* (1.3.2)*, aleshores $F_1 - F_2 \equiv c$, per alguna constant $c \in \mathbb{R}$.*

Demostració:
1) Assignem a $F(0)$ qualsevol valor arbitrari. Definim

$$F(x) := \begin{cases} F(0) + \mu(]0,x]), & \text{si } x > 0 \\ F(0) - \mu(]x,0]), & \text{si } x < 0 \ . \end{cases} \tag{1.3.3}$$

i) F és funció de distribució:
És clarament creixent. Veiem la continuïtat a la dreta: Si $b \geqslant 0$,

$$\lim_{x\to b^+} F(x) = F(0) + \lim_{x\to b^+} \mu(]0,x]) \overset{(1)}{=} F(0) + \mu(]0,b]) = F(b) \ .$$

Si $b < 0$, es fa anàlogament.

(1) Aquí estem utilitzant la caracterització de la σ-additivitat per successions decreixents (vegeu la Proposició 1.1.18), combinada amb la caracterització de límit d'una funció en un punt mitjançant successions.

ii) F compleix (1.3.2): És immediat.

2) Siguin F_1 i F_2 tals que $F_1(b) - F_1(a) = \mu(]a,b]) = F_2(b) - F_2(a)$, $\forall a < b \ \in \mathbb{R}$.
Fixem $a \in \mathbb{R}$. Per $x \geqslant a$, tindrem $F_2(x) = F_1(x) + (F_2(a) - F_1(a))$. La mateixa expressió s'obté per $x < a$. Per tant, F_1 i F_2 difereixen en la constant $c = F_2(a) - F_1(a)$.

1.3.11 Observació

A partir de la fórmula (1.3.2) es poden trobar fàcilment les mesures d'altres tipus d'intervals en termes de la funció de distribució (vegeu el Problema **1.20**).
En particular,

$$\mu(\{x\}) = F(x) - F(x^-) \ . \tag{1.3.4}$$

1.3.12 Definició

Una funció $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ complint (1.3.2) es diu que és *una funció de distribució de la mesura μ.*

1.3.13 Definició

Si μ és una probabilitat sobre $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$, s'individualitza una funció de distribució particular, definida com

$$F(x) := \mu(]-\infty, x]) \ , \quad x \in \mathbb{R} \ ,$$

i només a aquesta se l'anomena *la funció de distribució de la probabilitat μ.* □

No hi ha res profund a prendre la funció de distribució d'una probabilitat tal com l'acabem de definir. És una qüestió de conveni. Hem de comprovar, però, que la nomenclatura és coherent; o sigui, que és de debò una funció de distribució. Això forma part de la proposició següent.

1.3.14 Proposició

Sigui μ una probabilitat en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$.
Sigui $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per $F(x) := \mu(]-\infty, x])$.
Aleshores:

1) *F és una funció de distribució de μ.*

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Demostració:
1) F és creixent per la propietat de monotonia de les mesures, i contínua a la dreta pel mateix argument usat en la Proposició 1.3.10. Finalment, si $a < b$, $F(b) = \mu(]-\infty, b]) = \mu(]-\infty, a]) + \mu(]a, b]) = F(a) + \mu(]a, b])$.
2) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \mu(]-\infty, x]) = \mu(\emptyset) = 0$.
3) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \mu(]-\infty, x]) = \mu(\mathbb{R}) = 1$. □

1.3.15 Definició

Sigui μ una mesura de Lebesgue–Stieljes.
μ és una *mesura discreta* sii és de la forma

$$\mu = \sum_{i \in I} p_i \delta_{a_i} \ ,$$

on I és un conjunt numerable, δ_{a_i} són deltes de Dirac en els punts $a_i \in \mathbb{R}$, i $p_i \geqslant 0$, $\forall i \in I$.
Usant (1.3.3), trobem que les funcions de distribució d'una mesura discreta són de la forma

$$F(x) = \begin{cases} c + \sum\limits_{\{i:\ 0 < a_i \leqslant x\}} p_i \ , & \text{si } x \geqslant 0 \\ c - \sum\limits_{\{i:\ x < a_i \leqslant 0\}} p_i \ , & \text{si } x < 0 \ , \end{cases} \tag{1.3.5}$$

amb c una constant qualsevol. Una funció de la forma (1.3.5) s'anomena una *funció de salts*. (Fent un dibuix queda clar perquè.)
Si $\sum\limits_{i \in I} p_i = 1$, aleshores μ és una *probabilitat discreta*. □

Si μ és una probabilitat discreta, la seva funció de distribució es pot expressar com

$$F(x) = \mu(]-\infty, x]) = \sum_{\{i:\ a_i \leqslant x\}} p_i \ .$$

μ modela una experiència aleatòria en la qual s'obtenen els resultats a_i amb probabilitat p_i.

Advertència sobre nomenclatura: Que una mesura sigui discreta no vol dir que $\{a_i :\ i \in I\}$ sigui un conjunt discret de $\mathbb{R}$ (en el sentit topològic). Donat que tot conjunt discret de $\mathbb{R}$ és numerable, el recíproc sí que és cert.

Per acabar, definirem un segon tipus de mesura, en cert sentit "complementari" de l'anterior.

1.3.16 Definició

Sigui μ una mesura de Lebesgue–Stieljes.
μ és una *mesura contínua* sii $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mu(\{x\}) = 0$.
(A la vista de la relació (1.3.4), és clar que si F és una funció de distribució de μ, aleshores μ és contínua $\Leftrightarrow$ F és contínua.)

1.3.17 Proposició

Tota mesura de Lebesgue–Stieljes es descompon de forma única en suma d'una mesura contínua i una mesura discreta.

Demostració: Demostrarem prèviament el lema següent, que té interès en si mateix.

Lema. Si $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció monòtona, aleshores el conjunt de punts de discontinuïtat de F és numerable.
Demostració: Sigui $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una família numerable d'intervals acotats de $\mathbb{R}$ tal que $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.
Sigui $S_{n,m}$ el conjunt de punts de discontinuïtat amb salt d'amplitud més gran que $\frac{1}{m}$ de F en I_n.
La monotonia implica que F és acotada en cada interval acotat. Per tant, $S_{n,m}$ és finit.
El conjunt de punts de discontinuïtat de F és $\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} S_{n,m}$, i doncs numerable. □

Sigui μ una mesura de Lebesgue–Stieljes i sigui F una funció de distribució de μ.
Considerem el conjunt numerable $S := \{y \in \mathbb{R} : \ F \text{ és discontínua en } y\}$.
Definim la funció

$$F_d(x) := \begin{cases} \sum\limits_{\substack{y\in S \\ 0<y\leqslant x}} (F(y) - F(y^-)) \ , & \text{si } x \geqslant 0 \\ -\sum\limits_{\substack{y\in S \\ x<y\leqslant 0}} (F(y) - F(y^-)) \ , & \text{si } x < 0 \ . \end{cases}$$

F_d és una funció de salts amb mesura discreta associada

$$\mu_d = \sum_{y\in S} \mu(\{y\})\delta_y \ .$$

Definim $\mu_c := \mu - \mu_d$, que és una mesura contínua: Es veu fàcilment que és una mesura, i la continuïtat ve del fet que, tant si $\mu(\{x\}) = 0$ com si no,

$$\mu_c(\{x\}) = \mu(\{x\}) - \mu_d(\{x\}) = 0 \ .$$

Per tant, $\mu = \mu_c + \mu_d$ és la descomposició buscada.

1.4 Problemes

1.1 Es defineix la *σ-àlgebra generada* per una col·lecció de conjunts $\mathfrak{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ com la intersecció de totes les σ-àlgebres que contenen $\mathfrak{C}$. Perquè la definició tingui sentit cal comprovar (comproveu-ho) que:
a) Hi ha almenys una σ-àlgebra que conté $\mathfrak{C}$.
b) La intersecció d'una família arbitrària de σ-àlgebres és σ-àlgebra.

1.2 Sigui $(\Omega, \mathfrak{F})$ un espai mesurable. La *mesura comptadora* sobre $(\Omega, \mathfrak{F})$ es defineix com

$$\mu(A) = \begin{cases} \operatorname{card} A, & \text{si } A \text{ és finit} \\ +\infty, & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

a) Comproveu que és efectivament una mesura.
b) Demostreu que, en canvi, la funció de conjunt sobre $\mathfrak{F}$ definida per

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A \text{ és finit} \\ +\infty, & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

no és en general una mesura.

1.3 Sigui Ω un conjunt numerable.
Associem a cada $\omega \in \Omega$ un nombre $p_\omega \geqslant 0$ de forma que $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$.
Definim, per a cada $A \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$\mu(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega \ .$$

Comproveu que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu)$ és un espai de probabilitat.

1.4 Sigui $(\Omega, \mathfrak{F})$ un espai mesurable. Sigui $\omega \in \Omega$ fixat.
Definim, per a cada $A \in \mathfrak{F}$,

$$\delta_\omega(A) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \in A \\ 0, & \text{si } \omega \notin A \ . \end{cases}$$

a) Comproveu que δ_ω és una probabilitat en $(\Omega, \mathfrak{F})$. Aquesta probabilitat s'anomena *delta de Dirac en el punt* ω i modela un experiment aleatori en què el resultat ω es produeix segur.
b) Comproveu que la probabilitat definida en el problema **1.3** es pot posar en termes de deltes de Dirac.

1.5 Es pot definir de manera natural la suma i el producte per escalars de funcions de conjunt positives definides sobre la mateixa col·lecció de conjunts $\mathfrak{C}$:

$$(\mu_1 + \mu_2)(A) := \mu_1(A) + \mu_2(A)$$
$$(\alpha\mu_1)(A) := \alpha \cdot \mu_1(A) \ .$$

No hi ha cap problema tampoc per definir la suma infinita com a límit de sumes parcials, perquè tots els sumands seran positius.
Sigui $\mathfrak{F}$ una σ-àlgebra. Demostreu que:
a) Si μ_1 i μ_2 són dues mesures sobre $\mathfrak{F}$ i α i β són nombres reals positius, aleshores $\alpha\mu_1 + \beta\mu_2$ és una mesura.
b) Si $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió creixent de mesures sobre $\mathfrak{F}$ (i.e. $\forall A$ mesurable, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu_n(A) \leqslant \mu_{n+1}(A)$), aleshores $\sup\limits_n \mu_n$ és una mesura.
c) Si $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió de mesures sobre $\mathfrak{F}$, aleshores $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_n$ és una mesura.

1.6 Mitjançant la mesura de Lebesgue en $\mathbb{R}$, construïu un contraexemple que confirmi que la condició

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \mu(A_{n_0}) < \infty$$

no és supèrflua per tal que es pugui afirmar que si μ és una mesura i $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió decreixent de conjunts mesurables, llavors

$$\mu(A_n) \searrow \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \ .$$

1.7 Sigui $\mathfrak{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tal que $\emptyset \in \mathfrak{C}$.
Sigui $\mu\colon \mathfrak{C} \longrightarrow [0, +\infty]$ una funció de conjunt positiva additiva.
Demostreu que si $\mu \not\equiv +\infty$ (és a dir, en tots els casos interessants), aleshores $\mu(\emptyset) = 0$.

1.8 Tota σ-àlgebra és una àlgebra, i tota àlgebra és una semiàlgebra (immediat, a partir de les definicions). Els recíprocs són falsos. Proveu, per exemple, que:
a) Si Ω és un conjunt infinit (numerable, si es vol), la col·lecció dels conjunts $A \subset \Omega$ que són finits o el seu complementari és finit és una àlgebra però no una σ-àlgebra.
b) Si A, B, C són tres conjunts disjunts tals que $A \cup B \cup C = \Omega$, la col·lecció $\{\emptyset, A, B, C, \Omega\}$ és una semiàlgebra de $\mathcal{P}(\Omega)$, però no una àlgebra.

1.9 *Espais mesurables finits.* Un espai mesurable $(\Omega, \mathfrak{F})$ es diu que és *finit* si $\mathfrak{F}$ és un conjunt finit. (Quan es parla d'*espai de mesura finit* o d'*espai de probabilitat finit* es fa referència a què l'espai mesurable de base és un espai mesurable finit.)
Una *partició* de Ω és una col·lecció finita $B_1, \dots, B_n$ de subconjunts disjunts no buits de Ω tals que $B_1 \uplus \cdots \uplus B_n = \Omega$.
a) Demostreu que tot element de la σ-àlgebra generada per una partició de Ω és, o bé el buit, o bé unió finita de conjunts de la partició. Concloeu que: La σ-àlgebra i l'àlgebra

generades per una partició coincideixen i donen lloc a un espai mesurable finit. Quants conjunts mesurables hi ha ?
b) Recíprocament, demostreu que si $(\Omega, \mathfrak{F})$ és un espai mesurable finit, llavors $\mathfrak{F}$ és l'àlgebra generada per una partició de Ω (trobeu explícitament la partició.) En conclusió, per especificar un espai mesurable finit és suficient donar una partició de Ω.

1.10 *a)* Considereu $\Omega = \mathbb{R}$. La col·lecció de conjunts formada pels intervals dels tipus $]a, b]$ (amb $a < b \in \mathbb{R}$), $]-\infty, b]$, $]a, +\infty[$, el propi $\mathbb{R}$ i el conjunt buit és una semiàlgebra de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (que no és una àlgebra).
b) Generalitzem-ho a $\mathbb{R}^n$. Els intervals de $\mathbb{R}^n$, també anomenats *rectangles*, són per definició els productes cartesians d'intervals de $\mathbb{R}$. Comproveu que la col·lecció de conjunts formada pels intervals de la forma $]a_1, b_1] \times \cdots \times]a_n, b_n]$, amb $a_i \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b_i \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, i amb el conveni que $]a_i, +\infty]$ vol dir el mateix que $]a_i, +\infty[$, és una semiàlgebra de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

1.11 Demostreu el següent anàleg de la Proposició 1.1.17 pel cas de semiàlgebres:
Sigui $\mathfrak{S}$ una semiàlgebra de $\mathcal{P}(\Omega)$.
Sigui $\mu\colon \mathfrak{S} \longrightarrow [0, +\infty]$ una funció de conjunt positiva additiva.
Aleshores:
1) $A, B \in \mathfrak{S},\ A \cup B \in \mathfrak{S} \Rightarrow \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.
2) Monotonia:

$$\forall A, B \in \mathfrak{S}, \quad A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leqslant \mu(B) \ .$$

3) Subadditivitat finita:

$$A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{S},\ A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathfrak{S} \Rightarrow \mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leqslant \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n) \ .$$

Suposem a més que μ és σ-additiva. Aleshores,
4) Subadditivitat numerable:

$$\forall \{A_n\}_n \subset \mathfrak{S} \text{ família numerable}, \qquad \bigcup_n A_n \in \mathfrak{S} \Rightarrow \mu\big(\bigcup_n A_n\big) \leqslant \sum_n \mu(A_n) \ .$$

1.12 Sigui $\mathfrak{I} = \{]a, b] : \ a \leqslant b \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ (s'entén que $\emptyset \in \mathfrak{I}$.) Demostreu que les propietats enunciades al Problema **1.11** per a funcions de conjunt positives additives sobre una semiàlgebra qualsevol $\mathfrak{S}$ valen exactament igual per a la col·lecció de conjunts $\mathfrak{I}$.
Indicació: Adoneu-vos que si $A, B \in \mathfrak{I}$, aleshores sempre es té $A \cap B \in \mathfrak{I}$, i també $A \cap B^c \in \mathfrak{I}$, llevat que $B \subset A$, el que encara simplifica més les coses.

1.13 *a)* Sigui $\varphi\colon \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$ una aplicació. Demostreu que $\mu^*(A) = \sup\limits_{\omega \in A} \varphi(\omega)$ defineix una mesura exterior sobre $\mathcal{P}(\Omega)$.
b) Definim sobre $\mathcal{P}(\Omega)$ l'aplicació

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A \text{ és numerable} \\ 1, & \text{si } A \text{ no és numerable.} \end{cases}$$

Demostreu que μ^* és una mesura exterior i trobeu els conjunts μ^*-mesurables.

1.14 Una mesura exterior no és en general una mesura perquè no té perquè ser numerablement additiva. De fet, pot fins i tot no ser ni finitament additiva. Considereu:

$$\mu^*(A) = \begin{cases} \sqrt{\operatorname{card} A}, & \text{si } A \text{ és finit} \\ +\infty, & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

essent Ω un conjunt infinit.

1.15 Sigui $\mathfrak{C}$ una col·lecció qualsevol de subconjunts de Ω. Demostreu que la semiàlgebra generada per $\mathfrak{C}$ consisteix en totes les possibles interseccions finites entre els elements de:
$$\{\emptyset, \Omega\} \cup \{A\colon A \in \mathfrak{C} \text{ ò } A^c \in \mathfrak{C}\} \ .$$

Comentari: Sabem que l'àlgebra generada per una semiàlgebra consisteix en totes les possibles unions finites disjuntes d'elements de la semiàlgebra. Per tant, obtenim com a corol·lari del problema una descripció constructiva de l'àlgebra generada per una col·lecció qualsevol de conjunts. Malauradament, no existeix tal descripció constructiva de la σ-àlgebra generada.

1.16 Sigui $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ un espai de mesura. Es defineix l'espai $(\Omega, \bar{\mathfrak{F}}, \bar{\mu})$ *compleció* de $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ posant
$$\bar{\mathfrak{F}} = \{A \cup N : \ A \in \mathfrak{F}, \ N \text{ negligible}\} \quad \text{i} \quad \bar{\mu}(A \cup N) = \mu(A) \ .$$

Comproveu que la definció i la nomenclatura tenen sentit:
a) $\bar{\mathfrak{F}}$ és una σ-àlgebra.
b) $\bar{\mu}$ està ben definida, és a dir, el valor $\bar{\mu}(A)$ no depèn de la descomposició particular de A en unió d'un conjunt de $\mathfrak{F}$ i un negligible.
c) $\bar{\mu}$ és una mesura sobre $\bar{\mathfrak{F}}$ i $\bar{\mu}$ coincideix amb μ sobre $\mathfrak{F}$.
d) L'espai de mesura $(\Omega, \bar{\mathfrak{F}}, \bar{\mu})$ és complet.

1.17 *Successions de conjunts (I).* Sigui Ω un conjunt. Una *successió de conjunts* de Ω és una aplicació de $\mathbb{N}$ en $\mathcal{P}(\Omega)$. Es representa amb la notació habitual de les successions numèriques: $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
S'anomena *límit inferior* d'una successió de conjunts $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ al conjunt
$$\varliminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \ .$$

S'anomena *límit superior* d'una successió de conjunts $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ al conjunt
$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \ .$$

a) Demostreu que el límit inferior d'una successió de conjunts $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és el conjunt de $\omega \in \Omega$ que pertanyen a tots els A_n a partir d'un endavant, o equivalentment, està format pels $\omega \in \Omega$ que pertanyen a tots els A_n excepte potser un nombre finit d'ells.
b) Demostreu que el límit superior d'una successió de conjunts $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és el conjunt dels $\omega \in \Omega$ tals que per a cada n_0 es pot trobar un $n \geqslant n_0$ amb $\omega \in A_n$, o equivalentment, està format pels $\omega \in \Omega$ que pertanyen a infinits A_n.
c) Concloeu que $\varliminf_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup_{n\to\infty} A_n$.

1.18 *Successions de conjunts (II).* Una successió de conjunts $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es diu que és *convergent* sii $\varliminf_{n\to\infty} A_n = \varlimsup_{n\to\infty} A_n$, i en tal cas el *límit* de la successió és el conjunt
$$\lim_{n\to\infty} A_n := \varliminf_{n\to\infty} A_n = \varlimsup_{n\to\infty} A_n \ .$$

a) Una successió de conjunts és *monòtona creixent* sii $\forall n \in \mathbb{N}, \ A_n \subset A_{n+1}$. És *monòtona decreixent* sii $\forall n \in \mathbb{N}, \ A_n \supset A_{n+1}$.
Demostreu que tota successió de conjunts monòtona (tan sigui creixent o decreixent) té límit. Quin és en cada cas? (El resultat haurà de fer coherent la definició restringida

de límit que hem vist a l'Apartat 1.1.)
b) Sigui $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió parcial de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Demostreu que

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n \subset \varliminf_{n\to\infty} B_n \subset \varlimsup_{n\to\infty} B_n \subset \varlimsup_{n\to\infty} A_n \ ,$$

i que, per tant, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix $\Rightarrow \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix.
c) Demostreu que

$$\big(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\big)^c = \varliminf_{n\to\infty} A_n^c \ ,$$

d'on $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} A_n^c = A^c$.
d) Demostreu les relacions

$$\begin{aligned}
\varliminf_{n\to\infty} (A_n \cup B_n) &\supset \big(\varliminf_{n\to\infty} A_n\big) \cup \big(\varliminf_{n\to\infty} B_n\big)\\
\varlimsup_{n\to\infty} (A_n \cup B_n) &= \big(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\big) \cup \big(\varlimsup_{n\to\infty} B_n\big)\\
\varliminf_{n\to\infty} (A_n \cap B_n) &= \big(\varliminf_{n\to\infty} A_n\big) \cap \big(\varliminf_{n\to\infty} B_n\big)\\
\varlimsup_{n\to\infty} (A_n \cap B_n) &\subset \big(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\big) \cap \big(\varlimsup_{n\to\infty} B_n\big)
\end{aligned}$$

i concloeu que, si $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ i $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$, aleshores $\lim\limits_{n\to\infty} (A_n \cup B_n) = A \cup B$ i $\lim\limits_{n\to\infty} (A_n \cap B_n) = A \cap B$.

1.19 *Successions de conjunts (i III).* Per a cadascuna de les successions de conjunts de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ que segueixen, determineu els límits inferior i superior i, si existeix, el límit.
a)

$$A_n = \begin{cases} \{x : 0 < x \leqslant 1 - \frac{1}{n}\}, & \text{si } n \text{ és imparell}\\ \{x : \frac{1}{n} \leqslant x < 1\}, & \text{si } n \text{ és parell.}\end{cases}$$

b) $A_1 =]-1,1]$, $\quad A_2 =]-\frac{1}{2},1]$, $\quad A_3 =]-1,\frac{1}{3}]$, $\quad A_4 =]-\frac{1}{4},1]$, $\quad A_5 =]-1,\frac{1}{5}]$, $\quad \dots$

1.20 Sigui μ una mesura de Lebesgue–Stieljes sobre $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$. Sigui F una funció de distribució de μ. Sabem que, per definició, $\mu(]a,b]) = F(b) - F(a)$, $\forall a < b \in \mathbb{R}$.
Demostreu que la mesura de tot interval de $\mathbb{R}$ (no necessàriament de la forma $]a,b]$) es pot expressar fàcilment en termes de F. És a dir, trobeu una fórmula per calcular la mesura de cadascun dels intervals següents:
$]a,b[$, $\quad [a,b]$ (inclòs el cas $a=b$), $\quad [a,b[$, $\quad]-\infty,b]$, $\quad]-\infty,b[$, $\quad [a,+\infty[$, $\quad]a,+\infty[$, $\quad \mathbb{R}$.

1.21 Demostreu que existeixen funcions monòtones $F\colon\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que són contínues en cada nombre irracional i discontínues en cada nombre racional.
Idea: Comproveu que es pot construir una mesura de Lebesgue–Stieljes sobre $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ tal que $\mu(\{x\}) \neq 0$ si x és racional, i $\mu(\{x\}) = 0$ si x és irracional.

1.22 Considereu la funció de distribució següent:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1\\ 1 + x, & \text{si } -1 \leqslant x < 0\\ 2 + x^2, & \text{si } 0 \leqslant x < 2\\ 9, & \text{si } x \geqslant 2\end{cases}$$

i sigui μ la mesura que defineix sobre $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$.
a) Calculeu la mesura dels conjunts

$$\{2\}\ , \quad [-\tfrac{1}{2},3[\ , \quad]-1,0] \cup]1,2[\ , \quad [0,\tfrac{1}{2}[\cup]1,2]\ , \quad \{x\colon |x| + 2x^2 > 1\}\ .$$

b) Descomponeu μ en suma d'una mesura discreta i una mesura contínua.

1.23 A primera vista pot semblar que els conceptes de mesura de Lebesgue–Stieljes i de mesura σ-finita en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ són equivalents. Una de les implicacions és molt fàcil; l'altra és falsa. Busqueu un contraexemple.

2. Funcions mesurables i integració

Sempre que tenim definida una mesura en un espai mesurable, podem construir una integral relativa a ella. El procés que porta a la construcció de la integral de Lebesgue (integral respecte la mesura de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$) es pot reproduir semblantment per a espais de mesura qualssevol. La teoria resultant també s'anomena Teoria de la Integral de Lebesgue.

Suposarem sempre a partir d'ara que totes les mesures de què parlem són no trivials ($\mu \not\equiv 0$, $\mu \not\equiv +\infty$), per evitar inútils distincions de casos.

2.1 Funcions mesurables

2.1.1 Definició

Siguin $(\Omega_1, \mathfrak{F}_1)$, $(\Omega_2, \mathfrak{F}_2)$ espais mesurables.
Sigui $X\colon \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ una aplicació.
X és una *funció mesurable* respecte $\mathfrak{F}_1$ i $\mathfrak{F}_2$ sii

$$\forall A \in \mathfrak{F}_2 \ , \quad X^{-1}(A) \in \mathfrak{F}_1 \ .$$

Abreviem dient que X és $(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$-mesurable.

2.1.2 Exercici

Si $\mathfrak{C} \subset \mathcal{P}(\Omega_2)$ és una col·lecció de conjunts tal que $\sigma(\mathfrak{C}) = \mathfrak{F}_2$, es suficient comprovar la condició

$$\forall A \in \mathfrak{C} \ , \quad X^{-1}(A) \in \mathfrak{F}_1$$

per tal que X sigui $(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$-mesurable.
Només cal observar que $\{A \in \mathcal{P}(\Omega_2) : \ X^{-1}(A) \in \mathfrak{F}_1\}$ és una σ-àlgebra, i això es dedueix de les propietats generals de les antiimatges d'una aplicació.

2.1.3 Proposició

Siguin $(\Omega_1, \mathfrak{F}_1)$, $(\Omega_2, \mathfrak{F}_2)$, $(\Omega_3, \mathfrak{F}_3)$ espais mesurables.
Siguin $X\colon \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ i $Y\colon \Omega_2 \longrightarrow \Omega_3$ funcions mesurables respecte les σ-àlgebres corresponents.
Aleshores, $Y \circ X\colon \Omega_1 \longrightarrow \Omega_3$ és $(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_3)$-mesurable.

Demostració:

$$A \in \mathfrak{F}_3 \Rightarrow Y^{-1}(A) \in \mathfrak{F}_2 \Rightarrow (Y \circ X)^{-1}(A) = X^{-1}(Y^{-1}(A)) \in \mathfrak{F}_1 \ .$$

2.1.4 Definició

Sigui Ω un conjunt.
Sigui $\{(E_i, \mathfrak{E}_i)\}_{i\in I}$ una família arbitrària d'espais mesurables.
Sigui $\{X_i : \Omega \longrightarrow E_i\}_{i\in I}$ una família d'aplicacions.
S'anomena *σ-àlgebra generada per* $\{X_i\}_{i\in I}$ a la σ-àlgebra de $\mathcal{P}(\Omega)$ més petita que fa mesurables totes les aplicacions de la família $\{X_i\}_{i\in I}$.
La notarem $\sigma\!<\!\{X_i\}_{i\in I}\!>$.
També se l'anomena *σ-àlgebra inicial* de la família (observeu l'analogia amb la definició de topologia inicial.)

2.1.5 Observació

Clarament, també es pot definir la σ-àlgebra inicial com la generada per la família de conjunts

$$\{X_i^{-1}(A)\}_{A\in\mathfrak{E}_i,\ i\in I} \ .$$

2.1.6 Proposició

Sigui Ω un conjunt.
Sigui $\{(E_i, \mathfrak{E}_i)\}_{i\in I}$ una família arbitrària d'espais mesurables.
Sigui $\{X_i : \Omega \longrightarrow E_i\}_{i\in I}$ una família d'aplicacions.
Siguin $(F, \mathfrak{F})$ un altre espai mesurable, i una aplicació $Y : F \longrightarrow \Omega$.
Aleshores:

$$Y \text{ és } (\mathfrak{F}, \sigma\!<\!\{X_i\}_{i\in I}\!>)\text{-mesurable} \iff$$
$$\forall i \in I,\ X_i \circ Y : F \longrightarrow E_i \text{ és } (\mathfrak{F}, \mathfrak{E}_i)\text{-mesurable.}$$

(Recordeu que es dóna una situació anàloga amb funcions contínues entre espais topològics.)

Demostració:

$\Rightarrow$) Per a cada $i \in I$, X_i és $(\sigma\!<\!\{X_i\}_{i\in I}\!>, \mathfrak{E}_i)$-mesurable. Només cal aplicar que la composició de funcions mesurables és mesurable (Proposició 2.1.3).

$\Leftarrow$) Segons l'Exercici 2.1.2, és suficient veure que $Y^{-1}(A) \in \mathfrak{F}$, per a tot A d'una col·lecció de conjunts que generi $\sigma\!<\!\{X_i\}_{i\in I}\!>$.
Usant l'Observació 2.1.5, si $A_i \in \mathfrak{E}_i$,

$$Y^{-1}(X_i^{-1}(A_i)) = (X_i \circ Y)^{-1}(A_i) \in \mathfrak{F} \qquad \square$$

A partir d'aquí, ens interessa estudiar especialment el cas de les *funcions numèriques*, és a dir, les que prenen valors a $\mathbb{R}$, a $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, o a $\mathbb{C}$.

En el cas de $\mathbb{R}$, prendrem $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ com a espai mesurable. Quin espai agafem en el cas de $\bar{\mathbb{R}}$? Anem a precisar totes les estructures que considerarem en $\bar{\mathbb{R}}$:

a) *Conjunt:* Afegim a $\mathbb{R}$ dos símbols, $-\infty$ ('menys infinit') i $+\infty$ ('més infinit'):

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

(de vegades, $+\infty$ es nota simplement ∞.)

b) *Estructura d'ordre:*

i) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\quad a < b$ en $\bar{\mathbb{R}}$ sii $a < b$ en $\mathbb{R}$.

ii) $\forall a \in \mathbb{R}$, $\quad -\infty < a < +\infty$.

c) *Estructura topològica:* Podem descriure-la especificant els entorns de cada punt:

i) Entorns de $-\infty$: Les semirectes $[-\infty, a[$ $(a \in \mathbb{R})$ i tot conjunt que en contingui.

ii) Entorns de $+\infty$: Les semirectes $]a, +\infty]$ $(a \in \mathbb{R})$ i tot conjunt que en contingui.

iii) Entorns de $a \in \mathbb{R}$: Els que ho siguin de a en $\mathbb{R}$ i tot conjunt que en contingui.

Amb aquesta topologia, $\bar{\mathbb{R}}$ és un espai topològic compacte.

d) *Estructura aritmètica:* Totes les operacions entre nombres reals donen el mateix resultat que en $\mathbb{R}$. Pels demés casos:

+) $a + (+\infty) = +\infty$, $a + (-\infty) = -\infty$, $\forall a \in \mathbb{R}$
$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
i és commutativa.

−) $a - b = a + (-1)b$, si la operació resultant està definida.

×) $a \cdot (+\infty) = +\infty$, $a \cdot (-\infty) = -\infty$, si $0 < a \leqslant +\infty$
$a \cdot (+\infty) = -\infty$, $a \cdot (-\infty) = +\infty$, si $-\infty \leqslant a < 0$
$0 \cdot (+\infty) = 0 \cdot (-\infty) = 0$
i es commutativa.

÷) $\dfrac{a}{+\infty} = \dfrac{a}{-\infty} = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Tota operació que no es dedueixi d'aquestes no està definida. En particular, $\bar{\mathbb{R}}$ no és un cos. Totes les operacions coincideixen amb la típica aritmètica de límits, excepte que aquí hi afegim el producte entre 0 i els infinits, que es defineix com 0.

e) *Estructura mesurable:* Com a σ-àlgebra en $\bar{\mathbb{R}}$ hi posem els borelians, i.e. la σ-àlgebra generada pels oberts de $\bar{\mathbb{R}}$. La notarem $\mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}})$. Es pot veure fàcilment que els elements de $\mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}})$ són d'alguna de les formes

$$B, \quad B \cup \{-\infty\}, \quad B \cup \{+\infty\}, \quad B \cup \{-\infty, +\infty\},$$

amb $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

El cas de $\mathbb{C}$ no té cap dificultat especial, perquè conjuntísticament $\mathbb{C}$ no és més que $\mathbb{R}^2$. La seva topologia natural és l'habitual de $\mathbb{R}^2$, i com a σ-àlgebra prendrem la dels borelians de $\mathbb{R}^2$. En $\mathbb{C}$ no hi considerem cap estructura d'ordre. La seva aritmètica se suposa coneguda del lector.

2.1.7 Definició

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F})$ un espai mesurable.
Una funció $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ (o $\bar{\mathbb{R}}$) es diu *Borel-mesurable*, o simplement *mesurable*, sii és $(\mathfrak{F}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-mesurable (respectivament, $(\mathfrak{F}, \mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}}))$-mesurable.)

2.1.8 Observació

Tota funció mesurable $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ és també mesurable considerada com a funció $X\colon \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$. Recíprocament, si $X\colon \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ és mesurable i la imatge de X està continguda en $\mathbb{R}$, també és mesurable considerada com a funció $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
Aquestes afirmacions són conseqüència fàcil de la caracterització de $\mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}})$ en termes de $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ que acabem de veure. $\square$

Gràcies a l'observació anterior, serà suficient establir només per a funcions mesurables $X\colon \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ propietats i conceptes vàlids també en el cas real.

2.1.9 Proposició

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F})$ *un espai mesurable.*
Sigui $X\colon \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$.
Aleshores, X és mesurable $\Leftrightarrow \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant b\} \in \mathfrak{F}, \quad \forall b \in \mathbb{R}$.

Demostració: La implicació $\Rightarrow$) és evident. Si comprovem que la col·lecció d'intervals $\mathfrak{C} = \{[-\infty, b] : \ b \in \mathbb{R}\}$ generen $\mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}})$, obtindrem $\Leftarrow$), gràcies a l'Exercici 2.1.2.
A partir dels intervals de la forma $[-\infty, b]$, obtenim successivament

$$\begin{aligned}]a,b] &= [-\infty,b] - [-\infty,a] \ , \quad \forall a < b \in \mathbb{R} \\ ]-\infty,b] &= \bigcup_{n=1}^{\infty}]-n,b] \ , \quad \forall b \in \mathbb{R} \\ ]a,+\infty[&= \bigcup_{n=1}^{\infty}]a,n] \ , \quad \forall a \in \mathbb{R} \\ \mathbb{R} &=]-\infty,a] \cup]a,+\infty[\ , \quad \text{amb } a \in \mathbb{R} \text{ qualsevol} \\ \emptyset &= \text{ intersecció de dos intervals disjunts qualssevol.} \end{aligned}$$

Per tant, $\sigma\big(\{[-\infty, b] : \ b \in \mathbb{R}\}\big)$ conté una semiàlgebra que genera $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ (vegeu l'Exemple 1.2.19, *1)*), d'on

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma\big(\{[-\infty, b] : \ b \in \mathbb{R}\}\big) \ .$$

A més,

$$\begin{aligned} \{-\infty\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} [-\infty, -n] \\ \{+\infty\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty}]n, +\infty] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [-\infty, n]^c \ . \end{aligned}$$

Deduïm que $\sigma\big(\{[-\infty, b] : \ b \in \mathbb{R}\}\big)$ conté

$$\big\{B, \ B \cup \{-\infty\}, \ B \cup \{+\infty\}, \ B \cup \{-\infty, +\infty\}\big\}_{B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})} = \mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}}) \qquad \square$$

2.1.10 Exercici

L'expressió $X(\omega) \leqslant b$ de l'enunciat es pot substituir per $X(\omega) < b$, $X(\omega) \geqslant b$ o $X(\omega) > b$. (Vegeu el Problema **2.1**.) $\square$

A $\mathbb{R}^n$ (i $\bar{\mathbb{R}}^n$) podem considerar la topologia producte de n còpies de $\mathbb{R}$ (resp. $\bar{\mathbb{R}}$), és a dir, la generada pels conjunts $A_1 \times \cdots \times A_n$, amb A_i obert de $\mathbb{R}$ (resp. $\bar{\mathbb{R}}$), o equivalentment, generada per les projeccions de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ (resp. de $\bar{\mathbb{R}}^n$ en $\bar{\mathbb{R}}$.)

Això ens permet considerar els borelians de $\mathbb{R}^n$ i $\bar{\mathbb{R}}^n$ (notació: $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ i $\mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}}^n)$, resp.) i fer la definició següent sobre funcions a valors vectorials.

2.1.11 Definició

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F})$ un espai mesurable.
Una funció $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (o $\bar{\mathbb{R}}^n$) és *Borel-mesurable,* o simplement *mesurable*, sii és $(\mathfrak{F}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$-mesurable (resp. $(\mathfrak{F}, \mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}}^n))$-mesurable.) $\square$

La següent proposició és l'anàloga de 2.1.9 per a funcions vectorials.

2.1.12 Proposició

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F})$ *un espai mesurable.*
Sigui $X : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$.
Aleshores,

$$X \ \textit{és mesurable} \Leftrightarrow \{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \in [-\infty, b]\} \in \mathfrak{F}, \qquad \forall b \in \mathbb{R}^n,$$

on $[-\infty, b] := [-\infty, b_1] \times \cdots \times [-\infty, b_n]$, *si* $b = (b_1, \ldots, b_n)$.

Demostració: És similar a la de la Proposició 2.1.9, usant la semiàlgebra de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ que es proposa en el Problema **1.10**. Es deixen els detalls al lector. $\square$

La proposició següent redueix la verificació de la mesurabilitat d'una funció vectorial a la de les seves components reals.

2.1.13 Proposició

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F})$ *un espai mesurable.*
Sigui $X\colon \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$.
Notem per X_i *les funcions coordenades de* X*, o sigui,* $X = (X_1, \ldots, X_n)$.
Aleshores, X *és mesurable* $\Leftrightarrow X_i\colon \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ *és mesurable,* $\forall i = 1, \ldots, n$.

Demostració: Cada funció X_i es pot expressar com la composició

$$\begin{array}{rcccl} X_i\colon \Omega & \xrightarrow{\quad X \quad} & \bar{\mathbb{R}}^n & \xrightarrow{\quad \pi_i \quad} & \bar{\mathbb{R}} \\ \omega & \longmapsto & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_i \end{array}$$

Per la Proposició 2.1.6, X és $(\mathfrak{F}, \sigma\text{<}\{\pi_i\}_{i=1}^n\text{>})$-mesurable sii $\forall i = 1, \ldots, n$, $\pi_i \circ X$ és $(\mathfrak{F}, \mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}}))$-mesurable.
I això és exactament l'enunciat: Per una banda $\pi_i \circ X = X_i$; per altra banda, es té $\sigma\text{<}\{\pi_i\}_{i=1}^n\text{>} \supset \mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}}^n)$ (a partir de les definicions) i es comprova fàcilment que $\mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}}^n)$ fa mesurables les projeccions, d'on $\sigma\text{<}\{\pi_i\}_{i=1}^n\text{>} = \mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}}^n)$.

2.1.14 Notació

És habitual abreviar la descripció de subconjunts de Ω relacionats amb funcions de la manera següent:

$$\{X \in B\} := \{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \in B\} \ .$$

Per exemple,

$$\{X \leqslant a\} := \{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \leqslant a\} \ , \quad \{X \neq Y\} := \{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \neq Y(\omega)\} \ , \quad \ldots$$

2.1.15 Exercicis

1) Siguin $X, Y\colon \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ funcions mesurables. Aleshores, els conjunts

$$\{X < Y\}, \quad \{X \leqslant Y\}, \quad \{X = Y\}, \quad \{X \neq Y\}$$

són mesurables. (Vegeu el Problema **2.2**.)

2) Si $X\colon \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ és una funció constant, aleshores és mesurable.

2.1.16 Proposició

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F})$ *un espai mesurable.*
Siguin $X, Y\colon \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ *funcions mesurables.*
Aleshores:

1) $X + Y$ *és mesurable (suposant que estigui ben definida, i.e. que no involucri la operació* $\infty - \infty$.*)*

2) $X \cdot Y$ *és mesurable.*

Demostració:
1)

$$X \text{ mesurable} \overset{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} X + b \text{ mesurable}, & \forall b \in \bar{\mathbb{R}} \\ b \cdot X \text{ mesurable}, & \forall b \in \bar{\mathbb{R}} \ . \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Per tant, $\{X + Y \leqslant b\} = \{X \leqslant b - Y\} \in \mathfrak{F}$, per l'Exercici 2.1.15. La Proposició 2.1.9 ens diu que $X + Y$ és mesurable.

(1) Immediat usant la caracterització de la Proposició 2.1.9.

2) Sigui $B \in \mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}})$.
Siguin $A_1 := \{X \cdot Y \in B \cap \mathbb{R}^c\}$ i $A_2 := \{X \cdot Y \in B \cap \mathbb{R}\}$. Tindrem que

$$(X \cdot Y)^{-1}(B) = A_1 \cup A_2 \ ,$$

i volem veure que A_1 i A_2 són de $\mathfrak{F}$.
Per A_1, es distingeixen casos segons $B \cap \mathbb{R}^c$ sigui $\emptyset$, $\{-\infty\}$, $\{+\infty\}$ o $\{-\infty, +\infty\}$. Per exemple, per $\{+\infty\}$,

$$\begin{aligned} A_1 = \big(\{X = +\infty\} \cap \{Y \neq -\infty\}\big) &\cup \big(\{X = -\infty\} \cap \{Y = -\infty\}\big) \\ &\cup \big(\{X \neq -\infty\} \cap \{Y = +\infty\}\big) \ , \end{aligned}$$

i tots aquests conjunts són de $\mathfrak{F}$, perquè X i Y són mesurables. Els altres casos són semblants.
Per altra banda, sobre A_2, podem escriure

$$X \cdot Y = \frac{1}{4}(X+Y)^2 - \frac{1}{4}(X-Y)^2 \ .$$

Gràcies a la implicació (2.1.1) i a la part *1)*, veiem que només ens queda comprovar que

$$X \text{ mesurable} \Rightarrow X^2 \text{ mesurable.}$$

En efecte,

$$\{X^2 \leqslant b\} = \begin{cases} \emptyset \in \mathfrak{F}, & \text{si } b < 0 \\ \{-\sqrt{b} \leqslant X \leqslant \sqrt{b}\} = \{-\sqrt{b} \leqslant X\} \cap \{X \leqslant \sqrt{b}\} \overset{(1)}{\in} \mathfrak{F}, & \text{si } b \geqslant 0. \end{cases}$$

(1) Ambdós conjunts són de $\mathfrak{F}$, per la Proposició 2.1.9 i l'Exercici 2.1.10.

2.1.17 Proposició

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F})$ un espai mesurable.
Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de funcions mesurables, $X_n \colon \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$.
Aleshores:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n \ , \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} X_n \ , \quad \varlimsup_{n\to\infty} X_n \ , \quad \varliminf_{n\to\infty} X_n$$

són mesurables.

Demostració:
1) $\big\{\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n \leqslant b\big\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{X_n \leqslant b\} \in \mathfrak{F}$.
2) $\inf_{n\in\mathbb{N}} X_n = -\sup_{n\in\mathbb{N}} -X_n$, i apliquem la mesurabilitat del suprem.
3) $\varlimsup_{n\to\infty} X_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geqslant n} X_m$, per definició, i apliquem els casos anteriors.
4) $\varliminf_{n\to\infty} X_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\geqslant n} X_m$, igual que pel límit superior.

2.1.18 Corol·lari

Si X és mesurable, aleshores les funcions

$$\begin{aligned} &|X| := \sup\{X, -X\} \quad \textit{(valor absolut de X)} \\ &X^+ := \sup\{X, 0\} \quad \textit{(part positiva de X)} \\ &X^- := \sup\{-X, 0\} \quad \textit{(part negativa de X)} \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

són mesurables. □

Observem de passada que $X = X^+ - X^-$ i $|X| = X^+ + X^-$.

2.2 Integral respecte una mesura

2.2.1 Definició

Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, la funció $\mathbf{1}_A\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida com

$$\mathbf{1}_A(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \in A \\ 0, & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

s'anomena *indicador* del conjunt A.

2.2.2 Observació

Si $(\Omega, \mathfrak{F})$ és un espai mesurable, aleshores

$$\mathbf{1}_A \text{ és una funció mesurable} \Leftrightarrow A \text{ és un conjunt mesurable} .$$

Efectivament, si $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $\mathbf{1}_A^{-1}(B)$ només pot ser A, A^c, $\emptyset$ o Ω. Si A és mesurable, tots aquests conjunts ho són. En cas contrari, no.

2.2.3 Definició

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F})$ un espai mesurable.
Sigui $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable.
X és una *funció elemental* sii pren només un nombre finit de valors. Equivalentment, sii es pot expressar com

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}(\omega) \tag{2.2.1}$$

per certs $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ i $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{F}$. □

Un raonament similar al de l'Observació 2.2.2 ens mostra que una expressió del tipus (2.2.1) defineix una funció mesurable (i per tant mereix el nom de funció elemental) sii els conjunts $A_1, \ldots, A_n$ són mesurables.

2.2.4 Proposició

Les funcions elementals sobre un espai mesurable $(\Omega, \mathfrak{F})$ *constitueixen:*

1) *Un espai vectorial real respecte les operacions habituals de suma i producte per escalars.*

2) *Un reticle respecte la relació d'ordre habitual.*

Demostració:
1) És conegut que el conjunt de totes les funcions reals definides sobre un conjunt qualsevol és un espai vectorial amb les operacions habituals de suma i producte per escalars (amb $\mathbb{R}$ com a cos d'escalars). Per tant, només cal comprovar que les funcions elementals són un subconjunt estable per aquestes operacions.
Sabem que la suma i el producte per escalars de funcions mesurables és mesurable. Per altra banda,

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i} \Rightarrow aX = \sum_{i=1}^{n} (aa_i) \cdot \mathbf{1}_{A_i} ,$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i},\ Y = \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot \mathbf{1}_{B_j} \Rightarrow X + Y = \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{\substack{m\\n}} (a_i + b_j) \cdot \mathbf{1}_{A_i \cap B_j} .$$

2) Anàlogament, només cal veure que el suprem i l'ínfim de dues funcions elementals és altre cop una funció elemental. En efecte, sabem que suprem i ínfim de funcions mesurables són mesurables, i

$$\sup\Big\{\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot \mathbf{1}_{A_i}, \sum_{j=1}^{m} b_j\cdot \mathbf{1}_{B_j}\Big\} = \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\substack{m\\ n}} \sup\{a_i,b_j\}\cdot \mathbf{1}_{A_i\cap B_j}$$

$$\inf\Big\{\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot \mathbf{1}_{A_i}, \sum_{j=1}^{m} b_j\cdot \mathbf{1}_{B_j}\Big\} = \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\substack{m\\ n}} \inf\{a_i,b_j\}\cdot \mathbf{1}_{A_i\cap B_j} \qquad \square$$

Les funcions elementals, tot i constituir un conjunt molt restringit, donen lloc a totes les funcions mesurables per operacions de pas al límit, com veurem en la proposició i corol·lari següents.

2.2.5 Proposició

Sigui $(\Omega,\mathfrak{F})$ un espai mesurable.
Sigui $X\colon\Omega\longrightarrow[0,+\infty]$ mesurable.
Aleshores, X és límit d'una successió creixent de funcions elementals positives.

Demostració: Definim, per a cada $n\in\mathbb{N}$,

$$X_n := \sum_{k=1}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n}\cdot \mathbf{1}_{\{\frac{k}{2^n}\leqslant X<\frac{k+1}{2^n}\}} + n\cdot \mathbf{1}_{\{n\leqslant X\}}\ .$$

És rutinari comprovar que les X_n són funcions elementals positives, que formen una successió creixent, i que $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)=X(\omega)$, $\forall\omega\in\Omega$.

2.2.6 Corol·lari

Sigui $(\Omega,\mathfrak{F})$ un espai mesurable.
Sigui $X\colon\Omega\longrightarrow\bar{\mathbb{R}}$ mesurable.
Aleshores, X és límit d'una successió de funcions elementals.

Demostració: Les funcions X^+ i X^- són funcions mesurables positives (vegeu (2.1.2).)
Sigui $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió creixent de funcions elementals tal que $\lim_{n\to\infty} Y_n = X^+$.
Sigui $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió creixent de funcions elementals tal que $\lim_{n\to\infty} Z_n = X^-$.

$$\lim_{n\to\infty}(Y_n-Z_n) = X^+ - X^- = X\ .$$

Gràcies a la Proposició 2.2.4, les funcions $X_n := Y_n - Z_n$ són elementals. $\square$

Introduïrem primerament la integral de funcions elementals positives. La definició reflecteix la idea que una integral ha de ser "l'àrea sota la corba" (en aquest cas, la suma de les àrees d'uns certs rectangles.) La base de cada rectangle aporta al càlcul de l'àrea la seva mesura, correspongui aquesta mesura o no a alguna idea intuïtiva de "longitud" que poguem tenir en Ω, com succeeix en el cas particular de la mesura de Lebesgue en $\Omega=\mathbb{R}$.

La integral es defineix després per a funcions més generals tot mantenint la intuïció de "l'àrea" gràcies als resultats d'aproximació 2.2.5 i 2.2.6.

2.2.7 Definició

Sigui $(\Omega,\mathfrak{F},\mu)$ un espai de mesura.

Sigui $X = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}$ una funció elemental positiva.
Definim la *integral de X respecte* μ com

$$\int_\Omega X\,d\mu := \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mu(A_i) \quad \in [0,+\infty] \ .$$

També l'escrivim $\int_\Omega X(\omega)\,\mu(d\omega)$ quan volem posar de manifest la variable de la funció que integrem. □

No hi ha una manera única de representar una funció elemental en la forma (2.2.1). Per tant, com sempre en aquests casos, cal comprovar que la definició té sentit verificant que no depèn de la representació particular que es prengui. Es recomana al lector fer l'esforç de convèncer-se mentalment que és cert, i per escrit només si aquest intent falla.

Hi ha però una representació "canònica" d'una funció elemental: Si imposem que

$$\Omega = \biguplus_i A_i \quad \text{i} \quad i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j$$

(algun a_i pot ser zero), aleshores la representació és única. A partir d'ara, prendrem sempre aquesta representació canònica, sense esmentar-ho explícitament.

2.2.8 Proposició

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ *un espai de mesura.*
La integral respecte μ *de funcions elementals positives gaudeix de les propietats següents:*

1) $a \geqslant 0 \Rightarrow \int_\Omega aX\,d\mu = a\int_\Omega X\,d\mu$.

2) $\int_\Omega (X+Y)\,d\mu = \int_\Omega X\,d\mu + \int_\Omega Y\,d\mu$.

3) $X \leqslant Y \Rightarrow \int_\Omega X\,d\mu \leqslant \int_\Omega Y\,d\mu$.

4) Si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *és una successió creixent de funcions elementals positives i la funció* $X := \lim_{n\to\infty} X_n$ *també és elemental positiva, aleshores*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n\,d\mu = \int_\Omega X\,d\mu \ .$$

Demostració:
1) Sigui $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}$. Tindrem $aX = \sum_{i=1}^{n} (aa_i) \cdot \mathbf{1}_{A_i}$.

$$\int_\Omega aX\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} (aa_i)\mu(A_i) = a\sum_{i=1}^{n} a_i\mu(A_i) = a\int_\Omega X\,d\mu \ .$$

2) Siguin

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i} \ , \quad Y = \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot \mathbf{1}_{B_j} \ .$$

Llavors,

$$\int_\Omega (X+Y)\,d\mu = \int_\Omega \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{\substack{m\\n}} (a_i+b_j)\cdot \mathbf{1}_{A_i\cap B_j}\,d\mu \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (a_i+b_j)\mu(A_i\cap B_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i\cap B_j) + \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i\cap B_j)$$

$$\overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i\mu(A_i) + \sum_{j=1}^{n} b_j\mu(B_j) \overset{(1)}{=} \int_\Omega X\,d\mu + \int_\Omega Y\,d\mu \ .$$

(1) Usem la definició d'integral d'una funció elemental.
(2) Usem que $\{A_1,\dots,A_n\}$ i $\{B_1,\dots,B_m\}$ són particions de Ω.

3) Siguin

$$X=\sum_{i=1}^n a_i\cdot\mathbf{1}_{A_i}\ ,\quad Y=\sum_{j=1}^m b_j\cdot\mathbf{1}_{B_j}\ .$$

Llavors,

$$\begin{aligned}\int_\Omega X\,d\mu&=\sum_{i=1}^n a_i\mu(A_i)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m a_i\mu(A_i\cap B_j)\\&\overset{(1)}{\leqslant}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m b_j\mu(A_i\cap B_j)=\sum_{j=1}^m b_j\mu(B_j)=\int_\Omega Y\,d\mu\ .\end{aligned}$$

(1) Si $A_i\cap B_j\neq\emptyset$, ha de ser $a_i\leqslant b_j$.

4) Siguin

$$X=\sum_{i=1}^m a_i\cdot\mathbf{1}_{A_i}\ ,\quad X_n=\sum_{j=1}^{m_n} b_j^n\cdot\mathbf{1}_{B_j^n}\ .$$

$\leqslant$)

$$\begin{aligned}X_n\leqslant X,\ \forall n,\ &\overset{(1)}{\Rightarrow}\int_\Omega X_n\,d\mu\leqslant\int_\Omega X\,d\mu,\ \forall n,\\&\overset{(2)}{\Rightarrow}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega X_n\,d\mu\leqslant\int_\Omega X\,d\mu\ .\end{aligned}$$

(1) Per la propietat de monotonia *3)* anterior.
(2) El límit existeix perquè la successió és monòtona.

$\geqslant$) Tenim que

$$\begin{aligned}\int_\Omega X\,d\mu&=\sum_{i=1}^m a_i\mu(A_i)\\\int_\Omega X_n\,d\mu&=\sum_{j=1}^{m_n} b_j^n\mu(B_j^n)\overset{(1)}{=}\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^{m_n} b_j^n\mu(A_i\cap B_j^n)\ .\end{aligned}\tag{2.2.2}$$

Veurem que $\forall i$, $a_i\mu(A_i)\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{m_n} b_j^n\mu(A_i\cap B_j^n)$, i haurem acabat, a la vista de les relacions (2.2.2).
Si $a_i=0$, és evident. Suposem que $a_i>0$.
Fixem $0<\gamma<1$.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m_n} b_j^n\mu(A_i\cap B_j^n)&=\sum_{\substack{j=1\\\{j:\ b_j^n>\gamma a_i\}}}^{m_n} b_j^n\mu(A_i\cap B_j^n)+\sum_{\substack{j=1\\\{j:\ b_j^n\leqslant\gamma a_i\}}}^{m_n} b_j^n\mu(A_i\cap B_j^n)\\&\overset{(2)}{\geqslant}\sum_{\substack{j=1\\\{j:\ b_j^n>\gamma a_i\}}}^{m_n}\gamma a_i\mu(A_i\cap B_j^n)\overset{(3)}{=}\gamma a_i\sum_{j=1}^{m_n}\mu(A_i\cap B_j^n\cap\{X_n>\gamma a_i\})\\&\overset{(4)}{=}\gamma a_i\mu(A_i\cap\{X_n>\gamma a_i\})\ .\end{aligned}$$

Fent $n\to\infty$,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{m_n} b_j^n\mu(A_i\cap B_j^n)\overset{(5)}{\geqslant}\gamma a_i\mu(A_i)\ .$$

Fent $\gamma \to 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{m_n} b_j^n \mu(A_i \cap B_j^n) \geqslant a_i \mu(A_i) \ .$$

(1) $\{A_1, \ldots, A_m\}$ és una partició de Ω.

(2) Suprimim el segon sumand i minorem el primer: Sobre el conjunt d'índexos on se suma, $b_j^n \geqslant \gamma a_i$.

(3) Es té $\{j : \ b_j^n > \gamma a_i\} = \{j : \ X_n > \gamma a_i$ sobre $A_i \cap B_j^n\}$. Per tant, pels índexos j que estem afegint, el sumand corresponent és $\mu(\emptyset) = 0$.

(4) $\{B_1^n, \ldots, B_{m_n}^n\}$ és una partició de Ω, per a cada n.

(5) Usem que $A_i \cap \{X_n > \gamma a_i\} \nearrow A_i$, perquè, sobre A_i, X_n tendeix a a_i, que és més gran que γa_i.

2.2.9 Definició

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ un espai de mesura.
Sigui $X\colon \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$ una funció mesurable (positiva!)
Definim la *integral de X respecte μ* com

$$\int_\Omega X \, d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n \, d\mu \ , \tag{2.2.3}$$

on $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió creixent de funcions elementals positives que convergeix a X.
Noteu que, per la propietat *3)* de la Proposició 2.2.8, la successió d'integrals és creixent i per tant el límit existeix segur.

2.2.10 Observació

Cal comprovar que el límit de (2.2.3) és independent de la successió de funcions elementals escollida.
Veurem que, si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ són dues successions creixents de funcions elementals, llavors

$$\lim_{n\to\infty} X_n \leqslant \lim_{n\to\infty} Y_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n \, d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_\Omega Y_n \, d\mu \ .$$

Això implicarà que si els límits de les funcions coincideixen, els límits de les integrals han de coincidir.
Observem que $\forall m \in \mathbb{N}$, $X_m = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{X_m, Y_n\}$. Per tant,

$$\int_\Omega X_m \, d\mu \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \inf\{X_m, Y_n\} \, d\mu \overset{(2)}{\leqslant} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega Y_n \, d\mu \ .$$

Fent $m \to \infty$:

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega X_m \, d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_\Omega Y_n \, d\mu \ .$$

(1) Gràcies a la Proposició 2.2.4 i a la propietat *4)* de la Proposició 2.2.8. Només per aquest detall necessitem demostrar la propietat *4)* anterior abans de fer la Definició 2.2.9.

(2) Gràcies a la propietat *3)* de la Proposició 2.2.8.

2.2.11 Proposició

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ un espai de mesura.
La integral respecte μ de funcions mesurables positives gaudeix de les propietats següents:

1) $a \geqslant 0 \Rightarrow \displaystyle\int_\Omega aX \, d\mu = a \int_\Omega X \, d\mu$.

2) $\displaystyle\int_\Omega X+Y\,d\mu = \int_\Omega X\,d\mu + \int_\Omega Y\,d\mu$.

3) $X \leqslant Y \Rightarrow \displaystyle\int_\Omega X\,d\mu \leqslant \int_\Omega Y\,d\mu$ *(i en particular,* $\displaystyle\int_\Omega X\,d\mu \geqslant 0$*)* .

4) Si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *és una successió creixent de funcions mesurables positives i* $X := \lim_{n\to\infty} X_n$*, aleshores*

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega X_n\,d\mu = \int_\Omega X\,d\mu \ .$$

5) Si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *és una successió de funcions mesurables positives, aleshores*

$$\int_\Omega \underline{\lim}_{n\to\infty} X_n\,d\mu \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_\Omega X_n\,d\mu \ .$$

6) $\displaystyle\int_\Omega X\,d\mu < +\infty \Rightarrow \mu(\{X=+\infty\}) = 0$.

7) $\displaystyle\int_\Omega X\,d\mu = 0 \Leftrightarrow \mu(\{X>0\}) = 0$.

Demostració:
1) Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió creixent de funcions elementals positives amb $\lim_{n\to\infty} X_n = X$. Tindrem que $\{aX_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ també és una successió creixent d'elementals positives amb límit aX.

$$\int_\Omega aX\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega aX_n\,d\mu \overset{(1)}{=} a\lim_{n\to\infty}\int_\Omega X_n\,d\mu = a\int_\Omega X\,d\mu \ .$$

(1) Proposició 2.2.8, *1)*.

2) Siguin $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successions creixents de funcions elementals positives amb límits X i Y, respectivament. Tindrem que $\{X_n+Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ també és una successió creixent d'elementals positives amb límit $X+Y$.

$$\begin{aligned}\int_\Omega (X+Y)\,d\mu &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega (X_n+Y_n)\,d\mu \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty}\int_\Omega X_n\,d\mu + \lim_{n\to\infty}\int_\Omega Y_n\,d\mu \\ &= \int_\Omega X\,d\mu + \int_\Omega Y\,d\mu \ .\end{aligned}$$

(1) Per la Proposició 2.2.8, *2)*. No hi ha cap problema en separar el límit en suma de límits, perquè tots ells existeixen i són positius.

3) Siguin $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successions creixents de funcions elementals positives amb límits X i Y, respectivament.
Podem suposar que $X_n \leqslant Y_n$, $\forall n$. En cas contrari, prenem en lloc de Y_n les funcions $Y'_n = \sup\{X_n, Y_n\}$, que són elementals positives, formen una successió creixent i $\lim_{n\to\infty} Y'_n = \lim_{n\to\infty}\sup\{X_n,Y_n\} = \lim_{n\to\infty} Y_n = Y$.
Obtenim

$$\int_\Omega X\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega X_n\,d\mu \overset{(1)}{\leqslant} \lim_{n\to\infty}\int_\Omega Y_n\,d\mu = \int_\Omega Y\,d\mu \ .$$

En particular, la integral de tota funció mesurable positiva pertany a $[0,+\infty]$. Només cal aplicar la propietat que acabem de demostrar a la desigualtat $0 \leqslant X$, i comprovar que $\displaystyle\int_\Omega 0\,d\mu = 0$. Això últim és immediat a partir de la definició d'integral de la funció elemental $0\cdot\mathbf{1}_\Omega$.

(1) Proposició 2.2.8, *3)*.

4) Observeu primerament que $\lim_{n\to\infty} X_n$ existeix, per la monotonia de la successió, i és una funció mesurable (Proposició 2.1.17) i positiva.
Per a cada n, sigui $\{Y_{m,n}\}_{m\in\mathbb{N}}$ una successió creixent de funcions elementals amb límit X_n.
Per a cada m, sigui $Z_m := \sup\{Y_{m,1}, \ldots, Y_{m,m}\}$. Per la propietat de reticle (Proposició 2.2.4), Z_m és una funció elemental; i és clar que $\{Z_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ és una successió creixent.
Llavors, si $n \leqslant m$,

$$Y_{m,n} \overset{(1)}{\leqslant} Z_m \overset{(2)}{\leqslant} X_m \ .$$

Fent $m \to \infty$:

$$X_n = \lim_{m\to\infty} Y_{m,n} \leqslant \lim_{m\to\infty} Z_m \leqslant \lim_{m\to\infty} X_m = X \ .$$

Fent $n \to \infty$, trobem

$$\lim_{m\to\infty} Z_m = X \ .$$

Hem obtingut una successió creixent de funcions elementals que convergeix a X. Tenim, per una banda,

$$\int_\Omega X\,d\mu \overset{(3)}{=} \lim_{m\to\infty} \int_\Omega Z_m\,d\mu \overset{(4)}{\leqslant} \lim_{m\to\infty} \int_\Omega X_m\,d\mu \ .$$

Per altra banda,

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega X_m\,d\mu \overset{(5)}{\leqslant} \int_\Omega X\,d\mu \ .$$

Per tant,

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega X_m\,d\mu = \int_\Omega X\,d\mu \ .$$

(1) De la definició de Z_m.
(2) $\forall m,\ \forall k \leqslant m,\ Y_{m,k} \leqslant X_k \leqslant X_m$, l'última desigualtat deguda al fet que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és creixent.
(3) Per definició de la integral de funcions positives.
(4) Usant la propietat *3)* anterior, puix que $Z_m \leqslant X_m$, $\forall m$.
(5) Perquè $X_m \leqslant X$, $\forall m$.

5)

$$\int_\Omega \varliminf_{n\to\infty} X_n\,d\mu \overset{(1)}{=} \int_\Omega \lim_{n\to\infty} (\inf_{m\geqslant n} X_m)\,d\mu \overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \inf_{m\geqslant n} X_m\,d\mu \overset{(3)}{\leqslant} \varliminf_{n\to\infty} \int_\Omega X_n\,d\mu \ .$$

(1) Per definició de límit inferior.
(2) Apliquem la propietat *4)* anterior. Observeu que $\{\inf_{m\geqslant n} X_m\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió creixent.
(3) Apliquem la propietat *3)* anterior, puix que $\inf_{m\geqslant n} X_m \leqslant X_n$, $\forall n$. El límit de la dreta no sabem si existeix o no. Però podem prendre límits inferiors, que sempre existeixen, i la desigualtat es conserva igualment.

6) Per a cada $n \in \mathbb{N}$,

$$+\infty > \int_\Omega X\,d\mu \overset{(1)}{\geqslant} \int_\Omega X \cdot \mathbf{1}_{\{X\geqslant n\}}\,d\mu \overset{(1)}{\geqslant} \int_\Omega n \cdot \mathbf{1}_{\{X\geqslant n\}}\,d\mu \overset{(2)}{=} n\mu(\{X \geqslant n\}) \ . \tag{2.2.4}$$

Dividint per n i fent $n \to \infty$,

$$\mu(\{X = +\infty\}) \overset{(3)}{=} \lim_{n\to\infty} \mu(\{X \geqslant n\}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_\Omega X\,d\mu = 0 \ .$$

(1) Apliquem la propietat *3)* anterior.
(2) L'integrand és una funció elemental. Apliquem la Definició 2.2.7.
(3) $\{X \geqslant n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió decreixent de conjunts de mesura finita, amb límit (intersecció) $\{X = +\infty\}$. Apliquem la Proposició 1.1.18.

7)

$\Rightarrow$)

$$\begin{aligned}\mu(\{X>0\}) &\overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty}\mu(\{X>\tfrac{1}{n}\}) = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \mathbf{1}_{\{X>\frac{1}{n}\}}\,d\mu\\ &\overset{(2)}{\leqslant} \lim_{n\to\infty}\int_\Omega nX\,d\mu = \lim_{n\to\infty} n\int_\Omega X\,d\mu = 0\ .\end{aligned}$$

(1) $\{X>\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió creixent de conjunts, amb límit (unió) $\{X>0\}$. Apliquem la Proposició 1.1.18.

(2) Apliquem la propietat *3)* anterior.

$\Leftarrow$)

$$\begin{aligned}\int_\Omega X\,d\mu &= \int_\Omega X\cdot\mathbf{1}_{\{X>0\}}\,d\mu + \int_\Omega X\cdot\mathbf{1}_{\{X=0\}}\,d\mu\\ &\overset{(1)}{\leqslant} \int_\Omega \infty\cdot\mathbf{1}_{\{X>0\}}\,d\mu \overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty}\int_\Omega n\cdot\mathbf{1}_{\{X>0\}}\,d\mu\\ &= \lim_{n\to\infty} n\mu(\{X>0\}) = 0\ .\end{aligned}$$

(1) Majorem el primer sumand, aplicant la propietat *3)* anterior. El segon integrand és la funció idènticament zero, que, com hem observat al demostrar *3)*, té integral zero.

(2) Apliquem la Definició 2.2.9. □

Finalment, definim la integral en el cas més general. La idea és descompondre la funció en part positiva i part negativa, i fer que la part negativa contribueixi a la integral amb signe negatiu.

2.2.12 Definició

Sigui $(\Omega,\mathfrak{F},\mu)$ un espai de mesura.
Sigui $X\colon\Omega\longrightarrow\bar{\mathbb{R}}$ una funció mesurable.
Definim la *integral de X respecte μ* com

$$\int_\Omega X\,d\mu := \int_\Omega X^+\,d\mu - \int_\Omega X^-\,d\mu\ , \tag{2.2.5}$$

sempre que l'expressió de la dreta de (2.2.5) no sigui $\infty-\infty$. Si ho és, diem que la integral de X *no existeix.*
Diem que X és *integrable* sii $\int_\Omega X\,d\mu$ existeix i és finita.

2.2.13 Observacions

1) Equivalentment,

$$\begin{aligned}X \text{ és integrable } &\Leftrightarrow \int_\Omega |X|\,d\mu<+\infty\\ &\Leftrightarrow \int_\Omega X^+\,d\mu<+\infty \quad\text{i}\quad \int_\Omega X^-\,d\mu<+\infty\ .\end{aligned}$$

2) La nomenclatura és una mica confusiva. Primer es decideix si una integral existeix o no; si existeix, el seu valor pot ser finit o infinit. Només si és finit es diu que la funció és integrable. □

Evidentment, quan diem que una propietat és certa en un conjunt Ω, estem dient que tots els elements $\omega \in \Omega$ la compleixen. Hi ha un concepte més feble que la certesa que apareix de manera natural en els espais de mesura. Introduirem aquest concepte abans de discutir les propietats de la integral de funcions mesurables arbitràries.

2.2.14 (Meta)Definició

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ un espai de mesura.
Diem que una propietat és certa *quasi per tot* respecte μ (abreviat μ-q.p.t. o simplement q.p.t. si no hi ha confusió possible) sii és certa per a tot $\omega \in \Omega$ llevat d'un conjunt de mesura zero.
Simbòlicament, si $P[\omega]$ és un predicat sobre els elements $\omega \in \Omega$,

$$P[\omega]\ \mu\text{-q.p.t.} \ \Leftrightarrow\ \exists N \in \mathfrak{F} :\ \mu(N) = 0 \ \text{ i } \ (\forall \omega \in N^c, P[\omega]) \ .$$

Si μ és una probabilitat, es diu també que la propietat és certa *quasi segur* respecte μ (abreviat μ-q.s. o simplement q.s.)

2.2.15 Exemples

1) Si $X, Y : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ són funcions mesurables, $X = Y$ μ-q.p.t. vol dir $\mu(\{X \neq Y\}) = 0$.
2) Les propietats *6)* i *7)* per a funcions mesurables positives que hem vist a la Proposició 2.2.11 es poden expressar de la manera següent:

$$\int_\Omega X\, d\mu < +\infty \Rightarrow X < +\infty \ \mu\text{-q.p.t.}$$
$$\int_\Omega X\, d\mu = 0 \Leftrightarrow X = 0 \ \mu\text{-q.p.t.}$$

2.2.16 Proposició

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ un espai de mesura.
Siguin $X, Y : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ funcions mesurables tals que $X = Y$ μ-q.p.t.
Aleshores: Si la integral de X existeix, la integral de Y també existeix i coincideixen:

$$\int_\Omega X\, d\mu = \int_\Omega Y\, d\mu \ .$$

En particular, si X és integrable, Y també és integrable.

Demostració: Si $X = Y$ q.p.t., llavors és clar que també $X^+ = Y^+$ q.p.t. i $X^- = Y^-$ q.p.t. Considerem els conjunts de mesura zero $N_1 := \{X^+ \neq Y^+\}$ i $N_2 := \{X^- \neq Y^-\}$. ($\{X \neq Y\} = N_1 \cup N_2$. La unió no té perquè ser disjunta.)

$$\begin{aligned}
\int_\Omega X\, d\mu &= \int_\Omega X^+\, d\mu - \int_\Omega X^-\, d\mu \\
&= \int_\Omega X^+ \cdot \mathbf{1}_{N_1}\, d\mu + \int_\Omega X^+ \cdot \mathbf{1}_{N_1^c}\, d\mu - \int_\Omega X^- \cdot \mathbf{1}_{N_2}\, d\mu - \int_\Omega X^- \cdot \mathbf{1}_{N_2^c}\, d\mu \\
&\overset{(1)}{=} \int_\Omega Y^+ \cdot \mathbf{1}_{N_1^c}\, d\mu - \int_\Omega Y^- \cdot \mathbf{1}_{N_2^c}\, d\mu \\
&\overset{(1)}{=} \int_\Omega Y^+ \cdot \mathbf{1}_{N_1}\, d\mu + \int_\Omega Y^+ \cdot \mathbf{1}_{N_1^c}\, d\mu - \int_\Omega Y^- \cdot \mathbf{1}_{N_2}\, d\mu - \int_\Omega Y^- \cdot \mathbf{1}_{N_2^c}\, d\mu \\
&= \int_\Omega Y^+\, d\mu - \int_\Omega Y^-\, d\mu = \int_\Omega Y\, d\mu \ .
\end{aligned}$$

(1) Sobre N_1^c, $X^+ \equiv Y^+$. Sobre N_2^c, $X^- \equiv Y^-$. La primera integral és zero: $0 \leqslant \int_\Omega X^+ \cdot \mathbf{1}_{N_1}\, d\mu \leqslant \int_\Omega \infty \cdot \mathbf{1}_{N_1}\, d\mu = 0$ (vegeu la demostració de 2.2.11, *7)*.) Anàlogament per la tercera. Anàlogament canviant X per Y.

2.2.17 Observació

De la Proposició 2.2.16 es desprèn que per parlar de la integral d'una funció X només cal que X estigui definida q.p.t. És a dir, pot haver-hi un conjunt de mesura zero N tal que X no estigui definida sobre N.
Per ser rigorosos, cal donar una definició de la integral en aquesta situació:

« Si X està definida q.p.t., sigui Y una funció definida per a tot $\omega \in \Omega$ tal que $X = Y$ q.p.t. Definim

$$\int_\Omega X \, d\mu := \int_\Omega Y \, d\mu$$

si la segona expressió té sentit. En cas contrari, diem que la integral de X no existeix. »

Aquest petit detall aporta una economia considerable. Per exemple, hom pot escriure $\displaystyle\int_\Omega (X+Y)\, d\mu$ sense amoïnar-se per possibles expressions $\infty - \infty$, sempre que a hom li consti a priori que només poden aparèixer sobre un conjunt de mesura zero.

2.2.18 Proposició

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ un espai de mesura.
La integració respecte μ de funcions mesurables arbitràries té les propietats següents:

1) *Si $a \in \mathbb{R}$, i la integral de X existeix, aleshores la integral de aX existeix i*

$$\int_\Omega aX \, d\mu = a \int_\Omega X \, d\mu \ .$$

En particular, si X és integrable, aX és integrable.

2) *Si les integrals de X i Y existeixen i l'expressió $\displaystyle\int_\Omega X\, d\mu + \int_\Omega Y \, d\mu$ no és $\infty - \infty$, aleshores $X+Y$ està definida q.p.t., la integral de $X+Y$ existeix i*

$$\int_\Omega (X+Y)\, d\mu = \int_\Omega X \, d\mu + \int_\Omega Y \, d\mu \ .$$

En particular, si X i Y són integrables, $X+Y$ és integrable.

3) *Si les integrals de X i Y existeixen,*

$$X \leqslant Y \ \text{q.p.t.} \Rightarrow \int_\Omega X \, d\mu \leqslant \int_\Omega Y \, d\mu \ .$$

4) *Si la integral de X existeix, aleshores*

$$\Big| \int_\Omega X \, d\mu \Big| \leqslant \int_\Omega |X| \, d\mu \ .$$

5) *Si la integral de X existeix,*

$$\int_\Omega X \, d\mu < +\infty \Rightarrow \mu(\{X = +\infty\}) = 0 \ ,$$
$$\int_\Omega X \, d\mu > -\infty \Rightarrow \mu(\{X = -\infty\}) = 0 \ .$$

Demostració:

1)

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_\Omega (aX)^+\,d\mu = \begin{cases} (\text{si } a \geqslant 0) & \displaystyle\int_\Omega aX^+\,d\mu = a\int_\Omega X^+\,d\mu \\ (\text{si } a < 0) & \displaystyle\int_\Omega (-a)X^-\,d\mu = (-a)\int_\Omega X^-\,d\mu \end{cases} \\ \displaystyle\int_\Omega (aX)^-\,d\mu = \begin{cases} (\text{si } a \geqslant 0) & \displaystyle\int_\Omega aX^-\,d\mu = a\int_\Omega X^-\,d\mu \\ (\text{si } a < 0) & \displaystyle\int_\Omega (-a)X^+\,d\mu = (-a)\int_\Omega X^+\,d\mu \end{cases}\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int_\Omega (aX)^+\,d\mu - \int_\Omega (aX)^-\,d\mu = a\Big(\int_\Omega X^+\,d\mu - \int_\Omega X^-\,d\mu\Big) = a\int_\Omega X\,d\mu\ .$$

Per tant, la integral de aX existeix i té aquest últim valor.

2) Suposarem que

$$\int_\Omega X\,d\mu \neq -\infty \quad \text{i} \quad \int_\Omega Y\,d\mu \neq -\infty\ . \tag{2.2.6}$$

Els altres casos (no totes dues integrals iguals a $+\infty$ o una d'elles finita) es farien de manera idèntica.

i) $X+Y$ està definida q.p.t. i la seva integral existeix:
Tenim que

$$\int_\Omega X\,d\mu \neq -\infty \overset{(1)}{\Rightarrow} \int_\Omega X^-\,d\mu < +\infty \overset{(2)}{\Rightarrow} \mu(\{X^- = +\infty\}) = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(3)}{\Rightarrow} \mu(\{X = -\infty\}) = 0\ .$$

Anàlogament, $\mu(\{Y = -\infty\}) = 0$.
El conjunt on $X+Y$ dóna una expressió $\infty - \infty$ ésta inclòs en $\{X = -\infty\} \cup \{Y = -\infty\}$, i per tant té mesura zero. En conseqüència, $X+Y$ està definida q.p.t.
A més,

$$(X+Y)^- \overset{(4)}{\leqslant} X^- + Y^-,\ \overset{(5)}{\Rightarrow} \int_\Omega (X+Y)^-\,d\mu \leqslant \int_\Omega X^-\,d\mu + \int_\Omega Y^-\,d\mu \overset{(6)}{<} +\infty \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_\Omega (X+Y)\,d\mu \ \text{ existeix.}$$

(1) Per la definició d'integral.

(2) Apliquem la propietat *6)* de la Proposició 2.2.11.

(3) Els dos conjunts són el mateix.

(4) Conseqüència fàcil de la definició de part negativa (vegeu les equacions (2.1.2)).

(5) Apliquem la propietat *3)* de la Proposició 2.2.11.

(6) Per (2.2.6) i la definició d'integral.

ii) La integral de la suma és la suma d'integrals:

Les consideracions del pas *i)* justifiquen els càlculs següents:

$$
\begin{aligned}
(X+Y)^+ - (X+Y)^- &= X+Y = X^+ - X^- + Y^+ - Y^- \\
&= (X^+ + Y^+) - (X^- + Y^-) \\
\Rightarrow (X+Y)^+ + (X^- + Y^-) &= (X+Y)^- + (X^+ + Y^+) \\
\Rightarrow \int_\Omega (X+Y)^+ \, d\mu + \int_\Omega (X^- + Y^-)\, d\mu &= \int_\Omega (X+Y)^- \, d\mu + \int_\Omega (X^+ + Y^+)\, d\mu \\
\Rightarrow \int_\Omega (X+Y)\, d\mu &= \int_\Omega (X^+ + Y^+)\, d\mu - \int_\Omega (X^- + Y^-)\, d\mu \\
&= \int_\Omega X^+ \, d\mu - \int_\Omega X^- \, d\mu + \int_\Omega Y^+ \, d\mu - \int_\Omega Y^- \, d\mu \\
&= \int_\Omega X \, d\mu + \int_\Omega Y \, d\mu \ .
\end{aligned}
$$

3)

$$
X \leqslant Y \text{ q.p.t. } \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X^+ \leqslant Y^+ \text{ q.p.t.} \\ X^- \geqslant Y^- \text{ q.p.t.} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega X^+ \, d\mu \overset{(1)}{\leqslant} \int_\Omega Y^+ \, d\mu \\ \displaystyle\int_\Omega X^- \, d\mu \overset{(1)}{\geqslant} \int_\Omega Y^- \, d\mu \end{array} \right\} \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow \int_\Omega X^+ \, d\mu - \int_\Omega X^- \, d\mu \leqslant \int_\Omega Y^+ \, d\mu - \int_\Omega Y^- \, d\mu \ .
$$

(1) El q.p.t. no importa. Fet rigorosament:

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega X^+ \, d\mu &= \int_\Omega X^+ \cdot \mathbf{1}_{\{X^+ \leqslant Y^+\}} \, d\mu + \int_\Omega X^+ \cdot \mathbf{1}_{\{X^+ > Y^+\}} \, d\mu \\
&\leqslant \int_\Omega Y^+ \cdot \mathbf{1}_{\{X^+ \leqslant Y^+\}} \, d\mu + 0 = \int_\Omega Y^+ \, d\mu \ .
\end{aligned}
$$

Hem usat la propietat anàloga per a funcions positives (Proposició 2.2.11).

4)

$$
\begin{aligned}
-|X| \leqslant X \leqslant |X|, \ &\overset{(1)}{\Rightarrow} \int_\Omega -|X| \, d\mu \leqslant \int_\Omega X \, d\mu \leqslant \int_\Omega |X| \, d\mu \\
&\Rightarrow \Big| \int_\Omega X \, d\mu \Big| \leqslant \int_\Omega |X| \, d\mu \ .
\end{aligned}
$$

(1) Apliquem la propietat *3)* anterior.

5)

$$
\int_\Omega X \, d\mu < +\infty \Leftrightarrow \int_\Omega X^+ \, d\mu < +\infty \overset{(1)}{\Rightarrow} \mu(\{X^+ = +\infty\}) = 0 \Rightarrow \mu(\{X = +\infty\}) = 0 \ .
$$

$$
\int_\Omega X \, d\mu > -\infty \Leftrightarrow \int_\Omega X^- \, d\mu < +\infty \overset{(1)}{\Rightarrow} \mu(\{X^- = +\infty\}) = 0 \Rightarrow \mu(\{X = -\infty\}) = 0 \ .
$$

(1) Per la propietat *6)* de la Proposició 2.2.11. □

A l'Apartat 2.3 veurem per a funcions mesurables arbitràries les propietats anàlogues a les *4)* i *5)* de la Proposició 2.2.11. La propietat *7)* és falsa.

Quant a les funcions $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, definim la seva integral mitjançant les integrals de la part real i la part imaginària. Recordem que amb la notació binomial $a+ib$, on $a, b \in \mathbb{R}$ i i representa la unitat imaginària, totes les operacions lineals sobre $\mathbb{R}$, o sobre funcions valuades en $\mathbb{R}$, s'estenen de manera natural al cas complex fent-les actuar formalment sobre l'expressió $a + ib$.

La integral de funcions integrables és una operació lineal (propietats *1)* i *2)* anteriors). Per tant la definició natural d'integral per a funcions complexes és la següent.

2.2.19 Definició

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ un espai de mesura.
Sigui $X \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una funció mesurable.
Definim la *integral de X respecte μ* com

$$\int_\Omega X \, d\mu := \int_\Omega \mathrm{Re}\, X \, d\mu + i \int_\Omega \mathrm{Im}\, X \, d\mu \ , \tag{2.2.7}$$

sempre que $\mathrm{Re}\, X$ i $\mathrm{Im}\, X$ siguin funcions reals integrables. Diem aleshores que *X és integrable*. En cas contrari, diem que la integral de X *no existeix* o que *X no és integrable*. (Compareu la terminologia amb la del cas real. Aquí integrabilitat i existència de la integral són equivalents, perquè volem que el resultat sigui un nombre complex. No permetem infinits.)

2.2.20 Observació

(Recordem que l'ús de la mateixa notació $|\cdot|$ per al valor absolut d'un nombre real i el mòdul d'un nombre complex és consistent en el sentit que si $a \in \mathbb{R}$, el mòdul de a com a nombre complex és el valor absolut de a com a nombre real.)
A la vista de les desigualtats

$$\left.\begin{array}{r} |\mathrm{Re}\, X| \\ |\mathrm{Im}\, X| \end{array}\right\} \leqslant \max\{|\mathrm{Re}\, X|, |\mathrm{Im}\, X|\} \leqslant |X| \leqslant |\mathrm{Re}\, X| + |\mathrm{Im}\, X| \ ,$$

es dedueix fàcilment que $X \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ és integrable sii $|X| \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ és integrable. □

Les propietats enunciades a la Proposició 2.2.18 són automàticament propietats de les parts real i imaginària de la integral de funcions complexes. A més, la propietat *4)* també és vàlida interpretant els valors absoluts com a mòdul. No hi ha, però, una demostració tan simple com en el cas real.

2.2.21 Proposició

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ un espai de mesura.
Sigui $X \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una funció integrable.
Aleshores

$$\left| \int_\Omega X \, d\mu \right| \leqslant \int_\Omega |X| \, d\mu \ .$$

Demostració: Comencem demostrant un lema que té interès en si mateix.

Lema 1. (Desigualtat de Schwarz.) Si $X, Y \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ són funcions mesurables tals que X^2 i Y^2 són integrables, aleshores XY és integrable i

$$\Big(\int_\Omega XY \, d\mu \Big)^2 \leqslant \Big(\int_\Omega X^2 \, d\mu \Big) \cdot \Big(\int_\Omega Y^2 \, d\mu \Big) \ . \tag{2.2.8}$$

Demostració:

$$\left.\begin{array}{r} 0 \leqslant (X-Y)^2 \Rightarrow XY \leqslant \frac{1}{2}(X^2+Y^2) \\ 0 \leqslant (X+Y)^2 \Rightarrow XY \geqslant -\frac{1}{2}(X^2+Y^2) \end{array}\right\} \Rightarrow |XY| \leqslant \frac{1}{2}(X^2+Y^2)$$

i per tant, pel fet de ser X^2 i Y^2 integrables, XY també ho és.

Per veure la desigualtat, descartem primer un cas trivial: Si $\int_\Omega Y^2\, d\mu = 0$, aleshores $Y = 0$ q.p.t., i les dues bandes de (2.2.8) són zero.
Suposem doncs que $\int_\Omega Y^2\, d\mu \neq 0$. Per qualsevol nombre real γ,

$$
\begin{aligned}
(X+\gamma Y)^2 \geqslant 0 &\Rightarrow \int_\Omega (X+\gamma Y)^2\, d\mu \geqslant 0 \\
&\Rightarrow \int_\Omega X^2\, d\mu + 2\gamma \int_\Omega XY\, d\mu + \gamma^2 \int_\Omega Y^2\, d\mu \geqslant 0\ . \qquad (2.2.9)
\end{aligned}
$$

Prenent

$$
\gamma = \frac{-\int_\Omega XY\, d\mu}{\int_\Omega Y^2\, d\mu}
$$

i multiplicant (2.2.9) per $\int_\Omega Y^2\, d\mu$, s'obté la desigualtat (2.2.8).

Lema 2. Si $X, Y\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ són funcions integrables, aleshores

$$
\Big(\int_\Omega X\, d\mu\Big)^2 + \Big(\int_\Omega Y\, d\mu\Big)^2 \leqslant \Big(\int_\Omega (X^2+Y^2)^{1/2}\, d\mu\Big)^2\ .
$$

Demostració: Siguin

$$
f := (X^2+Y^2)^{1/4}\ , \quad g := X\cdot (X^2+Y^2)^{-1/4}\ , \quad h := Y\cdot (X^2+Y^2)^{-1/4}\ .
$$

Llavors,

$$
\left.
\begin{aligned}
\Big(\int_\Omega X\, d\mu\Big)^2 &= \Big(\int_\Omega fg\, d\mu\Big)^2 \overset{(1)}{\leqslant} \Big(\int_\Omega f^2\, d\mu\Big)\cdot\Big(\int_\Omega g^2\, d\mu\Big) \\
\Big(\int_\Omega Y\, d\mu\Big)^2 &= \Big(\int_\Omega fh\, d\mu\Big)^2 \overset{(1)}{\leqslant} \Big(\int_\Omega f^2\, d\mu\Big)\cdot\Big(\int_\Omega h^2\, d\mu\Big)
\end{aligned}
\right\} \Rightarrow
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow &\Big(\int_\Omega X\, d\mu\Big)^2 + \Big(\int_\Omega Y\, d\mu\Big)^2 \leqslant \Big(\int_\Omega f^2\, d\mu\Big)\cdot\Big(\int_\Omega g^2\, d\mu + \int_\Omega h^2\, d\mu\Big) \\
&= \Big(\int_\Omega (X^2+Y^2)^{1/2}\, d\mu\Big)\cdot\Big(\int_\Omega \big(X^2(X^2+Y^2)^{-1/2} + Y^2(X^2+Y^2)^{-1/2}\big)\, d\mu\Big) \\
&= \Big(\int_\Omega (X^2+Y^2)^{1/2}\, d\mu\Big)^2\ .
\end{aligned}
$$

(1) Apliquem el lema anterior. □

Utilitzant el Lema 2, arribem a l'enunciat de la proposició:

$$
\begin{aligned}
\Big|\int_\Omega X\, d\mu\Big| &= \Big(\Big(\int_\Omega \operatorname{Re} X\, d\mu\Big)^2 + \Big(\int_\Omega \operatorname{Im} X\, d\mu\Big)^2\Big)^{1/2} \\
&\leqslant \int_\Omega \big((\operatorname{Re} X)^2 + (\operatorname{Im} X)^2\big)^{1/2}\, d\mu = \int_\Omega |X|\, d\mu\ .
\end{aligned}
$$

2.3 Teoremes de Convergència

Agrupem en aquest apartat tres propietats més de les integrals de funcions mesurables arbitràries. Són conegudes com a *Teoremes de Convergència (de Lebesgue).*

En el primer teorema parlem de « successió $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ creixent q.p.t. ». Això vol dir:

$$\exists Z \in \mathfrak{F} : \; [\mu(Z) = 0] \;\text{ i }\; [\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \omega \notin Z,\ X_n(\omega) \leqslant X_{n+1}(\omega)] \ .$$

2.3.1 Teorema de la Convergència Monòtona

Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió creixent q.p.t. de funcions mesurables $X_n\colon \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ tal que

$$\int_\Omega X_1 \, d\mu \quad \textit{existeix i és} \neq -\infty \ . \tag{2.3.1}$$

Sigui $X = \lim_{n\to\infty} X_n$ q.p.t.
Aleshores, les integrals de X_n, $\forall n$, i de X existeixen i

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n \, d\mu = \int_\Omega X \, d\mu \ . \tag{2.3.2}$$

En particular, si el límit de (2.3.2) *és $< +\infty$, aleshores les funcions X_n, $\forall n$, i X són integrables.*

Demostració:
1) Observem primer que la condició (2.3.1) i la monotonia de la successió impliquen que

$$\int_\Omega X_n \, d\mu \quad \text{i} \quad \int_\Omega X \, d\mu \quad \text{existeixen i són} \neq -\infty \ . \tag{2.3.3}$$

2) Suposem que $\exists n_0 : \int_\Omega X_{n_0} \, d\mu = +\infty$. (Cas trivial.)
Aleshores, per la Proposició 2.2.18, *3)*,

$$\int_\Omega X_n \, d\mu = +\infty,\ \forall n \geqslant n_0, \quad \text{i} \quad \int_\Omega X \, d\mu = +\infty \ ,$$

i per tant el teorema és cert.
3) Suposem que $\forall n$, $\int_\Omega X_n \, d\mu \neq +\infty$.
Sota aquesta condició, es té $\mu(\{X_n = +\infty\}) = 0$, $\forall n$ (Proposició 2.2.18, *5)*.)
Sabem també que $\mu(\{X_n = -\infty\}) = 0$, $\forall n$, per (2.3.3).
Per tant, les funcions $X_n - X_1$ estan ben definides q.p.t. La família $\{X_n - X_1\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió creixent q.p.t. de funcions positives q.p.t. tal que

$$\lim_{n\to\infty} (X_n - X_1) = X - X_1 \quad \text{q.p.t.}$$

Per la propietat *4)* de la Proposició 2.2.11 (exercici: treure tots els conjunts de mesura zero que calgui per aplicar-la)

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (X_n - X_1) \, d\mu = \int_\Omega (X - X_1) \, d\mu \ . \tag{2.3.4}$$

Per (2.3.3) i el fet que, en el cas que estem tractant,

$$-\infty < \int_\Omega X_1 \, d\mu < +\infty \ , \tag{2.3.5}$$

podem aplicar la propietat *2)* de 2.2.18 i obtenim de (2.3.4)

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega X_n\,d\mu - \int_\Omega X_1\,d\mu = \int_\Omega X\,d\mu - \int_\Omega X_1\,d\mu\ ,$$

i, gràcies a (2.3.5) altre cop, podem simplificar:

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega X_n\,d\mu = \int_\Omega X\,d\mu\ .$$

2.3.2 Observacions

1) Observeu que el Teorema de la Convergència Monòtona s'assembla molt a l'enunciat de la Proposició 2.2.11, *4)* (propietat anàloga per a funcions positives), que ara queda com un cas particular. De fet, és aquella propietat la que s'enuncia de vegades sota el títol de Teorema de la Convergència Monòtona.
2) Noteu el paper de la hipòtesi (2.3.1), que és essencial per poder separar en resta d'integrals l'expressió (2.3.4) i fer la simplificació posterior. El teorema no és cert sense aquesta condició. Naturalment, seria suficient que es complís per una funció qualsevol X_{n_0} de la successió, puix que el comportament en el límit no depèn dels primers termes.
3) Pot passar perfectament que totes les funcions X_n siguin integrables i en canvi X no ser-ho. Això succeeix si $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega X_n\,d\mu = +\infty$.
4) És vàlid també el "teorema dual":
   « Si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió decreixent q.p.t. amb $\int_\Omega X_1\,d\mu \neq +\infty$, i $X = \lim_{n\to\infty} X_n$ q.p.t., aleshores
   $$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega X_n\,d\mu = \int_\Omega X\,d\mu\ .\text{»}$$

2.3.3 Teorema (Lema de Fatou)

Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de funcions mesurables $X_n\colon\Omega\longrightarrow\bar{\mathbb{R}}$ tals que

$$\int_\Omega \inf_{n\in\mathbb{N}} X_n\,d\mu \quad \textit{existeix i és} \neq -\infty\ . \tag{2.3.6}$$

Aleshores, les integrals de X_n, $\forall n$, i de $\varliminf_{n\to\infty} X_n$ existeixen i

$$\int_\Omega \varliminf_{n\to\infty} X_n\,d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_\Omega X_n\,d\mu\ . \tag{2.3.7}$$

En particular, si el límit de la dreta de (2.3.7) *és $< +\infty$, aleshores la funció $\varliminf_{n\to\infty} X_n$ és integrable.*

Demostració: Notem $Y := \inf_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

1) Observem primer que:

i) La condició (2.3.6) junt amb $Y \leqslant X_n$, $\forall n$, implica que

$$\int_\Omega X_n\,d\mu \quad \text{existeix i és} \neq -\infty,\ \forall n.$$

ii) La condició (2.3.6) junt amb

$$\varliminf_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty}\inf_{m\geqslant n} X_m \geqslant \inf_{m\in\mathbb{N}} X_m = Y\ ,$$

implica que

$$\int_\Omega \varliminf_{n\to\infty} X_n\,d\mu \quad \text{existeix i és} \neq -\infty.$$

2) Suposem que $\int_\Omega Y\,d\mu = +\infty$. (Cas trivial.)

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty}\int_\Omega X_n\,d\mu &= \lim_{n\to\infty}\inf_{m\geqslant n}\int_\Omega X_m\,d\mu \geqslant \inf_{m\in\mathbb{N}}\int_\Omega X_m\,d\mu\\ &\geqslant \inf_{m\in\mathbb{N}}\int_\Omega Y\,d\mu = \int_\Omega Y\,d\mu = +\infty\ ,\end{aligned}$$

i (2.3.7) es compleix segur.

3) Suposem que $\int_\Omega Y\,d\mu \neq +\infty$.
En aquest cas tenim, de fet,

$$-\infty < \int_\Omega Y\,d\mu < +\infty,\ \Rightarrow \mu(\{Y=-\infty\}) = \mu(\{Y=+\infty\}) = 0\ .$$

Per tant, les funcions $X_n - Y$ estan ben definides q.p.t. La família $\{X_n - Y\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió de funcions positives q.p.t. Per la propietat *5)* de la Proposició 2.2.11 (exercici: treure tots els conjunts de mesura zero que calgui per aplicar-la),

$$\int_\Omega \varliminf_{n\to\infty}(X_n - Y)\,d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_\Omega (X_n - Y)\,d\mu\ .$$

Estem en condicions d'aplicar la propietat *2)* de la Proposició 2.2.18, i obtenim

$$\int_\Omega \varliminf_{n\to\infty} X_n\,d\mu - \int_\Omega Y\,d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_\Omega X_n\,d\mu - \int_\Omega Y\,d\mu\ .$$

Finalment, el fet que la integral de Y sigui finita ens permet simplificar i arribar a (2.3.7).

2.3.4 Observacions

1) Com en el cas del Teorema de la Convegència Monòtona, el Lema de Fatou s'enuncia sovint només per a successions de funcions positives; es redueix llavors a la propietat *5)* de la Proposició 2.2.11.
2) El Teorema no és cert sense la hipòtesi (2.3.6), que és la que ens permet, en essència, reduir-nos al cas de funcions positives.
3) És vàlid també el següent "Lema de Fatou invertit" (vegeu el Problema **2.4**):
   « Si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió de funcions mesurables i

   $$\int_\Omega \sup_{n\in\mathbb{N}} X_n\,d\mu \neq +\infty\ ,$$

   aleshores

   $$\int_\Omega \varlimsup_{n\to\infty} X_n\,d\mu \geqslant \varlimsup_{n\to\infty}\int_\Omega X_n\,d\mu\ .\ »$$

2.3.5 Teorema de la Convergència Dominada

Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de funcions mesurables $X_n\colon\Omega\longrightarrow\bar{\mathbb{R}}$ tal que:

a) Existeix $X(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$, q.p.t.

b) Existeix una funció $Y\colon\Omega\longrightarrow\bar{\mathbb{R}}$ integrable tal que $|X_n|\leqslant Y$ q.p.t., $\forall n$.

Aleshores X és integrable i

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega X_n\,d\mu=\int_\Omega X\,d\mu\ . \tag{2.3.8}$$

Demostració:
1) Integrabilitat de X:

$$\left.\begin{array}{r}|X_n|\leqslant Y \text{ q.p.t.}, \forall n, \Rightarrow |X|\leqslant Y \text{ q.p.t.}\\ \displaystyle\int_\Omega Y\,d\mu<+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \int_\Omega |X|\,d\mu<+\infty\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X \text{ és integrable.}$$

2) Fórmula (2.3.8):

$$\begin{aligned}\int_\Omega X\,d\mu &\overset{(1)}{=}\int_\Omega \varliminf_{n\to\infty} X_n\,d\mu \overset{(2)}{\leqslant} \varliminf_{n\to\infty}\int_\Omega X_n\,d\mu\\ &\leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\int_\Omega X_n\,d\mu \overset{(3)}{\leqslant}\int_\Omega \varlimsup_{n\to\infty} X_n\,d\mu \overset{(1)}{=}\int_\Omega X\,d\mu\ .\end{aligned}$$

Per tant, existeix $\lim\limits_{n\to\infty}\int_\Omega X_n\,d\mu$ (atès que els límits inferior i superior són iguals) i coincideix amb $\int_\Omega X\,d\mu$.

(1) El límit existeix. No fa cap mal posar límit inferior o límit superior en el seu lloc.
(2) Apliquem el Lema de Fatou.
(3) Apliquem el "Lema de Fatou invertit" (vegeu l'Observació 2.3.4, 3), i el Problema **2.4**.)

2.3.6 Observació

El Teorema de la Convergència Dominada és una altra propietat que es pot enunciar directament per a funcions complexes, només interpretant el valor absolut com a mòdul. Si una funció Y domina el mòdul de X, també domina les seves parts real i imaginària ($\max\{|\operatorname{Re} X|, |\operatorname{Im} X|\}\leqslant |X|$), i per tant el Teorema 2.3.5 s'aplica a cadascuna d'elles. Finalment, la fórmula sobre el límit s'obté sumant parts reals i parts imaginàries. □

Acabem aquest apartat amb dues aplicacions fàcils del Teorema de la Convergència Dominada. Hom considera integrals que depenen d'un paràmetre i es pregunta si, com a funció del paràmetre, la integral és contínua, si és derivable, i en aquest últim cas, si les operacions de derivació i integració es poden commutar.

2.3.7 Teorema

Sigui $(\Omega,\mathfrak{F},\mu)$ un espai de mesura.
Siguin (T,d) un espai mètric, i $t_0\in T$.
Sigui $X\colon\Omega\times T\longrightarrow\bar{\mathbb{R}}$ una funció complint:

a) $X(\omega,\cdot)\colon T\longrightarrow\bar{\mathbb{R}}$ *és contínua en t_0, μ-q.p.t. $\omega\in\Omega$.*

b) $X(\cdot,t)\colon\Omega\longrightarrow\bar{\mathbb{R}}$ *és mesurable, $\forall t\in T$.*

c) $\exists Y\colon\Omega\longrightarrow\bar{\mathbb{R}}$ *integrable tal que $|X(\omega,t)|\leqslant Y(\omega)$, μ-q.p.t. $\omega\in\Omega$, $\forall t\in T$.*

Aleshores, la funció

$$\begin{aligned} F\colon T &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \int_\Omega X(\omega,t)\,\mu(d\omega) \end{aligned}$$

està ben definida i és contínua en t_0.

Demostració:
1) F està ben definida:
Gràcies a la condició *c)* la integral existeix i és finita, per a cada $t \in T$.
2) F és contínua en t_0:
És conegut que una funció F entre espais mètrics és contínua en un punt t_0 sii per a tota successió $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'elements del primer espai tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$, es té $\lim_{n\to\infty} F(t_n) = F(t_0)$ en el segon espai.
Sigui $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ una tal successió.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} F(t_n) &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega X(\omega,t_n)\,\mu(d\omega) \overset{(1)}{=} \int_\Omega \lim_{n\to\infty} X(\omega,t_n)\,\mu(d\omega) \\ &= \int_\Omega X(\omega,t_0)\,\mu(d\omega) = F(t_0)\ . \end{aligned}$$

(1) Apliquem el Teorema de la Convergència Dominada.

2.3.8 Teorema

Sigui $(\Omega,\mathfrak{F},\mu)$ *un espai de mesura.*
Siguin $I \subset \mathbb{R}$ *un interval obert, i* $t_0 \in I$.
Sigui $X\colon \Omega\times I \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ *una funció complint:*

a) $X(\omega,\cdot)\colon I \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ *és derivable en* I, μ*-q.p.t.* $\omega\in\Omega$.

b) $X(\cdot,t)\colon \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ *és mesurable,* $\forall t \in I$.

c) $\exists Y\colon \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ *integrable tal que* $|X(\omega,t)| + \left|\frac{dX}{dt}(\omega,t)\right| \leqslant Y(\omega)$, μ*-q.p.t.* $\omega\in\Omega$, $\forall t\in I$.

Aleshores, la funció

$$\begin{aligned} F\colon I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \int_\Omega X(\omega,t)\,\mu(d\omega) \end{aligned}$$

està ben definida, és derivable en t_0, *i*

$$F'(t_0) = \int_\Omega \frac{dX}{dt}(\omega,t_0)\,\mu(d\omega)\ . \tag{2.3.9}$$

Demostració:
1) F està ben definida:
Gràcies a la majoració $|X(\omega,t)| \leqslant Y(\omega)$, la integral que defineix F existeix i és finita, per a cada $t \in T$.
2) F és derivable en t_0 i la seva derivada ve donada per (2.3.9):
Aplicant el Teorema del Valor Mitjà, per cada $t \in I - \{t_0\}$ es té

$$\left|\frac{X(\omega,t) - X(\omega,t_0)}{t-t_0}\right| \leqslant \sup_{t\in I}\left|\frac{dX}{dt}(\omega,t)\right| \leqslant Y(\omega)$$

Considerem una successió $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n)-F(t_0)}{t_n-t_0} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{X(\omega,t_n)-X(\omega,t_0)}{t_n-t_0}\,\mu(d\omega)$$
$$\overset{(1)}{=} \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \frac{X(\omega,t_n)-X(\omega,t_0)}{t_n-t_0}\,\mu(d\omega) = \int_\Omega \frac{dX}{dt}(\omega,t_0)\,\mu(d\omega)\ .$$

(1) Apliquem el Teorema de la Convergència Dominada. □

2.3.9 Observacions

1) La continuïtat i la derivabilitat en un punt són propietats locals de les funcions. Si la condició *c)* del Teorema 2.3.7 o el Teorema 2.3.8 es compleix només en un entorn U del punt t_0, s'obté la continuïtat o derivabilitat, segons el cas, de $F\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$. Si per a cada punt existeix un tal entorn, es conclou la continuïtat o derivabilitat de F sobre tot el seu domini de definició.
La moral és, doncs, que per obtenir la propietat global només cal que per a cada punt t_0 existeixi un entorn U_{t_0} i una funció $Y_{U_{t_0}}$ integrable tal que $|X(\omega,t)| \leqslant Y_{U_{t_0}}(\omega)$, μ-q.p.t. $\omega\in\Omega$, $\forall t\in U_{t_0}$ (per la continuïtat) o $|X(\omega,t)| + \left|\frac{dX}{dt}(\omega,t)\right| \leqslant Y_{U_{t_0}}(\omega)$, μ-q.p.t. $\omega\in\Omega$, $\forall t\in U_{t_0}$ (per la derivabilitat.)
2) Els Teoremes 2.3.7 i 2.3.8 valen exactament igual per a funcions X a valors en $\mathbb{C}$, interpretant els valors absoluts $|\cdot|$ com a mòduls. Es dedueix del fet que si Y domina el mòdul d'una funció, també domina els valors absoluts de les seves parts real i imaginària, com ja hem observat abans. I, per definició, si F és una funció complexa (de variable real), $F' = (\mathrm{Re}\,F)' + i(\mathrm{Im}\,F)'$.

2.4 Teoremes de la Mesura Imatge i de Radon–Nikodým

En aquest apartat veurem dos importants teoremes encaminats a facilitar el càlcul efectiu de les integrals.

2.4.1 Definició

Sigui $(\Omega,\mathfrak{F},\mu)$ un espai de mesura.
Sigui $(E,\mathfrak{E})$ un espai mesurable.
Sigui $X\colon\Omega\longrightarrow E$ una funció mesurable.
La funció de conjunt μ_X sobre $\mathfrak{E}$ definida com

$$\mu_X(B) := \mu(X^{-1}(B))\ ,\quad \forall B\in\mathfrak{E}\ ,$$

és una mesura en $(E,\mathfrak{E})$ (es comprova fàcilment) que s'anomena *mesura imatge de μ per X*.
De vegades s'escriu també com $\mu\circ X^{-1}$.

2.4.2 Teorema de la Mesura Imatge

En la situació de la definició anterior:
Sigui $g\colon E\longrightarrow\bar{\mathbb{R}}$ mesurable.
Aleshores, la integral de g en $(E,\mathfrak{E},\mu_X)$ existeix sii la integral de $g\circ X$ en $(\Omega,\mathfrak{F},\mu)$ existeix, i, en cas afirmatiu,

$$\int_\Omega g\circ X\,d\mu = \int_E g\,d\mu_X\ .$$

En particular, g és integrable sii $g\circ X$ és integrable, en els respectius espais.

Demostració: Demostrarem la igualtat suposant successivament que g és un indicador, una funció elemental positiva, una funció mesurable positiva i una funció mesurable arbitrària. Aquest és un procediment habitual per provar enunciats que involucren integrals.

1) Indicadors: $g = \mathbf{1}_B$, $B \in \mathfrak{E}$.

$$\int_\Omega \mathbf{1}_B \circ X \, d\mu = \int_\Omega \mathbf{1}_{X^{-1}(B)} \, d\mu = \mu(X^{-1}(B)) = \mu_X(B) = \int_E \mathbf{1}_B \, d\mu_X \ .$$

2) Elementals positives: $g = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathbf{1}_{B_i}$, $B_i \in \mathfrak{E}$.

$$\int_\Omega g \circ X \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \int_\Omega \mathbf{1}_{B_i} \circ X \, d\mu \stackrel{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i \int_E \mathbf{1}_{B_i} \, d\mu_X = \int_E g \, d\mu_X \ .$$

(1) Usem el cas *1)*.

3) Mesurables positives: Sigui $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió creixent de funcions elementals positives amb $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$.
Observem que $\{g_n \circ X\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió creixent de funcions elementals positives sobre $(\Omega, \mathfrak{F})$ que convergeixen a $g \circ X$. Per tant,

$$\int_\Omega g \circ X \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n \circ X \, d\mu \stackrel{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_E g_n \, d\mu_X = \int_E g \, d\mu_X \ .$$

(1) Usem el cas *2)*.

4) Mesurables arbitràries:
Pel cas anterior,

$$\int_\Omega (g \circ X)^+ \, d\mu = \int_\Omega g^+ \circ X \, d\mu = \int_E g^+ \, d\mu_X$$
$$\int_\Omega (g \circ X)^- \, d\mu = \int_\Omega g^- \circ X \, d\mu = \int_E g^- \, d\mu_X \ .$$

Per tant, la integral de g respecte μ_X existeix sii la integral de $g \circ X$ respecte μ existeix. En cas afirmatiu,

$$\int_\Omega g \circ X \, d\mu = \int_\Omega (g \circ X)^+ \, d\mu - \int_\Omega (g \circ X)^- \, d\mu = \int_E g^+ \, d\mu_X - \int_E g^- \, d\mu_X = \int_E g \, d\mu_X \qquad \square$$

2.4.3 Observació

El Teorema de la Mesura Imatge és de fet un teorema de canvi de variable, molt general. El clàssic teorema de canvi de variable per integrals sobre $\mathbb{R}$ n'és un cas particular. Vegeu el Problema **2.8**.

2.4.4 Notació

Si $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ és un espai de mesura, $X\colon \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ és una funció mesurable, $A \in \mathfrak{F}$, i la integral de $X \cdot \mathbf{1}_A$ existeix, introduïm el símbol

$$\int_A X \, d\mu := \int_\Omega X \cdot \mathbf{1}_A \, d\mu$$

(purament per comoditat de notació.)

Observeu que si la integral de X existeix, aleshores la integral de $X\cdot\mathbf{1}_A$ existeix (atès que $(X\cdot\mathbf{1}_A)^+\leqslant X^+$ i $(X\cdot\mathbf{1}_A)^-\leqslant X^-$), i el símbol $\int_A X\,d\mu$ està ben definit; en particular, si X és integrable, $X\cdot\mathbf{1}_A$ també ho és.
Observem també que, si $A,B\in\mathfrak{F}$ i $A\cap B=\emptyset$, llavors

$$\int_{A\cup B} X\,d\mu=\int_A X\,d\mu+\int_B X\,d\mu \qquad \square \tag{2.4.1}$$

La propietat (2.4.1) es referencia a cops com "propietat d'additivitat de la integral respecte el conjunt d'integració". Es deixa com a exercici per al lector comprovar que, de fet, i amb la sola hipòtesi addicional de la positivitat de X, la funció de conjunt $\int_A X\,d\mu$, definida per a tot $A\in\mathfrak{F}$, és una mesura sobre $\mathfrak{F}$. Això justifica la definició següent.

2.4.5 Definició

Sigui $(\Omega,\mathfrak{F},\mu)$ un espai de mesura.
Sigui $f\colon\Omega\longrightarrow[0,+\infty]$ una funció mesurable.
Definim sobre $\mathfrak{F}$ la mesura

$$\nu(A):=\int_A f\,d\mu\ ,\quad A\in\mathfrak{F}\ .$$

En aquesta situació, diem que f és la *densitat de ν respecte μ* i s'escriu $f=\dfrac{d\nu}{d\mu}$. També es diu que f és la *derivada de Radon–Nikodým de ν respecte μ*.

2.4.6 Observacions

1) És immediat que:
   a) Si μ és σ-finita i $f<+\infty$ μ-q.p.t., llavors ν és σ-finita.
   (Si $\Omega=\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n$ amb $\mu(A_n)<+\infty$, $B_m=\{m-1\leqslant f<m\}$ $(m\geqslant 1)$, i $B_0=\{f=+\infty\}$, només cal considerar la família $\{A_n\cap B_m\}_{n,m=0}^{\infty}$.)
   b) Si f és integrable, llavors ν és finita.
   c) Si $\int_\Omega f\,d\mu=1$, llavors ν és una probabilitat.
2) Gràcies a la Proposició 2.2.16, si $g\colon\Omega\longrightarrow\bar{\mathbb{R}}$ és una altra funció mesurable tal que $g=f$ μ-q.p.t., aleshores també es té $\nu(A)=\int_A g\,d\mu$, $\forall A\in\mathfrak{F}$. Per tant, estrictament parlant, "la densitat" és de fet "una densitat". Però es pot veure que és "única μ-q.p.t.", és a dir, que dues densitats difereixen en un conjunt de mesura μ zero, en les dues situacions següents:
   a) Si f és integrable.
   b) Si μ és σ-finita.
   En el primer cas és conseqüència del Problema **2.3**, *b)*, i en el segon del Problema **2.3**, *c)*.

2.4.7 Exemple

En $(\mathbb{R},\mathfrak{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, amb λ la mesura de Lebesgue, considerem la funció $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ i definim

$$\nu(A)=\int_A f(x)\,\lambda(dx)\ ,\quad A\in\mathfrak{B}(\mathbb{R})\ .$$

Aleshores ν és la llei $N(0,1)$ (vegeu els Exemples 1.3.9.) Si canviem f per una altra funció igual a f λ-q.p.t., continuem obtenint la mateixa probabilitat.

2.4.8 Definició

Siguin μ i ν dues mesures sobre un espai mesurable $(\Omega, \mathfrak{F})$.
ν és *absolutament contínua respecte* μ sii

$$\forall A \in \mathfrak{F}, \quad \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0 \ .$$

Ho escrivim $\nu \ll \mu$.

2.4.9 Teorema de Radon–Nikodým

Siguin μ i ν dues mesures sobre un espai mesurable $(\Omega, \mathfrak{F})$, amb μ σ-finita. Aleshores són equivalents:

i) $\nu \ll \mu$.

ii) Existeix $f\colon \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$ *tal que* $f = \dfrac{d\nu}{d\mu}$.

Demostració: Que *ii)⇒i)* és evident, i no cal la σ-finitud de μ:

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = \int_A f\, d\mu = \int_\Omega 0\, d\mu = 0 \ ,$$

perquè $f \cdot \mathbf{1}_A = 0$ μ-q.p.t.
La part interessant és *i)⇒ii)*. La demostració és llarga i no l'escriurem aquí.

2.4.10 Proposició

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ un espai de mesura.
Sigui ν una mesura absolutament contínua respecte μ amb densitat $f = \dfrac{d\nu}{d\mu}$.
Sigui $X\colon \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ una funció mesurable.
Aleshores, la integral de X respecte ν existeix sii la integral de $X \cdot f$ respecte μ existeix, i, en cas afirmatiu,

$$\int_\Omega X\, d\nu = \int_\Omega X \cdot f\, d\mu \ . \tag{2.4.2}$$

En particular, X és integrable respecte ν sii $X \cdot f$ és integrable respecte μ.

Demostració: Farem la demostració suposant successivament que X és un indicador, una funció elemental positiva, una funció mesurable positiva i una funció mesurable arbitrària.
1) Indicadors: $X = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathfrak{F}$.

$$\int_\Omega \mathbf{1}_A\, d\nu = \nu(A) = \int_A f\, d\mu = \int_\Omega \mathbf{1}_A \cdot f\, d\nu \ .$$

2) Elementals positives: $X = \sum\limits_{i=1}^n a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}$, $A_i \in \mathfrak{F}$.

$$\int_\Omega X\, d\nu = \sum_{i=1}^n a_i \int_\Omega \mathbf{1}_{A_i}\, d\nu = \sum_{i=1}^n a_i \int_\Omega \mathbf{1}_{A_i} \cdot f\, d\mu = \int_\Omega X \cdot f\, d\mu \ .$$

3) Mesurables positives: Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió creixent de funcions elementals positives amb $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$.
Observem que $\{X_n \cdot f\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió creixent de funcions positives convergent a $X \cdot f$.

$$\int_\Omega X\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n \cdot f\, d\mu \overset{(1)}{=} \int_\Omega X \cdot f\, d\mu \ .$$

(1) Utilitzem aquí el Teorema de la Convergència Monòtona, o, si es vol, com que les funcions són positives, la Proposició 2.2.11, propietat *4)*.

4) Mesurables arbitràries:
Gràcies al cas anterior,

$$\int_\Omega X^+ \, d\nu = \int_\Omega X^+ \cdot f \, d\mu = \int_\Omega (X \cdot f)^+ \, d\mu$$
$$\int_\Omega X^- \, d\nu = \int_\Omega X^- \cdot f \, d\mu = \int_\Omega (X \cdot f)^- \, d\mu \; .$$

Per tant, la integral de X respecte ν existeix sii la integral de $X \cdot f$ respecte μ existeix. En cas afirmatiu,

$$\int_\Omega X \, d\nu = \int_\Omega X^+ \, d\nu - \int_\Omega X^- \, d\nu = \int_\Omega (X \cdot f)^+ \, d\mu - \int_\Omega (X \cdot f)^- \, d\mu = \int_\Omega X \cdot f \, d\mu \qquad \square$$

La proposició anterior explica el perquè de la notació $\dfrac{d\nu}{d\mu}$ per representar la densitat f: la fórmula (2.4.2) s'obté fent la substitució formal $d\nu = f \, d\mu$.

2.4.11 Aplicacions

Veurem l'aplicació dels resultats d'aquest apartat al càlcul efectiu d'integrals.

1) Considerem l'espai de mesura $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \mu)$, amb $\mu \ll \lambda$ (essent λ, com sempre, la mesura de Lebesgue). Sigui $f = \dfrac{d\mu}{d\lambda}$.
Sigui $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ una funció mesurable. Volem calcular la seva integral respecte μ. Tindrem que
$$\int_\mathbb{R} g(x) \, \mu(dx) = \int_\mathbb{R} g(x) f(x) \, \lambda(dx) \; , \tag{2.4.3}$$
i aquesta última és la integral ordinària sobre $\mathbb{R}$ que habitualment notem
$$\int_\mathbb{R} g(x) f(x) \, dx \; .$$
Naturalment, el primer que ens interessa saber és si la integral de g respecte μ existeix o no. Però gràcies a la Proposició 2.4.10, això és equivalent a la mateixa qüestió formulada per a la integral de gf respecte λ.

2) Considerem l'espai de mesura $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), m)$, on $m(A) = \operatorname{card}(A \cap \mathbb{N})$, $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. La funció de conjunt m és una mesura que s'anomena *mesura comptadora de naturals*, per raons evidents.
Sigui $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ una funció mesurable. La integral de g respecte m és
$$\int_\mathbb{R} g(x) \, m(dx) = \sum_{n=1}^\infty g(n) \; . \tag{2.4.4}$$
Es deixa com a exercici comprovar (2.4.4) usant la via habitual indicadors $\to$ elementals $\to$ positives $\to$ arbitràries. La funció g és integrable respecte m sii la sèrie $\sum_{n \geqslant 1} g(n)$ és absolutament convergent. El cas de les sèries condicionalment convergents es correspon a les anomenades *integrals impròpies*, que no ens interessen per a res aquí. Deixant de banda aquestes sèries, en les quals el concepte de suma està lligat a un particular ordre de sumació, podem dir que la Teoria de Sèries és la Teoria de la Integració a l'espai de mesura $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), m)$.
Una mesura μ en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ és absolutament contínua respecte m sii es pot escriure com
$$\mu = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \delta_n \; ,$$

on $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \in \bar{\mathbb{R}}$ i δ_n és la delta de Dirac en el punt n. Una tal mesura no és absolutament contínua respecte la mesura de Lebesgue (a menys que sigui $\mu \equiv 0$) doncs aquesta dóna mesura zero als conjunts d'un sol element.
La densitat $f = \dfrac{d\mu}{dm}$ compleix $f(n) = \alpha_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (Fora dels naturals es pot definir de qualsevol manera, puix que $m(\mathbb{R} - \mathbb{N}) = 0$.) En efecte,

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta_n(A) = \sum_{n \in A} \alpha_n = \int_A f(x)\, m(dx) \ .$$

Si $X\colon \mathbb{R} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$,

$$\int_{\mathbb{R}} X\, d\mu = \int_{\mathbb{R}} Xf\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} X(n) f(n) \ .$$

Finalment, observem que tota funció $X\colon \mathbb{R} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ és igual m-q.p.t. a una funció definida només sobre els naturals (la restricció de X a $\mathbb{N}$.) Per tant, pel que fa a la integració, l'espai $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), m)$ és equivalent a $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$, que resulta de restringir m a la σ-àlgebra $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

3) En els casos 1) i 2) hem partit de probabilitats en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$. Farem jugar ara el Teorema de la Mesura Imatge, partint d'un espai de mesura qualsevol.
Siguin $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ un espai de mesura i $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció mesurable. Per calcular la integral $\int_\Omega X\, d\mu$, la idea és trobar una integral equivalent sobre $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$. Fem l'artifici següent:

$$\Omega \xrightarrow{\ X\ } \mathbb{R} \xrightarrow{\ I\ } \mathbb{R} \ ,$$

on I és l'aplicació identitat $x \mapsto x$. Apliquem el Teorema de la Mesura Imatge a aquesta situació:

$$\int_\Omega X\, d\mu = \int_\Omega I \circ X\, d\mu = \int_{\mathbb{R}} I\, d\mu_X = \int_{\mathbb{R}} x\, \mu_X(dx) \ ,$$

i ja estem en el cas real. Ara, per exemple, si $f = \dfrac{d\mu_X}{d\lambda}$, l'última integral és igual a

$$\int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx \ ,$$

i si $f = \dfrac{d\mu_X}{dm}$, no és més que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n f(n) \ .$$

Més en general, si volem calcular $\int_\Omega g \circ X\, d\mu$, on $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció mesurable, i coneixem la mesura imatge μ_X, llavors considerem

$$\Omega \xrightarrow{\ X\ } \mathbb{R} \xrightarrow{\ g\ } \mathbb{R} \ ,$$

i obtenim

$$\int_\Omega g \circ X\, d\mu = \int_{\mathbb{R}} g\, d\mu_X \ .$$

2.5 Variables aleatòries

2.5.1 Definició

Quan es considera una probabilitat P en un espai $(\Omega, \mathfrak{F})$, una funció mesurable $X\colon \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ (o $\mathbb{R}$) s'anomena també *variable aleatòria* (o *variable*, per abreujar).
En general, si $(E, \mathfrak{E})$ és un altre espai de mesura, una funció mesurable $X\colon \Omega \longrightarrow E$ s'anomena *variable aleatòria E-valuada*. En el cas $(E, \mathfrak{E}) = (\bar{\mathbb{R}}^n, \mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}}^n))$ o $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$, es diu també que és un *vector aleatori*. □

Un espai de probabilitat $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ és l'objecte matemàtic que s'utilitza per modelar un experiment aleatori. Cada element $\omega \in \Omega$ és un possible resultat de l'experiment i $P(A)$ és la probabilitat que el resultat pertanyi a l'esdeveniment A.

Una variable aleatòria representa el mecanisme mitjançant el qual s'observa l'experiment. Precisant una mica més, se suposa que no s'observa ω directament, sinó que per a tot $B \in \mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}})$, es pot decidir si $X(\omega) \in B$ o $X(\omega) \notin B$.

2.5.2 Definició

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espai de probabilitat.
Sigui $X\colon \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ una variable aleatòria.
La mesura imatge de P per X és una probabilitat P_X en $(\bar{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ (recordem: $P_X(B) := P(X^{-1}(B))$) que s'anomena *llei* de la variable X (o també, *distribució* de X).

2.5.3 Observació

És immediat veure que si una probabilitat P en $(\bar{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ és tal que $P(\{-\infty, +\infty\}) = 0$, aleshores restringida a $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ és també una probabilitat.
Recíprocament, tota probabilitat en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ s'estén de manera única a una probabilitat en $(\bar{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}}))$: la que compleix $P(B) = P(B \cap \mathbb{R})$, per a tot $B \in \mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}})$.
Per tant, si X és una variable aleatòria complint $P(\{X \in \{-\infty, +\infty\}\}) = 0$, es pot definir la seva llei com una probabilitat en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$, i així es considera sempre.

2.5.4 Exercici

Si dues variables aleatòries són iguals P-q.s., aleshores tenen la mateixa llei (vegeu el Problema **2.6**). En particular, si $X\colon \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ és una variable aleatòria tal que $P(\{X \in \{-\infty, +\infty\}\}) = 0$, aleshores té la mateixa llei que una certa variable $Y\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

2.5.5 Definició

Sigui $X\colon \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ una variable aleatòria tal que $P(\{X \in \{-\infty, +\infty\}\}) = 0$.
S'anomena *funció de distribució de* X la funció de distribució de la llei de X (considerada en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$, naturalment). Se sol escriure F_X.

$$F_X(x) := P_X(]-\infty, x]) = P(\{X \leqslant x\}) \ , \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

2.5.6 Definició

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espai de probabilitat.
Sigui $X\colon \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ una variable aleatòria tal que la seva integral respecte P existeix.
Aquesta integral s'anomena també *esperança* de X. S'escriu $\mathrm{E}[X]$.

$$\mathrm{E}[X] := \int_\Omega X \, dP \ .$$

2.5.7 Observació

Gràcies al Teorema de la Mesura Imatge, l'esperança de X es pot calcular (o determinar la seva existència) mitjançant una integral sobre $\bar{\mathbb{R}}$, si coneixem la seva llei:

$$\mathrm{E}[X] = \int_{\bar{\mathbb{R}}} x\, P_X(dx) \ .$$

Més en general, si $g\colon \bar{\mathbb{R}} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ és mesurable,

$$\mathrm{E}[g \circ X] = \int_{\bar{\mathbb{R}}} g(x)\, P_X(dx) \ . \tag{2.5.1}$$

En cas que $P(\{X \in \{-\infty, +\infty\}\}) = 0$, la integral (2.5.1) és sobre $\mathbb{R}$, per l'Observació 2.5.3. I llavors, si P_X resulta ser absolutament contínua respecte la mesura de Lebesgue o la mesura comptadora de naturals, el càlcul es redueix a una integral ordinària o a la suma d'una sèrie, respectivament.

2.5.8 Definició

Sigui $p \geqslant 1$.
$\mathrm{E}[X^p]$, si existeix, s'anomena *moment d'ordre p* de X.
S'anomena *variància* ($\mathrm{Var}[X]$) d'una variable aleatòria X el moment d'ordre 2 de $X - \mathrm{E}[X]$, si aquesta expressió té sentit. És a dir,

$$\mathrm{Var}[X] := \mathrm{E}\left[(X - E[X])^2\right] \ .$$

Observeu que la variància sempre és positiva. S'anomena *desviació tipus* de X ($\sigma[X]$) l'arrel quadrada positiva de la variància de X.

$$\sigma[X] := \sqrt{\mathrm{Var}[X]} \ .$$

Es també habitual escriure la variància com $\sigma^2[X]$.

2.5.9 Exercici

La variància és igual al moment d'ordre 2 menys el quadrat del moment d'ordre 1, sempre que aquest últim sigui finit.

2.5.10 Observació

Els conceptes d'esperança, variància i desviació típica, i en general el moment d'ordre p d'una variable i qualsevol quantitat que en sigui funció, *només depenen de la llei de la variable*, no de la variable en si, per la qual cosa es parla també d'esperança, variància, etc. d'una probabilitat en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$.
És molt important distingir entre variable aleatòria (funció) i llei de la variable aleatòria (probabilitat). Dues variables diferents, definides fins i tot sobre espais de probabilitat diferents, poden tenir la mateixa llei.

2.6 Espais L^p

En aquest apartat no farem cap detall. Es deixen com a exercici al lector emprenedor. Vegeu el Problema **2.10** (alguns apartats són difícils).

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espai de probabilitat.
Notem per $\mathcal{L}^0$ el conjunt de totes les variables aleatòries $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ (no permetem de moment valors infinits.) S'escriu $\mathcal{L}^0(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ si cal indicar a quin espai de probabilitat ens referim.
$\mathcal{L}^0$ és un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$, amb les operacions naturals de suma de funcions i producte per escalars.

Sigui $p \geqslant 1$.
Definim $\mathcal{L}^p := \{X \in \mathcal{L}^0 : \mathrm{E}[|X|^p] < +\infty\}$.
$\mathcal{L}^p$ és un subspai vectorial de $\mathcal{L}^0$.
Si $1 \leqslant p \leqslant q$, aleshores $\mathcal{L}^q \subset \mathcal{L}^p$. Es té:

$$\mathcal{L}^0 \supset \mathcal{L}^1 \supset \cdots \supset \mathcal{L}^p \supset \mathcal{L}^q \supset \cdots \tag{2.6.1}$$

En cada espai $\mathcal{L}^p$, definim la relació d'equivalència

$$X \sim Y \iff X = Y \text{ q.s.}$$

La relació $\sim$ és compatible amb l'estructura d'espai vectorial, és a dir,

$$\left.\begin{matrix} X_1 \sim Y_1 \\ X_2 \sim Y_2 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow X_1 + X_2 \sim Y_1 + Y_2$$
$$X \sim Y \Longrightarrow aX \sim aY \quad (a \in \mathbb{R}) \ .$$

Gràcies a aquesta compatibilitat es pot definir l'espai vectorial quocient $L^p := \mathcal{L}^p/\!\sim$.
Els elements de L^p són classes de variables aleatòries. Cada classe està formada per una variable aleatòria i totes les que són iguals a ella quasi segur. Això no obstant, quan es treballa a l'espai L^p, en lloc expressions com ara « $[X] = [Y]$ » per denotar la igualtat, se segueix escrivint « $X = Y$ q.s. » o bé « $X = Y$ en L^p », i en general es contínua pensant en termes de variables aleatòries, encara que conceptualment els elements de L^p no ho són. Per exemple, hom escriu: « Sigui $X\colon\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $X \in L^p$ ». I encara més: Com que una variable aleatòria a valors en $\bar{\mathbb{R}}$ és susceptible de coincidir quasi segur amb una variable a valors en $\mathbb{R}$ (això passa sii $P(\{X \in \{-\infty, +\infty\}\}) = 0$), té sentit escriure: « Sigui $X\colon\Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ tal que $X \in L^p$ ».

Per $p \geqslant 1$, definim en L^p una *norma:*

$$\|X\|_p := \Big(\int_\Omega |X|^p \, dP\Big)^{1/p} \ .$$

En efecte, $\|\cdot\|_p$ és una norma. O sigui,

1) $\|X\|_p = 0 \Leftrightarrow X = 0$ (en L^p !; i.e. $X = 0$ q.s.)
2) $\forall a \in \mathbb{R}$, $\|aX\|_p = |a| \cdot \|X\|_p$.
3) $\|X + Y\|_p \leqslant \|X\|_p + \|Y\|_p$.

(El pas al quocient s'ha fet exclusivament per tenir la implicació $\|X\|_p = 0 \Rightarrow X = 0$.)
Un espai vectorial amb una norma és un *espai normat:*

$$(L^p, \|\cdot\|_p) \quad \text{és un espai normat.}$$

Tot espai normat és un espai mètric, amb la distància

$$d(X, Y) = \|X - Y\| \ .$$

En el nostre cas, estem definint en L^p la distància

$$d_p(X, Y) = \|X - Y\|_p = \Big(\int_\Omega |X - Y|^p \, dP\Big)^{1/p} \ .$$

L'espai mètric (L^p, d_p) és complet, és a dir, tota successió de Cauchy és convergent.

No hi ha cap inconvenient a definir anàlogament els espais $L^p(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$, amb μ una mesura qualsevol, però la cadena d'inclusions (2.6.1) només es pot assegurar si μ és finita.

2.7 Problemes

2.1 Sigui $(\Omega, \mathfrak{F})$ un espai mesurable. Sabem que una funció $X\colon\Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ és mesurable sii $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant b\} \in \mathfrak{F}$, $\forall b \in \mathbb{R}$.
Demostreu que si en aquesta expressió substituïm $X(\omega) \leqslant b$ per $X(\omega) < b$, $X(\omega) \geqslant b$ o $X(\omega) > b$, s'obtenen condicions equivalents.

2.2 Sigui $(\Omega, \mathfrak{F})$ un espai mesurable, i siguin X, $Y\colon\Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ funcions mesurables.
Demostreu que els subconjunts de Ω següents són mesurables:

$$\{X < Y\}\ , \quad \{X \leqslant Y\}\ , \quad \{X = Y\} \quad \text{i} \quad \{X \neq Y\}\ .$$

Atenció: No val utilitzar que la suma de funcions mesurables és mesurable, perquè precisament la demostració que tenim d'això (Proposició 2.1.16) es basa en el que es vol demostrar aquí.
Idea: Demostreu que el primer conjunt és mesurable usant d'alguna manera que el conjunt dels nombres racionals és numerable i dens en $\mathbb{R}$. La mesurabilitat dels altres conjunts es dedueix fàcilment a partir de la del primer.

2.3 Sigui $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ un espai de mesura.
a) Sigui $X\colon\Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ mesurable tal que

$$\int_A X\, d\mu = 0\ , \quad \forall A \in \mathfrak{F}\ .$$

Demostreu que $X = 0$ μ-q.p.t.
b) Suposant que $X, Y\colon\Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ són integrables, demostreu utilitzant l'apartat *a)* que

$$\int_A X\, d\mu \leqslant \int_A Y\, d\mu\ , \quad \forall A \in \mathfrak{F} \quad \Longrightarrow \quad X \leqslant Y \ \mu\text{-q.p.t.}$$

c) Sota la hipòtesi addicional que μ sigui σ-finita, demostreu el mateix que a l'apartat *b)* suposant només que les integrals de X i Y existeixen.
Idea: Suposant que μ és finita, considereu els conjunts $A_n = \{\omega \in \Omega :\ X(\omega) \geqslant Y(\omega) + \frac{1}{n},\ |Y(\omega)| \leqslant n\}$ i obteniu $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = 0$. Després considereu $B_n = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = -\infty,\ X(\omega) \geqslant -n\}$ i obteniu $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\big) = 0$.

2.4 Demostreu, a partir del Lema de Fatou, el següent "Lema de Fatou invertit" que s'utilitza en la demostració del Teorema de la Convergència Dominada:
Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de funcions mesurables $X_n\colon\Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ tal que

$$\int_\Omega \sup_{n\in\mathbb{N}} X_n\, d\mu \quad \text{existeix i és} \neq +\infty\ .$$

Aleshores, les integrals de X_n, $\forall n$, i de $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, X_n$ existeixen i

$$\int_\Omega \overline{\lim_{n\to\infty}}\, X_n\, d\mu \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_\Omega X_n\, d\mu\ .$$

2.5 Sigui $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ un espai de mesura. En la situació

$$\Omega \xrightarrow{\ X\ } \mathbb{R} \xrightarrow{\ g\ } \mathbb{R}$$

sabem que $\displaystyle\int_\Omega g(X)\,d\mu = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mu_X(dx)$ (Teorema de la Mesura Imatge), i l'última integral es pot calcular com una integral respecte una mesura més fàcil ν si $\mu_X \ll \nu$ (Teorema de Radon–Nikodým).

a) Comproveu que si X pren valors en $\mathbb{N}$ (i.e. $\operatorname{Im} X \subset \mathbb{N}$), aleshores $\mu_X \ll m$ (on m representa la mesura comptadora de naturals) amb densitat $f(n) = \mu\{X = n\}$. Per tant, es té la fórmula

$$\int_\Omega g(X)\,d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} g(n)\mu\{X = n\} \ .$$

En particular, si $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ és un espai de probabilitat, l'esperança de la variable aleatòria $g(X)$ es pot calcular com

$$\mathrm{E}[g(X)] = \sum_{n=0}^{\infty} g(n)P\{X = n\} \ .$$

b) Generalitzem la situació anterior: Sigui M un subconjunt numerable de $\mathbb{R}$. Definim la *mesura comptadora d'elements de* M com

$$m_M(A) := \operatorname{card}(A \cap M) \ , \quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \ .$$

Comproveu que m_M és una mesura discreta.

Suposem que $\operatorname{Im} X \subset M$. Demostreu que $\mu_X \ll m_M$, que això implica que μ_X és també discreta, i que

$$\int_\Omega g(X)\,d\mu = \sum_{m \in M} g(m)\mu\{X = m\} \ .$$

Nota: Si l'espai $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ ja és ell mateix numerable, llavors es pot demostrar directament que

$$\int_\Omega g(X)\,d\mu = \sum_{\omega \in \Omega} g(X(\omega))\mu(\{\omega\}) \ .$$

No cal doncs usar el Teorema de la Mesura Imatge ni el de Radon–Nikodým en aquest cas per tenir una fórmula fàcil. Tanmateix, el punt de vista que hem desenvolupat permet oblidar totalment l'estructura de l'espai de mesura $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ i unifica procediments.

2.6 Siguin $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ un espai de mesura i $(E, \mathfrak{E})$ un espai mesurable.
Siguin $X, Y \colon \Omega \longrightarrow E$ funcions mesurables tal que $X = Y$ μ-q.p.t.
Demostreu que les mesures imatge de μ per X i per Y coincideixen.

2.7 Considereu un experiment aleatori en què se sorteja un nombre natural n amb probabilitat $P(\{n\}) = \frac{1}{2^n}$, $\forall n = 1, 2, 3 \ldots$. Segons el nombre resultant, rebem una certa quantitat de diners, especificada per una funció $X(n)$.
En l'espai de probabilitat convenient, X serà una variable aleatòria que ens donarà el guany obtingut en una realització del joc descrit. Com veurem més endavant, l'esperança $\mathrm{E}[X]$ representa, si existeix, el guany mitjà que un pot esperar a la llarga si hi juga moltes vegades.
Calculeu $\mathrm{E}[X]$ (si existeix!) en cadascun dels casos següents:
a) $X(n) = n$.
b) $X(n) = -2^n$.
c) $X(n) = \frac{(-1)^{n+1}2^n}{n}$ (en aquest cas paguem o cobrem segons el nombre sigui parell o imparell, respectivament).

2.8 Els clàssics teoremes de canvi de variable del Càlcul d'Integrals són casos particulars del Teorema de la Mesura Imatge. Considereu per exemple la situació següent:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\ X\ } \mathbb{R} \xrightarrow{\ g\ } \mathbb{R}$$

amb X de classe C^1, estrictament creixent i bijectiva.
Demostreu que

$$\int_{\mathbb{R}} (g \circ X)(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} g(x) \left(X^{-1}(x)\right)' \, dx \ .$$

D'habitud, ens referim a aquesta fórmula dient que « fem el canvi $t = X^{-1}(x)$ en $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (g \circ X)(t)\, dt$ ».
Idea: En vista del Teorema de la Mesura Imatge, es tracta de demostrar que, essent λ la mesura de Lebesgue, es té $\dfrac{d\mu_X}{d\lambda} = (X^{-1})'$.

2.9 Siguin $I =]a, b[$ i $J =]c, d[$ dos intervals oberts de $\mathbb{R}$ (no necessàriament acotats), i sigui $g\colon I \longrightarrow J$ un difeomorfisme de classe C^1.
Sigui $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatòria que pren valors en I ($\operatorname{Im} X \subset I$), i la llei de la qual té una densitat f_X respecte la mesura de Lebesgue.
a) Demostreu que la variable aleatòria $Y = g(X)$ també té una llei absolutament contínua respecte la mesura de Lebesgue i calculeu la seva densitat.
b) Aplicació: La funció $f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$, on $a < b$, és la densitat d'una probabilitat en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ que s'anomena *llei Uniforme en* $[a, b]$. Sigui X una variable aleatòria amb aquesta llei. Calculeu $E[X^2]$ de dues maneres:
1) Usant només la llei de X.
2) Calculant primer la llei de X^2.
c) Aplicació: La funció $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)$, on $\lambda \in]0, +\infty[$, és la densitat d'una probabilitat en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ que s'anomena *llei Exponencial de paràmetre* λ. Sigui X una variable aleatòria amb aquesta llei. Calculeu l'esperança i la variància de $Y = e^X$ obtenint primer la densitat de la llei de Y.

2.10 *Espais L^p.* Sigui $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espai de probabilitat. Notem per $\mathcal{L}^0$ l'espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ de totes les variables aleatòries $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Per $p \geqslant 1$, sigui $\mathcal{L}^p$ el conjunt de variables aleatòries que tenen moment d'ordre p finit.
a) Comproveu que $\mathcal{L}^p$ és un subspai vectorial de $\mathcal{L}^0$. *Idea:* Useu $|a+b|^p \leqslant 2^p(|a|^p + |b|^p)$.
b) Demostreu la *Desigualtat de Hölder:*
Si $p, q > 1$ estan relacionats per $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, i $X \in L^p$ i $Y \in L^q$, aleshores $XY \in L^1$ i

$$\int_\Omega |XY|\, dP \leqslant \Big(\int_\Omega |X|^p\, dP\Big)^{1/p} \Big(\int_\Omega |Y|^q\, dP\Big)^{1/q} \ .$$

c) Demostreu la *Desigualtat de Minkowski:*
Si $p \geqslant 1$ i $X, Y \in L^p$, aleshores

$$\Big(\int_\Omega |X+Y|^p\, dP\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\int_\Omega |X|^p\, dP\Big)^{1/p} + \Big(\int_\Omega |Y|^p\, dP\Big)^{1/p} \ .$$

Idea: Useu la Desigualtat de Hölder.
d) Demostreu que $1 \leqslant p \leqslant q \Rightarrow \mathcal{L}^q \subset \mathcal{L}^p$. *Idea:* Useu la Desigualtat de Hölder.
e) En cada $\mathcal{L}^p$, definim la relació $X \sim Y \Leftrightarrow X = Y$ q.s. Comproveu que és una relació d'equivalència compatible amb l'estructura d'espai vectorial. Notem $L^p := \mathcal{L}^p/_\sim$ l'espai vectorial quocient.
f) Per $p \geqslant 1$, definim en L^p la norma

$$\|X\|_p := \Big(\int_\Omega |X|^p\, dP\Big)^{1/p} \ .$$

Comproveu que efectivament es tracta d'una norma.
g) Comproveu que una variable aleatòria acotada està en tots els espais $\mathcal{L}^p$.
h) L^p és un espai mètric amb la distància

$$d_p(X,Y) = \|X - Y\|_p \ .$$

Demostreu que es tracta d'un espai mètric complet (i.e. tota successió de Cauchy és convergent.)

2.11 Si μ i ν són dues mesures, aleshores una funció mesurable X és integrable respecte $\mu+\nu$ sii és integrable respecte μ i respecte ν, i en cas afirmatiu es té

$$\int_\Omega X \, d(\mu+\nu) = \int_\Omega X \, d\mu + \int_\Omega X \, d\nu \ .$$

2.12 Sigui X una variable aleatòria amb funció de distribució F contínua.
a) Demostreu que la variable $Y = F(X)$ segueix la llei $\mathrm{Unif}([0,1])$ (uniforme en $[0,1]$).
Idea: Si F té inversa F^{-1}, és fàcil. Si F no té inversa, es defineix la pseudo-inversa de F com

$$F^{(-1)}(y) := \sup\{x\colon F(x) \leqslant y\}, \quad y \in \ ]0,1[\ .$$

Comproveu que $F(F^{(-1)}(y)) = y$, $\forall y \in \ ]0,1[$, i per tant la demostració es fa anàlogament al cas en què existeix inversa.
b) El resultat de l'apartat *a)* és útil per fer que un ordinador generi valors d'una variable aleatòria amb una llei determinada:
La majoria de llenguatges de programació incorporen una funció que fa que l'ordinador generi un valor en $[0,1]$ seguint la llei $\mathrm{Unif}([0,1])$ (com es fa això és una altra qüestió, gens trivial). Suposeu que teniu aquest generador de valors d'una variable Y amb llei $\mathrm{Unif}([0,1])$. Expliqueu com, usant l'apartat anterior, pot simular-se una variable aleatòria X amb llei exponencial de paràmetre λ.

2.13 Sigui $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ un espai de mesura amb μ una mesura finita. Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de funcions $X_n\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables respecte μ que convergeix uniformement a una funció $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
Demostreu que X és integrable respecte a μ i

$$\int_\Omega X \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n \, d\mu \ .$$

Nota: Això s'anomena de vegades Teorema de la Convergència Uniforme. És l'únic teorema de convergència que val en la Teoria de la Integral de Riemann.

2.14 Donat un espai mesurable $(\Omega, \mathfrak{F})$, podem considerar el conjunt $\mathcal{M}$ de totes les mesures sobre aquest espai. Definim en $\mathcal{M}$ la relació $\mu \sim \nu \Leftrightarrow (\mu \ll \nu \ \text{ i } \ \nu \ll \mu)$.
a) Demostreu que $\sim$ és una relació d'equivalència en $\mathcal{M}$.
b) Demostreu que, per mesures μ i ν σ-finites, es té $\mu \sim \nu$ sii la densitat $f = \dfrac{d\mu}{d\nu}$ compleix $f > 0$ ν-q.s.

3. Producte d'espais de mesura

3.1 Producte d'espais mesurables

3.1.1 Definició

Sigui $\{(\Omega_i, \mathfrak{F}_i)\}_{i\in I}$ una família arbitrària d'espais mesurables.
Sigui $\Omega := \underset{i\in I}{\times} \Omega_i$ (producte cartesià de la família $\{\Omega_i\}_{i\in I}$.)
Siguin $\pi_i\colon \Omega \longrightarrow \Omega_i$, $i \in I$, les projeccions de Ω sobre els seus factors.
S'anomena *σ-àlgebra producte de* $\{\mathfrak{F}_i\}_{i\in I}$ la σ-àlgebra de $\mathcal{P}(\Omega)$ generada per $\{\pi_i\}_{i\in I}$. La notarem $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i\in I} \mathfrak{F}_i$. (Observeu l'analogia amb la definició de topologia producte, que és la mínima topologia que fa contínues les projeccions.)
Equivalentment, $\bigotimes_{i\in I} \mathfrak{F}_i = \sigma\!<\!\{\pi_i^{-1}(A_i) : A_i \in \mathfrak{F}_i,\ i \in I\}\!>$. Un conjunt de la forma $\pi_i^{-1}(A_i)$ és un *cilindre* de base A_i.
$(\Omega, \mathfrak{F})$ és *l'espai mesurable producte* de $\{(\Omega_i, \mathfrak{F}_i)\}_{i\in I}$.

3.1.2 Observació

En la situació de la definició anterior, si $(E, \mathfrak{E})$ és un altre espai mesurable, aleshores $X\colon E \longrightarrow \Omega$ és mesurable sii $\forall i \in I$, $\pi_i \circ X\colon E \longrightarrow \Omega_i$ és mesurable. És conseqüència directa de la Proposició 2.1.6. □

La definició anterior és molt general, però només ens interessarà el cas en què la família d'espais mesurables és finita. En tal situació, la σ-àlgebra producte es pot definir d'una altra manera equivalent, en termes de "rectangles" en lloc de "cilindres".

3.1.3 Definició

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F})$ l'espai mesurable producte de la família finita $\{(\Omega_i, \mathfrak{F}_i)\}_{i=1}^n$.
S'anomena *rectangle mesurable* tot subconjunt de Ω de la forma $A_1 \times \cdots \times A_n$ (producte cartesià), amb $A_i \in \mathfrak{F}_i$.

3.1.4 Observació

La σ-àlgebra generada pels rectangles coincideix amb la generada pels cilindres. Això és immediat del fet que tot cilindre és un rectangle mesurable,

$$\pi_i^{-1}(A_i) = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{i-1} \times A_i \times \Omega_{i+1} \times \cdots \times \Omega_n \ ,$$

i tot rectangle és intersecció finita de cilindres,

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(A_i) \; .$$

3.1.5 Exercici

La col·lecció dels rectangles mesurables és una semiàlgebra. Es demostra igual que en el cas dels intervals de $\mathbb{R}^n$ (vegeu el Problema **1.10**).

3.1.6 Proposició

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F})$ *l'espai mesurable producte de* $(\Omega_1, \mathfrak{F}_1)$ *i* $(\Omega_2, \mathfrak{F}_2)$.
Sigui $(E, \mathfrak{E})$ *un espai mesurable.*
Sigui $X\colon \Omega \longrightarrow E$ *una funció mesurable.*
Aleshores, per a cada $\omega_1 \in \Omega_1$, *la funció parcial*

$$\begin{aligned} \Omega_2 &\xrightarrow{\;X(\omega_1,\cdot)\;} E \\ \omega_2 &\longmapsto X(\omega_1, \omega_2) \end{aligned}$$

és mesurable.

Demostració: Gràcies a l'Observació 3.1.2, la injecció

$$\begin{aligned} \Omega_2 &\xrightarrow{\;i_{\omega_1}\;} \Omega_1 \times \Omega_2 \\ \omega_2 &\longmapsto (\omega_1, \omega_2) \end{aligned}$$

és mesurable, perquè composta amb cadascuna de les projeccions dóna lloc a una funció mesurable (obtenim la identitat o bé una funció constant).
$X(\omega_1, \cdot)$ és la composició de mesurables $X \circ i_{\omega_1}$, i per tant és mesurable. □

L'enunciat val també, és clar, per l'altre funció parcial $X(\cdot, \omega_2)\colon \Omega_1 \longrightarrow E$, i per un producte finit qualsevol d'espais mesurables.

3.2 Producte finit d'espais de mesura

Volem construir mesures en un espai mesurable producte (finit) a partir de mesures en els espais factors. De fet, ho farem per dos espais. Aplicant iterativament el procediment es fa la construcció sobre un producte finit qualsevol (Observació 3.2.4, 3), més endavant). L'eina bàsica és el concepte que definim tot seguit.

3.2.1 Definició

Una *mesura de transició* d'un espai mesurable $(\Omega_1, \mathfrak{F}_1)$ en un altre espai mesurable $(\Omega_2, \mathfrak{F}_2)$ és una aplicació

$$\tau\colon \Omega_1 \times \mathfrak{F}_2 \longrightarrow [0, +\infty]$$

tal que

1) $\forall \omega_1 \in \Omega_1$, $\tau(\omega_1, \cdot)\colon \mathfrak{F}_2 \longrightarrow [0, +\infty]$ és una mesura en $(\Omega_2, \mathfrak{F}_2)$.
2) $\forall A_2 \in \mathfrak{F}_2$, $\tau(\cdot, A_2)\colon \Omega_1 \longrightarrow [0, +\infty]$ és mesurable.

Quan la imatge de la funció τ és $[0,1]$, diem que és una *probabilitat de transició.* $\square$

Les probabilitats de transició modelen la situació següent: Si Ω_1 i Ω_2 són els conjunts de resultats de dos experiments aleatoris, $\tau(\omega_1, A_2)$ representa la probabilitat que es produeixi A_2 en el segon experiment sabent que ω_1 és el resultat del primer.

Un cas particular important és aquell en què $\tau(\cdot, A_2)$ és una constant $\tau(A_2)$, per a cada $A_2 \in \mathfrak{F}_2$. Aleshores

$$\begin{aligned} \tau\colon \mathfrak{F}_2 &\longrightarrow [0,1] \\ A_2 &\longmapsto \tau(A_2) \end{aligned}$$

és una probabilitat en $(\Omega_2, \mathfrak{F}_2)$. Això vol dir que el segon experiment no està influït pel resultat del primer. Podem dir que són "experiments independents". Precisarem més endavant el concepte d'independència, que és fonamental.

3.2.2 Definició

Una família de mesures $\{\mu_i\}_{i\in I}$ en un espai mesurable $(\Omega, \mathfrak{F})$ és *uniformement σ-finita* sii existeix una descomposició $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, amb $B_n \in \mathfrak{F}$, i constants $K_n \in \mathbb{R}$ tals que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall i \in I, \quad \mu_i(B_n) \leqslant K_n \ .$$

3.2.3 Teorema de la Mesura Producte

Sigui $(\Omega_1, \mathfrak{F}_1, \mu)$ un espai de mesura, amb μ σ-finita.
Sigui $(\Omega_2, \mathfrak{F}_2)$ un espai mesurable.
Sigui $\tau\colon \Omega_1 \times \mathfrak{F}_2 \longrightarrow [0, +\infty]$ una mesura de transició tal que la família de mesures $\{\tau(\omega_1, \cdot)\}_{\omega_1\in\Omega_1}$ és uniformement σ-finita.
Aleshores:

1) *Existeix una única mesura ν en $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2)$ tal que*

$$\nu(A_1 \times A_2) = \int_{A_1} \tau(\omega_1, A_2)\, \mu(d\omega_1) \ . \tag{3.2.1}$$

2) *Si $X\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ és una funció $(\mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2, \mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}}))$-mesurable i la integral de X respecte ν existeix, aleshores:*
La funció

$$\begin{aligned} \Omega_1 &\longrightarrow \bar{\mathbb{R}} \\ \omega_1 &\longmapsto \int_{\Omega_2} X(\omega_1, \omega_2)\, \tau(\omega_1, d\omega_2) \end{aligned}$$

està ben definida μ-q.p.t. $\omega_1 \in \Omega_1$, és mesurable (definida com a zero, per exemple, allà on la integral no existeixi), la seva integral respecte μ existeix i

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} X\, d\nu = \int_{\Omega_1} \Big(\int_{\Omega_2} X(\omega_1, \omega_2)\, \tau(\omega_1, d\omega_2) \Big)\, \mu(d\omega_1) \ . \tag{3.2.2}$$

Demostració:
1) Veurem que ν definida per (3.2.1) és una funció de conjunt positiva σ-additiva i σ-finita sobre la semiàlgebra dels rectangles mesurables. Pels resultats de l'Apartat 1.2, ν determinarà una única mesura en la σ-àlgebra generada pels rectangles, és a dir, en $\mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2$.
La positivitat és evident. Vegem que ν és σ-finita:
Sigui $\{B_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{F}_1$ tal que $\Omega_1 = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} B_\ell$ i $\mu(B_\ell) < +\infty$.
Sigui $\{C_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{F}_2$ tal que $\Omega_2 = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m$ i $\tau(\cdot, C_m) \leqslant K_m < +\infty$.
Llavors, $\Omega_1 \times \Omega_2 = \bigcup_{\ell,m=1}^{\infty} B_\ell \times C_m$ i

$$\nu(B_\ell \times C_m) = \int_{B_\ell} \tau(\omega_1, C_m)\,\mu(d\omega_1) \leqslant \int_{B_\ell} K_m\,\mu(d\omega_1) = K_m\mu(B_\ell) < +\infty\ .$$

Vegem finalment que ν és σ-additiva: Sigui $A_1 \times A_2 = \biguplus_{n=1}^{\infty} A_1^n \times A_2^n$, amb $A_1^n \in \mathfrak{F}_1$ i $A_2^n \in \mathfrak{F}_2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_1^n \times A_2^n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_1} \mathbf{1}_{A_1^n}(\omega_1)\tau(\omega_1, A_2^n)\,\mu(d\omega_1) \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_1} \mathbf{1}_{A_1^n}(\omega_1) \int_{\Omega_2} \mathbf{1}_{A_2^n}(\omega_2)\,\tau(\omega_1, d\omega_2)\,\mu(d\omega_1) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} \mathbf{1}_{A_1^n\times A_2^n}(\omega_1,\omega_2)\,\tau(\omega_1, d\omega_2)\,\mu(d\omega_1) \\
&\overset{(2)}{=} \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} \mathbf{1}_{A_1\times A_2}(\omega_1,\omega_2)\,\tau(\omega_1, d\omega_2)\,\mu(d\omega_1) \\
&\overset{(1)}{=} \int_{\Omega_1} \mathbf{1}_{A_1}(\omega_1)\,\tau(\omega_1, A_2)\,\mu(d\omega_1) = \nu(A_1 \times A_2)\ .
\end{aligned}$$

(1) Definició de τ.
(2) Pel Teorema de la Convergència Monòtona (dues vegades). Només cal pensar la sèrie com a límit de sumes parcials.

2) Usem el camí habitual indicadors $\to$ elementals $\to$ positives $\to$ arbitràries.

a) Indicadors: $X(\omega_1,\omega_2) = \mathbf{1}_A(\omega_1,\omega_2)$.
Farem un argument de "bons conjunts". Definim

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C} = \Big\{ & A \in \mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2 : \\
& \omega_1 \longmapsto \int_{\Omega_2} \mathbf{1}_A(\omega_1,\omega_2)\,\tau(\omega_1, d\omega_2) \text{ està ben definida } \mu\text{-q.p.t. i és mesurable,} \\
& \nu(A) = \int_{\Omega_1} \Big(\int_{\Omega_2} \mathbf{1}_A(\omega_1,\omega_2)\,\tau(\omega_1, d\omega_2)\Big)\,\mu(d\omega_1) \Big\}\ .
\end{aligned}$$

Volem veure que $\mathfrak{C} = \mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2$.

i) $\mathfrak{C}$ conté la semiàlgebra $\mathfrak{S}$ dels rectangles mesurables:
Sigui $A = A_1 \times A_2$. L'existència, $\forall\omega_1$, de la integral sobre Ω_2, és òbvia perquè l'integrand és positiu. La funció és igual a $\mathbf{1}_{A_1}(\omega_1)\tau(\omega_1, A_2)$, producte de dues funcions mesurables, i doncs mesurable. Finalment,

$$\begin{aligned}
\nu(A_1 \times A_2) &= \int_{\Omega_1} \mathbf{1}_{A_1}(\omega_1)\tau(\omega_1, A_2)\,\mu(d\omega_1) \\
&= \int_{\Omega_1} \Big(\int_{\Omega_2} \mathbf{1}_{A_1}(\omega_1)\mathbf{1}_{A_2}(\omega_2)\,\tau(\omega_1, d\omega_2)\Big)\,\mu(d\omega_1) \\
&= \int_{\Omega_1} \Big(\int_{\Omega_2} \mathbf{1}_{A_1\times A_2}(\omega_1,\omega_2)\,\tau(\omega_1, d\omega_2)\Big)\,\mu(d\omega_1)\ .
\end{aligned}$$

ii) $\mathfrak{C}$ conté l'àlgebra $a(\mathfrak{S})$:
Sigui $A = \biguplus_{k=1}^{n} A_1^k \times A_2^k$, amb $A_1^k \in \mathfrak{F}_1$, $A_2^k \in \mathfrak{F}_2$.
La funció $\omega_1 \longmapsto \int_{\Omega_2} \mathbf{1}_A(\omega_1, \omega_2)\, \tau(\omega_1, d\omega_2)$ és suma de les funcions $\omega_1 \longmapsto \int_{\Omega_2} \mathbf{1}_{A_1^k \times A_2^k}(\omega_1, \omega_2)\, \tau(\omega_1, d\omega_2)$, que són mesurables per *i)*.

$$\begin{aligned}
\nu(A) &= \sum_{k=1}^{n} \nu(A_1^k \times A_2^k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega_1} \Big(\int_{\Omega_2} \mathbf{1}_{A_1^k \times A_2^k}(\omega_1, \omega_2)\, \tau(\omega_1, d\omega_2) \Big)\, \mu(d\omega_1) \\
&= \int_{\Omega_1} \Big(\int_{\Omega_2} \mathbf{1}_A(\omega_1, \omega_2)\, \tau(\omega_1, d\omega_2) \Big)\, \mu(d\omega_1) \ .
\end{aligned}$$

iii) $\mathfrak{C}$ és classe monòtona:
(En el cas en què $\tau(\omega_1, \cdot)$ i μ són mesures finites, el que segueix queda considerablement simplificat. Es recomana escriure la demostració en aquest cas.)
Siguin $\{B_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ i $\{C_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ com en *1)*.
Definim

$$\begin{aligned}
\mu_\ell(A_1) &:= \mu(A_1 \cap B_\ell) \ , \quad A_1 \in \mathfrak{F}_1 \\
\tau_m(\omega_1, A_2) &:= \tau(\omega_1, A_2 \cap C_m) \ , \quad A_2 \in \mathfrak{F}_2 \ .
\end{aligned}$$

Es comprova immediatament que μ_ℓ són mesures finites sobre $\mathfrak{F}_1$, que τ_m són mesures de transició de $(\Omega_1, \mathfrak{F}_1)$ en $(\Omega_2, \mathfrak{F}_2)$ complint $\tau_m(\omega_1, \Omega_2) \leqslant K_m$, $\forall \omega_1$, i que

$$\mu = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mu_\ell \quad \text{i} \quad \tau(\omega_1, \cdot) = \sum_{m=1}^{\infty} \tau_m(\omega_1, \cdot) \ .$$

Sigui $\nu_{\ell,m}$ la mesura construïda com en *1)* partint de τ_m i μ_ℓ. Es té que $\nu_{\ell,m}$ és finita i que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \nu_{\ell,m} = \nu$$

(es suficient comprovar la igualtat sobre rectangles mesurables; cal usar una versió del problema **2.11** per a sumes infinites de mesures i integrand positiu; es deixa com a exercici al lector).
Sigui $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successió monòtona d'elements de $\mathfrak{C}$. Sigui $A = \lim_{n \to \infty} A_n$.
Aplicant el Teorema de la Convergència Dominada (la funció idènticament igual a 1 domina), la successió de funcions

$$\omega_1 \longmapsto \int_{\Omega_2} \mathbf{1}_{A_n}(\omega_1, \omega_2)\, \tau_m(\omega_1, d\omega_2) \tag{3.2.3}$$

convergeix a

$$\omega_1 \longmapsto \int_{\Omega_2} \mathbf{1}_A(\omega_1, \omega_2)\, \tau_m(\omega_1, d\omega_2)$$

Com que les funcions (3.2.3) són mesurables, el seu límit també ho és.

Finalment,

$$\begin{aligned}
\nu(A) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty}\nu_{\ell,m}(A) \overset{(1)}{=} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\nu_{\ell,m}(A_n) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_1}\Big(\int_{\Omega_2}\mathbf{1}_{A_n}(\omega_1,\omega_2)\tau_m(\omega_1,d\omega_2)\Big)\mu_\ell(d\omega_1) \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty}\int_{\Omega_1}\Big(\int_{\Omega_2}\mathbf{1}_{A}(\omega_1,\omega_2)\tau_m(\omega_1,d\omega_2)\Big)\mu_\ell(d\omega_1) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\int_{\Omega_1}\Big(\int_{\Omega_2}\mathbf{1}_{A}(\omega_1,\omega_2)\tau_m(\omega_1,d\omega_2)\Big)\mu(d\omega_1) \\
&\overset{(3)}{=} \int_{\Omega_1}\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\int_{\Omega_2}\mathbf{1}_{A}(\omega_1,\omega_2)\tau_m(\omega_1,d\omega_2)\Big)\mu(d\omega_1) \\
&= \int_{\Omega_1}\Big(\int_{\Omega_2}\mathbf{1}_{A}(\omega_1,\omega_2)\tau(\omega_1,d\omega_2)\Big)\mu(d\omega_1)\ .
\end{aligned}$$

(1) Per la continuïtat de les mesures finites sobre successions monòtones.

(2) Apliquem dues vegades el Teorema de la Convergència Dominada.

(3) Apliquem el Teorema de la Convergència Monòtona.

iv) $\mathfrak{C} = \mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2$:
És conseqüència de *ii)*, *iii)*, i el Teorema de les Classes Monòtones.

b) Elementals positives:
Només cal aplicar que la suma de funcions mesurables és mesurable i la integral de la suma és la suma d'integrals, tenint en compte que totes les funcions involucrades són positives.

c) Mesurables positives:
Sigui $X = \lim_{n\to\infty} X_n$, on $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió creixent de funcions elementals positives. Per definició,

$$\int_{\Omega_2} X(\omega_1,\omega_2)\,\tau(\omega_1,d\omega_2) = \lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_2} X_n(\omega_1,\omega_2)\,\tau(\omega_1,d\omega_2)\ . \tag{3.2.4}$$

La funció

$$\omega_1 \longmapsto \int_{\Omega_2} X(\omega_1,\omega_2)\,\tau(\omega_1,d\omega_2)$$

és doncs mesurable pel fet de ser límit de mesurables.

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1\times\Omega_2} X\,d\nu = \lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_1\times\Omega_2} X_n\,d\nu &\overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_1}\Big(\int_{\Omega_2} X_n(\omega_1,\omega_2)\,\tau(\omega_1,d\omega_2)\Big)\,\mu(d\omega_1) \\
&\overset{(2)}{=} \int_{\Omega_1}\Big(\int_{\Omega_2} X(\omega_1,\omega_2)\,\tau(\omega_1,d\omega_2)\Big)\,\mu(d\omega_1)\ .
\end{aligned}$$

(1) Per *b)*.

(2) Apliquem el Teorema de la Convergència Monòtona dues vegades. La successió d'integrals de (3.2.4) és creixent i positiva.

d) Mesurables arbitràries:
Suposem que $\int_{\Omega_1\times\Omega_2} X^-\,d\nu < +\infty$. El resultat de *c)* aplicat a X^- implica

$$\mu\Big(\Big\{\omega_1\in\Omega_1 :\ \int_{\Omega_2} X^-(\omega_1,\omega_2)\,\tau(\omega_1,d\omega_2) = +\infty\Big\}\Big) = 0\ ,$$

i per tant, la funció

$$\omega_1 \longmapsto \int_{\Omega_2} X(\omega_1,\omega_2)\,\tau(\omega_1,d\omega_2)$$
$$= \int_{\Omega_2} X^+(\omega_1,\omega_2)\,\tau(\omega_1,d\omega_2) - \int_{\Omega_2} X^-(\omega_1,\omega_2)\,\tau(\omega_1,d\omega_2)$$

està ben definida μ-q.p.t. $\omega_1 \in \Omega_1$. Finalment, obtenim

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} X\,d\nu = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} X^+\,d\nu - \int_{\Omega_1\times\Omega_2} X^-\,d\nu$$
$$\overset{(1)}{=} \int_{\Omega_1}\Big(\int_{\Omega_2} X(\omega_1,\omega_2)\,\tau(\omega_1,d\omega_2)\Big)\,\mu(d\omega_1)\ .$$

Es fa anàlogament si suposem $\displaystyle\int_{\Omega_1\times\Omega_2} X^+\,d\nu < +\infty$.

(1) Per *c)*.

3.2.4 Observacions

1) El Teorema parteix de l'existència de la integral de X respecte ν. És natural preguntar si el càlcul de les integrals iterades de (3.2.2), suposant que tingui sentit, ens diu alguna cosa sobre l'existència del primer membre de (3.2.2) i la igualtat. En principi, la resposta és no; però sí que la igualtat és certa si

$$\int_{\Omega_1}\Big(\int_{\Omega_2} |X(\omega_1,\omega_2)|\,\tau(\omega_1,d\omega_2)\Big)\,\mu(d\omega_1) < +\infty$$

(vegeu el Problema **3.7**).

2) En el cas particular en què la mesura de transició no depèn de ω_1 (i aleshores τ és simplement una mesura σ-finita en $(\Omega_2,\mathfrak{F}_2)$), la fórmula (3.2.2) queda

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} X\,d\nu = \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} X(\omega_1,\omega_2)\,\tau(d\omega_2)\,\mu(d\omega_1)\ ,$$

i és coneguda com a *Teorema de Fubini*. El clàssic Teorema de Fubini en $\mathbb{R}^2$, on μ i τ coincideixen amb la mesura de Lebesgue, n'és un cas particular.
El Teorema de la Mesura Producte també és cert, naturalment, partint d'una mesura τ en $(\Omega_2,\mathfrak{F}_2)$ i una mesura de transició μ de $(\Omega_2,\mathfrak{F}_2)$ en $(\Omega_1,\mathfrak{F}_1)$, obtenint-se la fórmula

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} X\,d\nu = \int_{\Omega_2}\Big(\int_{\Omega_1} X(\omega_1,\omega_2)\,\mu(d\omega_1,\omega_2)\Big)\,\tau(d\omega_2)\ ,$$

Per tant, si μ és una mesura en $(\Omega_1,\mathfrak{F}_1)$ i τ una mesura en $(\Omega_2,\mathfrak{F}_2)$), i sota les hipòtesis del teorema, hom té la fórmula d'intercanvi de l'ordre d'integració

$$\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} X(\omega_1,\omega_2)\,\tau(d\omega_2)\,\mu(d\omega_1) = \int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1} X(\omega_1,\omega_2)\,\mu(d\omega_1)\,\tau(d\omega_2)\ .$$

3) El Teorema de la Mesura Producte es generalitza fàcilment al cas d'un producte amb més de dos factors. Només cal identificar $\Omega_1\times\cdots\times\Omega_n = (\Omega_1\times\cdots\times\Omega_{n-1})\times\Omega_n$, amb la qual cosa queden identificades les σ-àlgebres $\mathfrak{F}_1\otimes\cdots\otimes\mathfrak{F}_n$ i $(\mathfrak{F}_1\otimes\cdots\otimes\mathfrak{F}_{n-1})\otimes\mathfrak{F}_n$, i procedir iterativament: a partir d'una mesura en $(\Omega_1,\mathfrak{F}_1)$ i una mesura de transició τ_2 es construeix una mesura ν_2 en $(\Omega_1\times\Omega_2,\mathfrak{F}_1\otimes\mathfrak{F}_2)$; amb una mesura de transició τ_3 d'aquest últim espai mesurable en $(\Omega_3,\mathfrak{F}_3)$ s'obté una mesura en el producte dels tres espais, i així successivament. La fórmula (3.2.2) pel cas de tres factors seria

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2\times\Omega_3} X\,d\nu_3 = \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2}\int_{\Omega_3} X(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\,\tau_3(\omega_1,\omega_2,d\omega_3)\,\tau_2(\omega_1,d\omega_2)\,\mu(d\omega_1)\ .$$

3.2.5 Definició

En el cas en què τ és una mesura en el segon espai $(\Omega_2, \mathfrak{F}_2)$, aleshores la mesura ν en el producte $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2)$ s'anomena *la mesura producte* de μ i τ, i s'escriu $\nu = \mu \times \tau$. □

Observeu que la nomenclatura és una mica incoherent: el Teorema 3.2.3 s'hauria d'anomenar més pròpiament "Teorema de la Mesura a l'Espai Producte", ja que només dóna lloc a l'anomenada "mesura producte" en un cas particular.

3.3 Independència

El concepte d'independència ocupa un lloc central en la Teoria de la Probabilitat. És característic dels espais de probabilitat; no té extensió a mesures generals.

3.3.1 Definició

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espai de probabilitat.
Dos esdeveniments A, B són *independents* sii

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \ .$$

Més en general, una família arbitrària d'esdeveniments $\{A_i\}_{i \in I}$ és *independent* sii $\forall J \subset I$, J finit, es té

$$P\big(\bigcap_{j \in J} A_j\big) = \prod_{j \in J} P(A_j) \qquad \square$$

La independència d'una família d'esdeveniments no és equivalent al fet que els seus elements siguin independents dos a dos (vegeu el Problema **3.1**).

3.3.2 Definició

Sigui $\{\mathfrak{C}_i\}_{i \in I}$, $\mathfrak{C}_i \subset \mathfrak{F}$, una família de col·leccions d'esdeveniments.
Diem que $\{\mathfrak{C}_i\}_{i \in I}$ és *independent* sii tota família d'esdeveniments $\{A_i\}_{i \in I}$, amb $A_i \in \mathfrak{C}_i$, $\forall i \in I$, és independent.

3.3.3 Definició

Sigui $\{X_i \colon \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}\}_{i \in I}$ una família de variables aleatòries.
Diem que $\{X_i\}_{i \in I}$ és *independent* sii la família de σ-àlgebres $\{\sigma{<}X_i{>}\}_{i \in I}$ és independent.

3.3.4 Observació

Anant enrera en les tres definicions anteriors, podem posar el concepte d'independència de variables aleatòries en termes d'independència d'esdeveniments:
$\{X_i\}_{i \in I}$ és independent sii per a tot subconjunt finit $\{i_1, \dots, i_n\} \subset I$, i per a tots $B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}})$, es compleix

$$P(\{X_{i_1} \in B_1, \dots, X_{i_n} \in B_n\}) = P(\{X_{i_1} \in B_1\}) \cdot \ldots \cdot P(\{X_{i_n} \in B_n\}) \ . \tag{3.3.1}$$

L'expressió a l'esquerra de la igualtat (3.3.1) és la manera habitual abreviada d'escriure

$$P(\{X_{i_1} \in B_1\} \cap \cdots \cap \{X_{i_n} \in B_n\})$$

en aquest context. Una altra forma equivalent és

$$P(\{(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}) \in B_1 \times \cdots \times B_n\}) \qquad \square$$

Generalitzant la definició 3.3.3:

3.3.5 Definició

Sigui $\{(E_i, \mathfrak{E}_i)\}_{i\in I}$ una família d'espais mesurables.
Per a cada $i \in I$, sigui $X_i\colon \Omega \longrightarrow E_i$ una variable aleatòria E_i-valuada.
Diem que $\{X_i\}_{i\in I}$ és *independent* sii $\{\sigma{<}X_i{>}\}_{i\in I}$ és una família de σ-àlgebres independents. $\square$

Per abús de llenguatge, es parla d'esdeveniments, col·leccions d'esdeveniments i variables aleatòries *independents*, en lloc de *famílies independents* d'esdeveniments, etc. Cal no confondre-ho amb la *independència dos a dos*.

Es defineix la llei i la funció de distribució d'un vector aleatori de manera similar al cas de les variables aleatòries reals.

3.3.6 Definicions

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espai de probabilitat.
Sigui $X\colon \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ un vector aleatori, $X = (X_1, \ldots, X_n)$.
La mesura imatge de P per X és una probabilitat P_X en $(\bar{\mathbb{R}}^n, \mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}}^n))$ que s'anomena *llei* de X (o *llei conjunta de* $X_1, \ldots, X_n$).
En aquest context, la llei de X_i es diu que és la *llei marginal de* X_i *en* $X = (X_1, \ldots, X_n)$.
Anàlogament al cas $X\colon \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$, si $P(\{X \in \{-\infty, +\infty\}^n\}) = 0$, la llei es pot considerar com una probabilitat en $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$ i es pot definir la *funció de distribució* F_X de X (o *funció de distribució conjunta de* $X_1, \ldots, X_n$):
Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$F_X(x) := P_X(]-\infty, x]) = P(\{X_1 \leqslant x_1, \ldots, X_n \leqslant x_n\}) \ .$$

Com en el cas real, la funció de distribució determina la llei de X. No ho demostrarem.

3.3.7 Observació

La llei conjunta de $X_1, \ldots, X_n$ determina les lleis marginals. En efecte,

$$P(\{X_i \in B\}) = P(\{X_1 \in \bar{\mathbb{R}}, \ldots, X_{i-1} \in \bar{\mathbb{R}}, X_i \in B, X_{i+1} \in \bar{\mathbb{R}}, \ldots, X_n \in \bar{\mathbb{R}}\}) \ .$$

Quan té sentit parlar de funcions de distribució, la funció de distribució d'una llei marginal es determina immediatament a partir de la conjunta:

$$\begin{aligned} F_{X_i}(x_i) &= P(\{X_i \leqslant x_i\}) \\ &= P(\{X_1 \in \mathbb{R}, \ldots, X_{i-1} \in \mathbb{R}, X_i \leqslant x_i, X_{i+1} \in \mathbb{R}, \ldots, X_n \in \mathbb{R}\}) \\ &\overset{(1)}{=} \lim_{\substack{x_j \to \infty \\ j \neq i}} P(\{X_1 \leqslant x_1, \ldots, X_{i-1} \leqslant x_{i-1}, X_i \leqslant x_i, X_{i+1} \leqslant x_{i+1}, \ldots, X_n \leqslant x_n\}) \\ &= \lim_{\substack{x_j \to \infty \\ j \neq i}} F_X(x_1, \ldots, x_n) \ . \end{aligned}$$

En canvi, les lleis marginals no determinen la llei conjunta.

(1) Aplicant la propietat de continuïtat de les mesures per successions creixents.

3.3.8 Exercici

Si $P_X \ll \mu_1 \times \cdots \times \mu_n$ (una mesura producte en $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$ amb densitat f_X, aleshores cada X_i té densitat

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_X(x_1, \ldots, x_n)\, \mu_1(dx_1) \cdots \mu_{i-1}(dx_{i-1}) \mu_{i+1}(dx_{i+1}) \cdots \mu_n(dx_n)$$

respecte μ_i (vegeu el Problema **3.8**).

3.3.9 Proposició

Siguin $X_i\colon \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$, $i = 1, \dots, n$, *variables aleatòries amb lleis* P_{X_i}.
Aleshores:

1) $X_1, \dots, X_n$ *són independents sii la llei del vector* $X = (X_1, \dots, X_n)$ *és producte de les lleis marginals:*

$$P_X = P_{X_1} \times \cdots \times P_{X_n} \ .$$

2) $X_1, \dots, X_n$ *són independents sii* $F_X(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n)$, *suposant que tingui sentit parlar de funcions de distribució (vegeu les Definicions 3.3.6).*

Demostració:
1) Siguin $B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}})$.

$\Rightarrow)$

$$\begin{aligned} P_X(B_1 \times \cdots \times B_n) &= P(\{X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n\}) \\ &= P(\{X_1 \in B_1\}) \cdot \ldots \cdot P(\{X_n \in B_n\}) \\ &= P_{X_1}(B_1) \cdot \ldots \cdot P_{X_n}(B_n) \ . \end{aligned}$$

$\Leftarrow)$

$$\begin{aligned} &P(\{X_{i_1} \in B_{i_1}, \dots, X_{i_m} \in B_{i_m}\}) \\ &= P(\{X_{i_1} \in B_{i_1}, \dots, X_{i_m} \in B_{i_m}; X_j \in \bar{\mathbb{R}}, \forall j \neq i_1, \dots, i_m\}) \\ &= P(\{X_{i_1} \in B_{i_1}\}) \cdot \ldots \cdot P(\{X_{i_m} \in B_{i_m}\}) \ . \end{aligned}$$

2) La funció de distribució de la probabilitat producte de $P_{X_1}, \dots, P_{X_n}$ és

$$\begin{aligned} \big(P_{X_1} \times \cdots \times P_{X_n}\big)(]-\infty, x]) &= P_{X_1}(]-\infty, x_1]) \cdot \ldots \cdot P_{X_n}(]-\infty, x_n]) \\ &= F_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n) \ . \end{aligned}$$

Aquesta funció de distribució és igual a la de P_X sii $X_1, \dots, X_n$ són independents, per *1)*. □

Les propietats de la Proposició 3.3.9 són caracteritzacions (condicions necessàries i suficients) de la independència. A la proposició següent s'enuncien condicions que són necessàries, però no suficients.

3.3.10 Proposició

1) Siguin $(E_i, \mathfrak{E}_i)_{i \in I}$ *i* $(G_i, \mathfrak{G}_i)_{i \in I}$ *dues famílies d'espais mesurables.*
Sigui $\{X_i\}_{i \in I}$ *una família independent de variables aleatòries* $X_i\colon \Omega \longrightarrow E_i$, *i* $\{g_i\}_{i \in I}$ *una família de funcions mesurables* $g_i\colon E_i \longrightarrow G_i$.
Aleshores $\{g_i \circ X_i\}_{i \in I}$ *és una família independent de variables aleatòries* $g_i \circ X_i\colon \Omega \longrightarrow G_i$.

2) Siguin $X_1, \dots, X_n$ *variables aleatòries independents amb esperança finita (o sigui, integrables).*
Aleshores, $X_1 \cdot \ldots \cdot X_n$ *té esperança finita i*

$$\mathrm{E}[X_1 \cdot \ldots \cdot X_n] = \mathrm{E}[X_1] \cdot \ldots \cdot \mathrm{E}[X_n] \ .$$

3) Siguin $X_1, \dots, X_n$ *variables aleatòries independents amb esperança finita.*
Aleshores,

$$\mathrm{Var}[X_1 + \cdots + X_n] = \mathrm{Var}[X_1] + \cdots + \mathrm{Var}[X_n] \ .$$

Demostració:
1) De la igualtat $\big(g_i \circ X_i\big)^{-1}(B) = X_i^{-1}\big(g_i^{-1}(B)\big)$, resulta que

$$\sigma{<}g_i \circ X_i{>} \subset \sigma{<}X_i{>} \ , \quad \forall i \in I \ .$$

I és clar que si tenim una família de σ-àlgebres independents, agafant sub-σ-àlgebres de cadascuna obtindrem també una família independent.

2)

i) Cas preliminar: Suposem que $X_1, \dots, X_n$ són positives.
Posem $X = (X_1, \dots, X_n)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X_1 \cdot \ldots \cdot X_n] &\overset{(1)}{=} \int_{\bar{\mathbb{R}}^n} x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \, P_X\big(d(x_1, \dots, x_n)\big) \\
&\overset{(2)}{=} \int_{\bar{\mathbb{R}}^n} x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \, P_{X_1} \times \cdots \times P_{X_n}\big(d(x_1, \dots, x_n)\big) \\
&\overset{(3)}{=} \Big(\int_{\bar{\mathbb{R}}} x_1 \, P_{X_1}(dx_1)\Big) \cdot \ldots \cdot \Big(\int_{\bar{\mathbb{R}}} x_n \, P_{X_n}(dx_n)\Big) \\
&= \mathrm{E}[X_1] \cdot \ldots \cdot \mathrm{E}[X_n] \ .
\end{aligned}$$

(1) L'esperança del producte existeix per la positivitat. Però no cal utilitzar-ho en aquest moment, perquè segons l'Observació 2.5.7 podem escriure aquesta igualtat en tot cas.

(2) Per la Proposició 3.3.9, *1)*.

(3) L'integrand és positiu quasi segur respecte la mesura que integra. Per tant la integral existeix i podem aplicar el Teorema de la Mesura Producte (de fet, el Teorema de Fubini, vegeu l'Observació 3.2.4, 2).

ii) Cas general:

$$\mathrm{E}[|X_1 \cdot \ldots \cdot X_n|] \overset{(1)}{=} \mathrm{E}[|X_1|] \cdot \ldots \cdot \mathrm{E}[|X_n|] < +\infty \ ,$$

i per tant $X_1 \cdot \ldots \cdot X_n$ té esperança finita i val també el càlcul anterior.

(1) Pel cas preliminar *i)*. De pas, observem que en el cas de variables positives no és necessària la hipòtesi d'integrabilitat.

3)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[X_1 + \cdots + X_n] &\overset{(1)}{=} \mathrm{E}\left[\big(X_1 + \cdots + X_n - \mathrm{E}[X_1 + \cdots + X_n]\big)^2\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\Big(\sum_{i=1}^n X_i - \mathrm{E}[X_i]\Big)^2\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^n \big(X_i - \mathrm{E}[X_i]\big)^2\right] + \mathrm{E}\left[\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \big(X_i - \mathrm{E}[X_i]\big)\big(X_j - \mathrm{E}[X_j]\big)\right] \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}[X_i] \ .
\end{aligned}$$

(1) La hipòtesi d'integrabilitat assegura que l'expressió sota l'esperança té sentit, i per tant la variància de la suma està definida.

(2) Apliquem aquí la hipòtesi d'indepèndencia i *1)* i *2)*.

3.4 Probabilitat condicionada

3.4.1 Definició

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espai de probabilitat.
Siguin $A, B \in \mathfrak{F}$ amb $P(B) > 0$.
La *probabilitat de A condicionada a B* és

$$P\left({}^{A}\!/_{B}\right) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \square$$

Es comprova fàcilment que la funció de conjunt $P\left({}^{\cdot}\!/_{B}\right) \colon \mathfrak{F} \longrightarrow [0,1]$ és una probabilitat. La probabilitat condicionada té la interpretació següent: quan tenim la informació addicional que un cert esdeveniment B s'ha realitzat (és a dir, que $\omega \in B$), cal modificar convenientment el model inicial que havíem construït. Per exemple, B ha de passar a tenir probabilitat 1.

3.4.2 Observació

En la situació de la Definició 3.4.1, A i B són esdeveniments independents sii $P\left({}^{A}\!/_{B}\right) = P(A)$. Intuïtivament, aquesta igualtat vol dir que la informació que s'ha realitzat B no aporta res de nou sobre A.
Aquesta podria ser la definició d'independència. L'avantatge de fer la Definició 3.3.1 és que no cal demanar $P(B) > 0$.

3.4.3 Exercicis (Fórmules del Càlcul de Probabilitats Elemental)

Les fórmules clàssiques següents es demostren molt fàcilment a partir de la definició de probabilitat condicionada.

1) *Fórmula de les probabilitats compostes.*
Siguin $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{F}$ amb $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$.
Aleshores:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \dots \cap A_n) =& P\left({}^{A_n}\!/_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}\right) \cdot P\left({}^{A_{n-1}}\!/_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-2}}\right) \cdot \dots \\ & \dots \cdot P\left({}^{A_3}\!/_{A_1 \cap A_2}\right) \cdot P\left({}^{A_2}\!/_{A_1}\right) \cdot P(A_1) \ . \end{aligned}$$

2) *Fórmula de les probabilitats totals.*
Sigui $\{A_1, \dots, A_n\}$ una partició de Ω, amb $A_i \in \mathfrak{F}$ i $P(A_i) > 0$, $\forall i$.
Aleshores:

$$\forall A \in \mathfrak{F}, \quad P(A) = \sum_{i=1}^{n} P\left({}^{A}\!/_{A_i}\right) P(A_i) \ .$$

3) *Fórmula d'inversió de les condicions.*
Siguin $A, B \in \mathfrak{F}$, amb $P(A) > 0$, $P(B) > 0$.
Aleshores:

$$P\left({}^{A}\!/_{B}\right) = P\left({}^{B}\!/_{A}\right) \cdot \frac{P(A)}{P(B)} \ .$$

4) *Fórmula de Bayes.*
Sigui $\{A_1, \dots, A_n\}$ una partició de Ω, amb $A_i \in \mathfrak{F}$ i $P(A_i) > 0$, $\forall i$.
Sigui $B \in \mathfrak{F}$, amb $P(B) > 0$.
Aleshores:

$$P\left({}^{A_i}\!/_{B}\right) = \frac{P\left({}^{B}\!/_{A_i}\right) P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P\left({}^{B}\!/_{A_k}\right) P(A_k)} \ , \quad \forall i \qquad \square$$

Volem estendre la definició de probabilitat condicionada per tal de poder condicionar per esdeveniments de probabilitat zero. Això no té res d'estrany o patològic; al contrari, cal considerar aquest tipus de condicionament en molts models probabilístics habituals.

3.4.4 Definició

Siguin $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ variables aleatòries.
S'anomena *llei de Y condicionada per X* a tota probabilitat de transició p de $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ que compleixi

$$P(\{X \in A, Y \in B\}) = \int_A p(x, B)\, P_X(dx) \ , \quad \forall A, B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \ .$$

3.4.5 Notació

De vegades s'escriu $p(x, B) =: P\{Y \in B / X = x\}$. Aquesta notació és consistent amb la introduïda a la Definició 3.4.1:
Si $P(\{X = x\}) > 0$,

$$P(\{X = x, Y \in B\}) = \int_{\{x\}} p(y, B)\, P_X(dy) = p(x, B) P(\{X = x\})$$

$$\Rightarrow P(x, B) = \frac{P(\{X = x, Y \in B\})}{P(\{X = x\})} \qquad \square$$

No és immediat que existeixin sempre lleis condicionades. És cert, però no ho demostrarem. Concretament, es té la proposició següent.

3.4.6 Proposició

Donades dues variables aleatòries $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, sempre existeix una llei de Y condicionada per X.
Si p és una d'elles, aleshores p' també ho és sii per a cada $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $p(x, B) = p'(x, B)$ quasi segur en x respecte P_X.

3.4.7 Exemples

Vegem uns quants casos particulars de la situació anterior.

1) X, Y independents.
Sabem que

$$P(\{X \in A, Y \in B\}) = P(\{X \in A\}) P(\{Y \in B\}) = \int_A P_Y(B)\, P_X(dx) \ .$$

Com a llei de Y condicionada per X podem prendre $p(x, B) \equiv P_Y(B)$, és a dir, la pròpia llei de Y.

2) Llei de X discreta.
Sigui $P_X = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot \delta_{a_i}$, amb $p_i > 0$.
Sigui com sigui Y, podem prendre

$$p(x, B) := \begin{cases} \dfrac{P(\{X = x, Y \in B\})}{P(\{X = x\})}, & \text{si } x = a_i, \text{ per algun } i, \\ Q(B), & \text{si } x \neq a_i, \text{ per a tot } i, \end{cases}$$

on Q és qualsevol probabilitat.
Comprovació:

$$P(\{X \in A, Y \in B\}) = \sum_{a_i \in A} P(\{X = a_i, Y \in B\})$$

$$\stackrel{(1)}{=} \sum_{a_i \in A} p(a_i, B) P(\{X = a_i\}) = \int_A p(x, B)\, P_X(dx) \ .$$

(1) Usant la definició proposada de $p(x, B)$.

3) (X,Y) vector absolutament continu respecte la mesura de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$, amb funció de densitat f_{XY}.
Sigui $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x,y)\,dy$ (densitat de la llei marginal; vegeu l'Exercici 3.3.8.)
Podem prendre

$$p(x,B) := \begin{cases} \displaystyle\int_B \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}\,dy, & \text{si } f_X(x) \neq 0, \\ Q(B), & \text{si } f_X(x) = 0, \end{cases}$$

on Q és qualsevol probabilitat.
Comprovació:

$$\begin{aligned} P(\{X \in A, Y \in B\}) &= \int_{A\times B} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy \\ &\overset{(1)}{=} \int_A \int_B f_{XY}(x,y)\cdot \mathbf{1}_{\{f_X(x)\neq 0\}}\,dy\,dx \\ &\quad + \int_A \int_B f_{XY}(x,y)\cdot \mathbf{1}_{\{f_X(x)=0\}}\,dy\,dx \\ &\overset{(2)}{=} \int_A \int_B f_X(x)\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}\cdot \mathbf{1}_{\{f_X(x)\neq 0\}}\,dy\,dx \\ &\overset{(3)}{=} \int_A p(x,B) f_X(x)\,dx\ . \end{aligned}$$

(1) Apliquem el Teorema de Fubini.

(2) La segona integral és més petita o igual que

$$\int_A \mathbf{1}_{\{f_X(x)=0\}} \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx = \int_A \mathbf{1}_{\{f_X(x)=0\}} f_X(x)\,dx = 0\ .$$

(3) Apliquem la fórmula proposada de $p(x,B)$. Després, l'indicador es pot suprimir perquè, fora del conjunt que indica, l'integrand és zero.

Observem que per a tot x tal que $f_X(x) \neq 0$, la probabilitat $p(x,\cdot)$ és absolutament contínua amb densitat $\dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$. S'anomena *densitat condicionada de Y per $X = x$*.
S'escriu

$$f_{Y_{|X=x}}(y) := \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}\ .$$

3.4.8 Definició

Siguin $X, Y\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ variables aleatòries.
Sigui p una llei de Y condicionada per X.
Sigui $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que existeix la integral de g respecte $p(x,\cdot)$.
Es defineix

$$\mathrm{E}\left[{}^{g(Y)}\!/_{X = x}\right] := \int_{\mathbb{R}} g(y)\,p(x,dy)\ ,$$

que s'anomena *esperança condicionada* de $g(Y)$ per $\{X = x\}$.

3.4.9 Observació

Aquesta definició té alguns punts delicats i no és del tot precisa. El problema és que hem escollit *una* llei de Y condicionada per X. Què passa si n'escollim una altra?
Només sabem que si p i p' són dues lleis condicionades, aleshores, per a cada B fixat, $p(x,B)$ coincideix amb $p'(x,B)$ excepte potser en un conjunt de probabilitat zero respecte

la llei de X (Proposició 3.4.6). Per tant, per un valor de x determinat les probabilitats $p(x,\cdot)$ i $p'(x,\cdot)$ poden ser completament diferents i el nombre real "esperança condicionada de $g(Y)$ per $\{X=x\}$" no està ben definit.
És millor que deixem x variable, demanem que existeixi la integral de g respecte $p(x,\cdot)$, P_X-q.p.t. x, i pensem en la funció

$$x \longmapsto \mathrm{E}\left[g(Y)/X=x\right] .$$

Veurem que aquesta funció està ben definida excepte conjunts de probabilitat P_X zero (Proposició 3.4.10). En el llenguatge de l'Apartat 2.6, és un element de $L^0(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), P_X)$.

3.4.10 Proposició

Siguin $X, Y\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ variables aleatòries.
Siguin p i p' dues lleis de Y condicionades per X.
Sigui $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que existeix la integral de g respecte $p(x,\cdot)$, P_X-q.p.t. x.
Aleshores, existeix la integral de g respecte $p'(x,\cdot)$, P_X-q.p.t. x, i

$$\int_{\mathbb{R}} g(y)\, p(x,dy) = \int_{\mathbb{R}} g(y)\, p'(x,dy) \ , \quad P_X\text{-q.s.}$$

Demostració:
1) Indicadors: Si $g=\mathbf{1}_B$, hem de veure que $p(x,B)=p'(x,B)$ q.s., i això ja sabem que és cert (Proposició 3.4.6).
2) Elementals: Si $g=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\cdot \mathbf{1}_{B_i}$, sabem pel cas anterior que $p(x,B_i)=p'(x,B_i)$ excepte en un conjunt N_i de probabilitat zero, i per tant

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot p(x,B_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i\cdot p'(x,B_i)$$

excepte en el conjunt de probabilitat zero $\bigcup\limits_{i=1}^{n} N_i$.
3) Mesurables positives: Si g és mesurable positiva, aleshores $g=\lim\limits_{n\to\infty} g_n$, per una certa successió creixent $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funcions elementals positives. Pel cas anterior,

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(y)\, p(x,dy) = \int_{\mathbb{R}} g_n(y)\, p'(x,dy)$$

excepte sobre un conjunt N_n de probabilitat zero. Per tant, excepte sobre $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_n$, que també té probabilitat zero,

$$\int_{\mathbb{R}} g(y)\, p(x,dy) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(y)\, p(x,dy) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(y)\, p'(x,dy) = \int_{\mathbb{R}} g(y)\, p'(x,dy) \ .$$

4) Mesurables arbitràries: Només cal descompondre g en part positiva i part negativa. Es dedueix immediatament que si les integrals respecte les probabilitats $p(x,\cdot)$ existeixen, aleshores també existeixen respecte les probabilitats $p'(x,\cdot)$, i que coincideixen P_X-q.s. $\square$

L'esperança d'una variable es pot calcular amb l'ajuda d'una esperança condicionada.

3.4.11 Teorema

Suposem que $\mathrm{E}[g(Y)]$ *existeix.*

Aleshores, $\mathrm{E}\left[g(Y)/X = x\right]$ *existeix* P_X*-q.s.* $x \in \mathbb{R}$*, i*

$$E[g(Y)] = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{E}\left[g(Y)/X = x\right] P_X(dx) \ .$$

En particular, si $g(Y)$ *és integrable respecte* P*, aleshores* $\mathrm{E}\left[g(Y)/X = x\right]$ *és finita* P_X*-q.s.*

Demostració:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[g(Y)] &\overset{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^2} g(y)\, P_{XY}\big(d(x,y)\big) \\ &\overset{(2)}{=} \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} g(y)\, p(x,dy) \Big)\, P_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{E}\left[g(Y)/X = x\right] P_X(dx) \ .\end{aligned}$$

(1) Pel Teorema de la Mesura Imatge.

(2) Pel Teorema de la Mesura Producte. Observeu que de la Definició 3.4.4 es dedueix que la llei de (X,Y) és la probabilitat que el Teorema de la Mesura Producte construeix a partir de la probabilitat P_X i la probabilitat de transició p.

3.5 Problemes

3.1 Demostreu amb un contraexemple que no és cert que una família d'esdeveniments és independent si i només si els esdeveniments són independents dos a dos.

3.2 Demostreu que tot esdeveniment de probabilitat 0 o 1 és independent de qualsevol altre esdeveniment. Concloeu que una variable aleatòria constant q.s. és independent de qualsevol altra variable aleatòria.

3.3 Sabem que si X_1 i X_2 són variables aleatòries independents, aleshores $\mathrm{E}[X_1 X_2] = \mathrm{E}[X_1] \cdot \mathrm{E}[X_2]$ i $\mathrm{Var}[X_1 + X_2] = \mathrm{Var}[X_1] + \mathrm{Var}[X_2]$. Trobeu contraexemples que demostrin que cap de les igualtats anteriors no implica la indepèndencia.

3.4 Siguin X i Y dues variables aleatòries de l'espai $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Es defineix la *covariància* de X i Y com

$$\mathrm{Cov}[X,Y] := \mathrm{E}\left[\big(X - \mathrm{E}[X]\big) \cdot \big(Y - \mathrm{E}[Y]\big)\right] \ .$$

Dues variables X, Y es diu que són *incorrelacionades* sii $\mathrm{Cov}[X,Y] = 0$.
a) Demostreu que si X i Y són independents, aleshores són incorrelacionades.
b) Demostreu que el recíproc és fals: considereu, per exemple, una variable θ amb llei $\mathrm{Unif}([0,2\pi])$ i les variables $X = \cos\theta$ i $Y = \sin\theta$.

3.5 Siguin X i Y dues variables de l'espai $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ amb variància diferent de zero. Es defineix el *coeficient de correlació* entre X i Y com

$$\rho_{XY} := \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]\,\mathrm{Var}[Y]}} \ .$$

A l'espai vectorial $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ s'hi pot posar un producte escalar,

$$\langle X, Y \rangle := \int_{\Omega} XY \, dP \ ,$$

ben relacionat amb la norma per la fórmula $\|X\|_2^2 = \langle X, X\rangle$. En tot espai vectorial amb producte escalar relacionat d'aquesta manera amb la norma es compleix la *desigualtat de Schwarz*:

$$|\langle X, Y\rangle| \leqslant \|X\| \cdot \|Y\| \ .$$

a) Demostreu la desigualtat de Schwarz per a l'espai L^2, a partir de la desigualtat de Hölder (Problema **2.11**).
Nota: Al Lema 1 de la Proposició 2.2.21 hi tenim una demostració directa.
b) Aplicant la desigualtat de Schwarz, demostreu que $|\rho_{XY}| \leqslant 1$.
c) Comproveu que si X i Y són independents, aleshores $\rho_{XY} = 0$.
d) Demostreu que $|\rho| = 1 \iff Y = aX + b$, per certes constants a i b.
Idea: Demostreu primer que la desigualtat de Schwarz és una igualtat si i només si els vectors X i Y són linealment dependents.

3.6 *Fórmula de Bayes.* Sabem que malalties diferents poden presentar els mateixos símptomes. Sigui H un conjunt particular de símptomes que només poden ser provocats per tres malalties diferents, A, B i C, mútuament excloents. Uns estudis estadístics ens demostren que el 10 per mil de la població té la malaltia A, que el 0.5 per mil té la B, i que el 2 per mil té la C. Desenvolupen els símptomes H un 70% dels malalts que tenen la A, un 90% dels que tenen la B i un 60% dels que tenen la C. Quina probabilitat hi ha que un malalt que presenta aquests símptomes H tingui la malaltia A?

3.7 Sigui $(\Omega_1, \mathfrak{F}_1, \mu)$ un espai de mesura, amb μ σ-finita, $(\Omega_2, \mathfrak{F}_2)$ un altre espai mesurable i $\tau\colon \Omega_1 \times \mathfrak{F}_2 \longrightarrow [0, +\infty]$ una mesura de transició tal que $\{\tau(\omega_1, \cdot)\}_{\omega_1 \in \Omega_1}$ és uniformement σ-finita, i ν la mesura en $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2)$ construïda en el Teorema de la Mesura Producte.
a) Comproveu que la fórmula

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} X \, d\nu = \int_{\Omega_1} \Big(\int_{\Omega_2} X(\omega_1, \omega_2)\, \tau(\omega_1, d\omega_2) \Big)\, \mu(d\omega_1) \tag{3.5.1}$$

és vàlida per a tota funció mesurable $X\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ positiva.
b) Demostreu el *Criteri d'Integrabilitat de Tonelli–Hobson:* Si $X\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ és una funció mesurable tal que

$$\int_{\Omega_1} \Big(\int_{\Omega_2} |X(\omega_1, \omega_2)|\, \tau(\omega_1, d\omega_2) \Big)\, \mu(d\omega_1) < +\infty \ , \tag{3.5.2}$$

aleshores X és integrable respecte ν i és vàlida la fórmula (3.5.1).
c) Comproveu mitjançant un contraexemple que si treiem el valor absolut de (3.5.2) la conclusió no és vàlida.

3.8 Sigui $\nu = \mu \times \cdots \times \mu_n$ una mesura producte en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$.
Sigui $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un vector aleatori, $X = (X_1, \ldots, X_n)$.
a) Demostreu que si la llei de X és absolutament contínua respecte ν, aleshores la llei marginal de X_i és absolutament contínua respecte μ_i, i doneu una expressió de la densitat.
b) Comproveu amb un contraexemple que el fet que la llei marginal de X_i sigui absolutament contínua respecte μ_i, per a tot $i = 1, \ldots, n$, no implica que la llei de X sigui absolutament contínua respecte ν.
c) Suposem que $X_1, \ldots, X_n$ tenen lleis absolutament contínues respecte $\mu_1, \ldots, \mu_n$, respectivament, amb densitats $f_{X_1}, \ldots, f_{X_n}$.
Demostreu que $X_1, \ldots, X_n$ són independents sii la llei conjunta és absolutament contínua amb densitat

$$f_X(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(x_n)$$

respecte la mesura ν.

3.9 Agafem un nombre completament a l'atzar X de l'interval $[0,1]$. Fixat X, escollim un nombre Y completament a l'atzar de l'interval $[X,1]$. ("Completament a l'atzar" és una manera de dir "seguint una llei uniforme".)
a) Determineu la llei conjunta de les variables aleatòries X i Y.
b) Calculeu la llei marginal de Y en el vector (X,Y).
c) Calculeu el valor mitjà (i.e. l'esperança) de XY.
d) Trobeu la llei de X condicionada per Y.

3.10 Sigui X una variable aleatòria tal que $P\{X=n\}=\frac{1}{2^n}$, per $n \geqslant 1$.
Sigui Y una variable que té una llei condicionada per l'esdeveniment $\{X=n\}$ de densitat $n(1-y)^{n-1}\cdot \mathbf{1}_{[0,1]}(y)$ respecte la mesura de Lebesgue.
a) Calculeu $\mathrm{E}[(X+1)Y]$.
b) Trobeu la llei de Y.
c) Trobeu la llei de X condicionada per Y.

3.11 Considerem dues variables aleatòries X i Y amb llei conjunta donada per la funció de densitat respecte la mesura de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y)=3x\cdot \mathbf{1}_D(x,y)\ ,$$

on D és el triangle de vèrtexs $(0,0)$, $(1,0)$ i $(1,1)$.
a) Trobeu les lleis marginals de X i de Y. Calculeu $\mathrm{E}\left[e^Y/_{X=x}\right]$ per $x\in\ ]0,1[$.
b) Trobeu un altre vector aleatori (X',Y') que tingui les mateixes lleis marginals que (X,Y) però diferent llei conjunta.
c) Trobeu la funció de densitat de la variable aleatòria $Z=Y-X$. Calculeu $\mathrm{E}[Z]$.

3.12 Siguin X, Y, Z, tres variables aleatòries tals que:
1) $X\sim \mathrm{Unif}([0,1])$.
2) Y té una densitat condicionada per X donada per

$$f_{Y_{|X=x}}(y)=(y-x)e^{-(y-x)}\cdot \mathbf{1}_{]x,+\infty[)}(y),\quad \text{si } x\in[0,1]\ .$$

3) Z té una densitat condicionada per (X,Y) donada per

$$f_{Z_{|X=x,Y=y}}(z)=(y-x)e^{-z(y-x)}\cdot \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(z),\quad \text{si } x\in[0,1]\ \text{ i }\ y>x\ .$$

a) Trobeu la llei del vector (X,Y,Z).
b) Trobeu la llei de Z.
c) Trobeu la llei (X,Y) condicionada per Z.
d) Calculeu $\mathrm{E}\left[\sqrt{Y-X}/_{Z=z}\right]$ i $\mathrm{E}\left[\sqrt{Y-X}\right]$.

4. Successions de variables aleatòries

4.1 Desigualtat de Txebixev i lemes de Borel–Cantelli

Establim en aquest apartat uns resultats preliminars útils per a l'estudi de la convergència de successions de variables aleatòries.

4.1.1 Proposició (Desigualtat de Txebixev)

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espai de probabilitat.
Sigui $X\colon \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ una variable aleatòria.
Sigui $f\colon \bar{\mathbb{R}} \longrightarrow [0, +\infty]$ una funció creixent.
Sigui $a \in \bar{\mathbb{R}}$ tal que $0 < f(a) < +\infty$.
Aleshores,

$$P(\{X \geqslant a\}) \leqslant \frac{\mathrm{E}[f(X)]}{f(a)} \ .$$

Demostració:

$$f(a) \cdot \mathbf{1}_{\{X \geqslant a\}} \leqslant f(X) \ .$$

Prenent esperances,

$$f(a)P(\{X \geqslant a\}) \leqslant \mathrm{E}[f(X)] \ .$$

4.1.2 Corol·lari

Són casos particulars de la Desigualtat de Txebixev els següents:

1) Si $p \geqslant 0$ i $a > 0$,

$$P(\{|X| \geqslant a\}) \leqslant \frac{\mathrm{E}[|X|^p]}{a^p} \ .$$

2) Si $\mathrm{E}[X]$ existeix i $a > 0$,

$$P(\{|X - \mathrm{E}[X]| \geqslant a\}) \leqslant \frac{\mathrm{Var}[X]}{a^2} \ .$$

De vegades el nom de Desigualtat de Txebixev s'aplica només a aquesta última.

4.1.3 Proposició (1r Lema de Borel–Cantelli)

Sigui $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió qualsevol d'esdeveniments.
Aleshores, es té la implicació

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty \Rightarrow P(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = 0 \ .$$

Demostració:

$$P\big(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n\big) = P\big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\big) \stackrel{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} P\big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\big) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0 \ .$$

(1) La successió $\big\{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ és decreixent.

4.1.4 Exercici

Tant la desigualtat de Txebixev com el 1r Lema de Borel–Cantelli valen per a mesures qualssevol, no necessàriament probabilitats.

4.1.5 Proposició (2n Lema de Borel–Cantelli)

Sigui $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió d'esdeveniments independents.
Aleshores es té la implicació

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty \Rightarrow P\big(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n\big) = 1 \ .$$

Demostració:

$$P\big(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n\big) = 1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} P\big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\big) = 0 \Leftarrow P\big(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\big) = 0, \ \forall n \ .$$

Veurem això últim: Per a tot $m \in \mathbb{N}$,

$$P\big(\bigcap_{k=n}^{n+m} A_k^c\big) \stackrel{(2)}{=} \prod_{k=n}^{n+m} (1 - P(A_k)) \stackrel{(3)}{\leqslant} \prod_{k=n}^{n+m} e^{-P(A_k)} = \exp\Big\{ -\sum_{k=n}^{n+m} P(A_k)\Big\} \ .$$

Fent $m \to \infty$,

$$P\big(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\big) = 0 \ .$$

(1) Passant al complementari. Recordem que $\big(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n\big)^c = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n^c$ (vegeu el Problema **1.18**).

(2) Per la independència.

(3) Usem la desigualtat $1 - x \leqslant e^{-x}$.

4.2 Convergència quasi segura, en probabilitat i en L^p

Suposarem ara i fins al final del capítol que les variables aleatòries X amb què tractem estan totes definides en un mateix espai $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Suposarem també que compleixen $P(\{X \in \{-\infty, +\infty\}\}) = 0$ (o podem pensar directament que prenen valors a $\mathbb{R}$, sense que res no canviï). Recordem que al considerar les variables com a elements dels espais $L^0(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ o $L^p(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, $p \geqslant 1$, dues variables aleatòries iguals quasi segur queden identificades.

En parlar de successions de variables aleatòries hi ha diverses definicions naturals de convergència a considerar. Establirem primer les definicions i veurem després com es relacionen entre si.

4.2.1 Definicions

Una successió $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aleatòries *convergeix quasi segur* a una variable aleatòria X sii

$$P\big(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}\big) = 1 \ .$$

És a dir, sii per a tot ω llevat d'un conjunt de probabilitat zero, el límit de la successió numèrica $\{X_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$ existeix i val $X(\omega)$.
Ho abreviarem $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{q.s.}} X$.
La successió $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és *de Cauchy quasi segur* sii

$$P\big(\{\omega \in \Omega : \ \{X_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ és de Cauchy}\}\big) = 1 \ .$$

4.2.2 Observacions

1) La variable límit és única com a element de $L^0(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. És conseqüència de la unicitat del límit de successions numèriques.
2) $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix q.s. sii és de Cauchy q.s. També és conseqüència de la propietat corresponent per a succesions numèriques.
3) La definició de la convergència quasi segura encara té sentit per a variables $X_n \colon \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ generals. Però no podem parlar de successions de Cauchy si no definim primer una distància en $\bar{\mathbb{R}}$.

4.2.3 Definicions

Una successió $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aleatòries *convergeix en probabilitat* a una variable aleatòria X sii

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} P\big(\{|X_n - X| > \varepsilon\}\big) = 0 \ .$$

Ho abreviarem $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{P}} X$.
La successió $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és *de Cauchy en probabilitat* sii

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n,m\to\infty} P\big(\{|X_n - X_m| > \varepsilon\}\big) = 0 \ .$$

Més explícitament, sii

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \ \exists n_0 : \ n, m \geqslant n_0 \Rightarrow P\big(\{|X_n - X_m| > \varepsilon\}\big) < \delta \ .$$

4.2.4 Observació

En L^0 es pot posar una distància d tal que els conceptes de successió convergent a X en probabilitat i successió de Cauchy en probabilitat són equivalents als corresponents de l'espai mètric (L^0, d). Concretament es pot prendre

$$d(X,Y) := \mathrm{E}\Big[\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\Big] \ . \tag{4.2.1}$$

Per tant, com en tot espai mètric, el límit és únic i tota successió convergent és de Cauchy. Veurem més endavant que és un espai mètric complet; és a dir, que tota successió de Cauchy és convergent.

4.2.5 Definició

Una successió $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$ de variables aleatòries amb moment d'ordre p finit ($p \geqslant 1$) *convergeix en* L^p a una variable aleatòria $X \in L^p$ sii convergeix a X en l'espai mètric L^p; o sigui, sii

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\big[|X_n - X|^p\big] = 0 \ .$$

Ho abreviarem $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} X$.

4.2.6 Observacions

1) Sabem que L^p és un espai mètric complet (vegeu l'Apartat 2.6). Per tant, hi ha unicitat del límit (com a element de L^p), i una successió és convergent sii és de Cauchy.
2) Si $p < q$, la convergència en L^q implica la convergència en L^p (l'argument és molt semblant al que cal utilitzar en el Problema **2.10**, *d*; es deixa com exercici). En altres paraules, la injecció $L^q \hookrightarrow L^p$ és contínua. $\square$

La relació entre els diversos tipus de convergència es pot resumir bàsicament amb l'esquema següent:

$$\text{q.s.} \Longrightarrow \mathrm{P} \Longleftarrow L^p$$

i no hi ha cap altre implicació, en general.

4.2.7 Teorema

1) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{q.s.}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} X$.

2) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} X \Rightarrow$ *Existeix una parcial* $\{X_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *tal que* $X_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{q.s.}} X$.

Demostració:
1)

$$\begin{aligned} X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{q.s.}} X &\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0,\ P\big(\varliminf_{n\to\infty} \{|X_n - X| \leqslant \varepsilon\}\big) = 1 \\ &\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0,\ P\big(\varlimsup_{n\to\infty} \{|X_n - X| > \varepsilon\}\big) = 0 \ . \end{aligned}$$

Ens interessaria convertir aquesta probabilitat d'un límit en límit de probabilitats. Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió qualsevol d'esdeveniments,

$$P\big(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\big) = P\big(\bigcap_n \bigcup_{m\geqslant n} A_m\big) = \lim_{n\to\infty} P\big(\bigcup_{m\geqslant n} A_m\big) \geqslant \lim_{n\to\infty} \sup_{m\geqslant n} P(A_m) = \varlimsup_{n\to\infty} P(A_n) \ .$$

Per tant, en el nostre cas, obtenim, per a cada $\varepsilon > 0$,

$$\varlimsup_{n\to\infty} P\big(\{|X_n - X| > \varepsilon\}\big) \leqslant P\big(\varlimsup_{n\to\infty} \{|X_n - X| > \varepsilon\}\big) = 0 \ ,$$

d'on

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} X \ .$$

(1) El límit inferior consisteix en els $\omega \in \Omega$ tals que $|X_n(\omega) - X(\omega)| \leqslant \varepsilon$ a partir d'un cert n. L'equivalència és, doncs, evident.

(2) Passant al complementari.

2) Per veure que existeix una successió parcial convergent quasi segur, usarem només el fet que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és de Cauchy en probabilitat:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n,m\to\infty} P\big(\{|X_n - X_m| > \varepsilon\}\big) = 0 \; .$$

Siguin $\sum\limits_{n\geqslant 1} \varepsilon_n$ i $\sum\limits_{n\geqslant 1} \delta_n$ dues sèries convergents de termes positius.
Considerem la següent successió estrictament creixent de naturals:

$$\begin{aligned} &\quad n_1 = 1; \\ &\text{per } k > 1, \\ &\quad n_k\text{: Primer natural} > n_{k-1} \text{ tal que } P\big(\{|X_n - X_m| > \varepsilon_k\}\big) < \delta_k,\ \forall n, m \geqslant n_k \; . \end{aligned}$$

La successió $\{X_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ serà la que busquem:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} P\big(\{|X_{n_{k+1}} - X_{n_k}| > \varepsilon_k\}\big) < \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < \infty \; , \\ &\overset{(1)}{\Rightarrow} P\big(\overline{\lim_{k\to\infty}}\{|X_{n_{k+1}} - X_{n_k}| > \varepsilon_k\}\big) = 0 \Rightarrow P\big(\lim_{k\to\infty}\{|X_{n_{k+1}} - X_{n_k}| \leqslant \varepsilon_k\}\big) = 1 \\ &\Rightarrow \big[P\text{-q.s. } \omega \in \Omega,\ \exists k_0(\omega):\ k \geqslant k_0(\omega) \Rightarrow |X_{n_{k+1}} - X_{n_k}| \leqslant \varepsilon_k\big] \\ &\Rightarrow \Big[P\text{-q.s. } \omega \in \Omega,\ \sum_{k\geqslant 1} \big(X_{n_{k+1}}(\omega) - X_{n_k}(\omega)\big) \text{ és convergent}\Big] \\ &\Rightarrow \Big[P\text{-q.s. } \omega \in \Omega, \\ &\qquad X_{n_k}(\omega) = X_1(\omega) + \sum_{\ell=1}^{k-1} \big(X_{n_{\ell+1}}(\omega) - X_{n_\ell}(\omega)\big) \text{ és una successió convergent}\Big] \; . \end{aligned}$$

Sabut que X_{n_k} convergeix q.s., el seu límit ha de coincidir amb X: Si Y és el límit, $X_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{P}} Y$, per *1)*, $X_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{P}} X$, per hipòtesi, i el límit en probabilitat és únic.

(1) Pel 1r Lema de Borel–Cantelli.

4.2.8 Observació

Contingut a la demostració anterior hi ha el següent fet, que té interès independent:
Si $\sum\limits_{n\geqslant 1} \varepsilon_n$ és una sèrie convergent de termes positius, i

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\big(\{|X_{n+1} - X_n| > \varepsilon_n\}\big) < \infty \; ,$$

aleshores $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix q.s.

4.2.9 Corol·lari

L'espai L^0, dotat de la convergència i les successions de Cauchy en probabilitat (o sigui, amb la distància d de (4.2.1)) és un espai mètric complet.

Demostració:
Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de Cauchy en probabilitat.
Sigui $\{X_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una parcial convergent quasi segur (recordeu que en la demostració del Teorema 4.2.7, *2)*, només hem utilitzat que la successió original és de Cauchy), i sigui X el seu límit.
Per a tots $n, k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P\big(\{|X_n - X| > \varepsilon\}\big) &\leqslant P\big(\{|X_n - X_{n_k}| + |X_{n_k} - X| > \varepsilon\}\big) \\ &\leqslant P\big(\{|X_n - X_{n_k}| > \tfrac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|X_{n_k} - X| > \tfrac{\varepsilon}{2}\}\big) \\ &\leqslant P\big(\{|X_n - X_{n_k}| > \tfrac{\varepsilon}{2}\}\big) + P\big(\{|X_{n_k} - X| > \tfrac{\varepsilon}{2}\}\big) \; . \end{aligned}$$

Els dos sumands són tan petits com es vulgui, agafant n i k prou grans, el primer perquè la successió original és de Cauchy, i el segon perquè la parcial convergeix a X quasi segur i per tant en probabilitat.

4.2.10 Teorema

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} X \ .$$

Demostració:
Aplicant la desigualtat de Txebixev,

$$P\big(\{|X_n - X| > \varepsilon\}\big) \leqslant \frac{\mathrm{E}\left[|X_n - X|^p\right]}{\varepsilon^p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \square$$

La convergència quasi segura i la convergència en L^p no tenen relació, en general. N'hi ha en una direcció si hi afegim una hipòtesi addicional.

4.2.11 Teorema

$$\left.\begin{array}{r} X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{q.s.}} X \\ |X_n| \leqslant Y,\ amb\ Y \in L^p\ (p \geqslant 1) \end{array}\right\} \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} X \ .$$

Demostració: Tenim que $|X_n - X|^p \xrightarrow[n\to\infty]{\text{q.s.}} 0$, i

$$|X_n - X|^p \leqslant \big(|X_n| + |X|\big)^p \leqslant 2^{p-1}\big(|X_n|^p + |X|^p\big) \leqslant 2^{p-1}\big(Y^p + |X|^p\big) \overset{(1)}{\leqslant} 2^p Y^p, \ \text{q.s.}$$

La funció Y^p és integrable per hipòtesi. Per tant, podem aplicar el Teorema de la Convergència Dominada, i obtenim

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left[|X_n - X|^p\right] = 0 \ .$$

(1) Perquè $Y \geqslant \lim_{n\to\infty} |X_n|^p = |X|^p$, q.s. $\square$

És possible definir, per a successions de funcions mesurables sobre un espai de mesura general $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$, les nocions de convergència quasi segura (que s'anomena aleshores *convergència quasi per tot*), convergència en probabilitat (que serà *convergència en mesura*), i convergència en L^p, de manera anàloga al cas de probabilitats. La majoria de resultats que hem vist continuen essent vàlids, però cal anar amb compte amb alguns. Per exemple, la convergència quasi per tot només implica la convergència en mesura si μ és finita.

4.3 Lleis dels grans nombres

L'expressió "Lleis dels grans nombres" (inventada per Siméon-Denis Poisson, 1781-1840) es refereix a la situació següent:
Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de variables aleatòries independents.
Sigui $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successió de sumes parcials de $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$S_n := X_1 + \cdots + X_n \ , \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

Ens demanem per la convergència en probabilitat o quasi segura de la successió $\{S_n/n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Resultats de convergència en probabilitat s'anomenen *Lleis Febles dels Grans*

Nombres; resultats de convergència quasi segura s'anomenen *Lleis Fortes dels Grans Nombres.*

Deixem de banda per un moment les matemàtiques i observem la situació real següent: considerem una circumstància A que pot produir-se o no en un cert experiment aleatori. Suposem que repetim indefinidament aquest experiment en idèntiques condicions. Sigui $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successió de nombres associada a una successió concreta d'experiments d'aquesta manera:

$$x_n := \begin{cases} 1, & \text{si s'ha produït } A \text{ a l'experiment } n\text{-èsim} \\ 0, & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

Aleshores, si $S_n = x_1 + \cdots + x_n$, el quocient S_n/n és la *freqüència relativa* de A en els primers n experiments.

Sembla intuïtiu que $\{S_n/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha de convergir a un cert nombre entre 0 i 1, relacionat intrínsecament amb l'experiment i la circumstància A, que hauria de ser la 'probabilitat' (en el sentit del llenguatge ordinari) que es realitzi A en un qualsevol dels experiments. Aquesta és l'anomenada *definició freqüentista* de la probabilitat:

$$P(A) := \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \,. \tag{4.3.1}$$

Construir una teoria matemàtica rigorosa sobre aquesta definició comporta considerables dificultats lògiques. Per exemple, cal començar concretant quin tipus de successions d'uns i zeros i quin tipus de circumstàncies A són l'objecte d'estudi.

En lloc d'intentar definir el concepte de probabilitat com una propietat física associada a certs "experiments" i "circumstàncies", el rus Andrei Kolmogorov (1933) va proposar prendre com a punt de partida la nostra Definició 1.1.10: una probabilitat és una mesura de massa total igual a 1. Això equival a *no definir* el concepte físic de probabilitat. Simplement s'agafen com a axiomes algunes de les propietats que ha de complir, i es dedueixen les altres a partir d'aquests axiomes, estrictament dins de l'àmbit de les matemàtiques. Aquesta "fonamentació buida" de la Probabilitat es coneix com *Teoria Axiomàtica.*

Matemàticament parlant, el planteig axiomàtic és plenament satisfactori. Així doncs, per nosaltres la 'probabilitat' no és una propietat relativa a certs fenòmens naturals, sinó un concepte purament abstracte, inexistent a la natura. El fet que es pugui aplicar o no a l'estudi de certs problemes reals és, com per a tota la matemàtica, una qüestió d'adequació del model formal a la realitat, qüestió sobre la qual la matemàtica no pot dir res.

A partir de la Teoria Axiomàtica, l'expressió (4.3.1) es dedueix com a teorema. No és una definició.

La convergència en probabilitat de les freqüències relatives al nombre $P(A)$ ja va ser enunciada pel suís Jakob Bernoulli, i publicada el 1713, després de la seva mort. Però ni l'enunciat ni la demostració van ser massa entesos fins que no se'ls ha col·locat dins de la Teoria Axiomàtica. Cal tenir en compte que Bernoulli no tenia ni el llenguatge ni la notació necessaris per escriure una fórmula tan simple com

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} P(A)$$

(vegeu l'Exercici 4.3.10).

Començarem amb l'enunciat d'una Llei Feble. Es diu que les variables aleatòries d'una família són *idènticament distribuïdes* sii tenen la mateixa llei. En particular, llurs moments són els mateixos, si existeixen.

4.3.1 Teorema (Llei Feble dels Grans Nombres)
Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successió de variables aleatòries de* L^2*, independents, idènticament distribuïdes.*
Notem $m := \mathrm{E}[X_i]$ *i* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$*, per* $n \in \mathbb{N}$.
Aleshores,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} m \ .$$

Demostració:

$$\mathrm{E}\Big[\big|\frac{S_n}{n} - m\big|^2\Big] = \frac{1}{n^2}\,\mathrm{E}\big[|S_n - nm|^2\big] = \frac{1}{n^2}\,\mathrm{Var}[S_n] = \frac{1}{n}\,\mathrm{Var}[X_1] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \square$$

El nostre objectiu és enunciar i demostrar una Llei Forta dels Grans Nombres (Teorema 4.3.9). La demostració és llarga i utilitza un seguit d'ingredients que tenen interès en si mateixos. Els estudiarem prèviament anomenant-los 'lemes'.

4.3.2 Lema (Desigualtat de Kolmogorov)
Siguin $X_1, \dots, X_n$ *variables aleatòries de* L^2*, independents, tals que* $\mathrm{E}[X_i] = 0$, $\forall i = 1, \dots, n$.
Sigui $S_k := X_1 + \cdots + X_k$*, per* $k = 1, \dots, n$.
Aleshores,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P\big(\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| > \varepsilon\}\big) \leqslant \frac{\mathrm{Var}[S_n]}{\varepsilon^2} \ .$$

Demostració: Notem

$$\begin{aligned} A_k &:= \big\{|S_k| > \varepsilon;\ |S_j| \leqslant \varepsilon,\ \text{per } 1 \leqslant j < k\big\}, \quad k = 1, \dots, n \ , \\ A &:= \big\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| > \varepsilon\big\} \ . \end{aligned}$$

Tenim que $A = A_1 \uplus \cdots \uplus A_n$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[S_n] &\overset{(1)}{=} \int_\Omega S_n^2\, dP \geqslant \int_A S_n^2\, dP = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} S_n^2\, dP \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{A_k} \big[S_k + (S_n - S_k)\big]^2\, dP \geqslant \sum_{k=1}^n \int_{A_k} S_k^2\, dP + \sum_{k=1}^n \int_{A_k} 2S_k(S_n - S_k)\, dP \\ &\geqslant \varepsilon^2 \sum_{k=1}^n P(A_k) + 2\sum_{k=1}^n \mathrm{E}\big[S_k \cdot \mathbf{1}_{A_k} \cdot (S_n - S_k)\big] \\ &\overset{(2)}{=} \varepsilon^2 P(A) + 2\sum_{k=1}^n \mathrm{E}[S_k \cdot \mathbf{1}_{A_k}] \cdot \mathrm{E}[S_n - S_k] \overset{(3)}{=} \varepsilon^2 P(A) \ . \end{aligned}$$

(1) Usant que l'esperança de S_n és zero, la variància coincideix amb el moment de segon ordre.
(2) $S_k \cdot \mathbf{1}_{A_k}$ i $S_n - S_k$ són funció, respectivament, de $(X_1, \dots, X_k)$ i $(X_{k+1}, \dots, X_n)$, que són vectors independents. Per tant, per la Proposició 3.3.10, 1, $S_k \cdot \mathbf{1}_{A_k}$ i $S_n - S_k$ són variables aleatòries independents.
(3) La segona esperança és zero, perquè totes les X_i tenen esperança zero.

4.3.3 Observació

Quan $n = 1$, obtenim com a cas particular la desigualtat de Txebixev (Proposició 4.1.1) amb $f(a) = a^2$.

4.3.4 Lema (Criteri de convergència q.s. de sèries)

Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de variables aleatòries de L^2, independents, tals que:

1) $\mathrm{E}[X_n] = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}[X_n] < \infty$.

Aleshores, $\sum_{n\geqslant 1} X_n$ *convergeix quasi segur.*

Demostració:
Notem, com abans, $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$. Per a cada $m \in \mathbb{N}$,

$$P\big(\{\sup_{k\in\mathbb{N}} |S_{m+k} - S_m| > \varepsilon\}\big) \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} P\big(\{\sup_{1\leqslant k\leqslant n} |S_{m+k} - S_m| > \varepsilon\}\big)$$

$$\overset{(2)}{\leqslant} \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Var}[S_{m+n} - S_m]}{\varepsilon^2} \overset{(3)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=m+1}^{m+n} \mathrm{Var}[X_k] = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=m+1}^{\infty} \mathrm{Var}[X_k] \ .$$

Fent $m \to \infty$, obtenim

$$\begin{aligned} &\sup_{k\in\mathbb{N}} |S_{m+k} - S_m| \xrightarrow[m\to\infty]{\mathrm{P}} 0 \ , \\ &\Rightarrow \sup_{k\in\mathbb{N}} |S_{m_i+k} - S_{m_i}| \xrightarrow[i\to\infty]{\text{q.s.}} 0 \ , \quad \text{per certa parcial } \{S_{m_i}\}_{i\in\mathbb{N}} \ , \qquad (4.3.2) \\ &\overset{(4)}{\Leftrightarrow} \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ és de Cauchy q.s. (i per tant convergent q.s.)} \end{aligned}$$

(1) Apliquem la continuïtat de les probabilitats sobre successions creixents.
(2) Apliquem la Desigualtat de Kolmogorov.
(3) Per la independència de les variables involucrades.
(4) (4.3.2) es pot escriure: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists m_i$: $p \geqslant m_i \Rightarrow |S_p - S_{m_i}| < \varepsilon$, és a dir, $\forall p, q \geqslant m_i$, $|S_p - S_q| < 2\varepsilon$, i per tant $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és de Cauchy. □

El següent és un enunciat sobre sèries de nombres reals. No hi ha cap probabilitat involucrada.

4.3.5 Lema de Kronecker

Sigui $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successió de nombres reals.
Sigui $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successió creixent de nombres reals positius amb límit $+\infty$.
Suposem que la sèrie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x_n}{a_n}$ és convergent.
Aleshores,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \ .$$

Demostració: Definim $a_0 = 0$, b_0=0, i $b_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{a_i}$, per $n \geqslant 1$. Tindrem

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} x_k \overset{(1)}{=} \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} a_k(b_k - b_{k-1}) \overset{(2)}{=} b_n - \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n-1} b_k(a_{k+1} - a_k) \ .$$

Abreviem $b_\infty := \lim_{n\to\infty} b_n$. El que volem veure és que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k=0}^{n-1} b_k(a_{k+1}-a_k) = b_\infty \ .$$

Per qualssevol $m < n$,

$$\begin{aligned} \Big|\frac{1}{a_n}\sum_{k=0}^{n-1} b_k(a_{k+1}-a_k) - b_\infty\Big| &\overset{(3)}{=} \Big|\frac{1}{a_n}\sum_{k=0}^{n-1}(b_k-b_\infty)(a_{k+1}-a_k)\Big| \\ \leqslant \frac{1}{a_n}\Big|\sum_{k=0}^{m-1}(b_k-b_\infty)(a_{k+1}-a_k)\Big| &+ \frac{1}{a_n}\Big|\sum_{k=m}^{n-1}(b_k-b_\infty)(a_{k+1}-a_k)\Big| \ . \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

Fixem $\varepsilon > 0$. Fixem $m \in \mathbb{N}$ tal que $|b_k - b_\infty| < \varepsilon$, $\forall k \geqslant m$.
Prenent límits superiors en (4.3.3), el primer sumand tendeix clarament a zero. Per tant,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \Big|\frac{1}{a_n}\sum_{k=0}^{n-1} b_k(a_{k+1}-a_k) - b_\infty\Big| \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\varepsilon}{a_n}\sum_{k=m}^{n-1}(a_{k+1}-a_k) = \varepsilon \ .$$

Fent ara $\varepsilon \to 0$, hem acabat.

(1) Es dedueix de les notacions tot just introduïdes.

(2) Gràcies a la fórmula de sumació parcial d'Abel (que no és més que una fórmula d'integració per parts per a sèries).

(3) Utilitzem que, trivialment, $\frac{1}{a_n}\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k) = 1$.

4.3.6 Lema (Llei Forta per a variables de L^2)

Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de variables aleatòries de L^2, independents, amb $\mathrm{E}[X_n] = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Sigui $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$.
Sigui $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successió creixent de nombres reals positius amb límit $+\infty$.
Suposem que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}[X_n]}{a_n^2} < \infty$.
Aleshores,

$$\frac{S_n}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{q.s.}} 0 \ .$$

Demostració:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}\Big[\frac{X_n}{a_n}\Big] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Var}[X_n]}{a_n^2} < \infty \\ &\overset{(1)}{\Rightarrow} \sum_{n\geqslant 1}\frac{X_n}{a_n} \text{ convergeix q.s.} \\ &\overset{(2)}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} X_k = 0, \text{ q.s.} \end{aligned}$$

(1) Apliquem el criteri de convergència quasi segura de sèries (Lema 4.3.4.)

(2) Apliquem el Lema de Kronecker (Lema 4.3.5).

4.3.7 Corol·lari

Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successió de variables aleatòries de* L^2*, independents, idènticament distribuïdes.*
Notem $m := \mathrm{E}[X_i]$ *i* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$*,* $n \in \mathbb{N}$*.*
Aleshores,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{q.s.}} m \ .$$

Demostració: Aplicarem el Lema 4.3.6 a les variables $Y_n := X_n - m$ i la successió $a_n := n$.
Sigui $\sigma^2 := \mathrm{Var}[Y_i] = \mathrm{Var}[X_i]$.
Es compleixen les hipòtesis: $\mathrm{E}[Y_n] = 0$, $\forall n$, i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}[Y_n]}{n^2} = \sigma^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \ .$$

Per tant,

$$\frac{S_n}{n} - m = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - m)}{n} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ .$$

4.3.8 Lema (Criteri d'integrabilitat de variables aleatòries)

Per a tota variable aleatòria X*, es compleix*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\big(\{|X| \geqslant n\}\big) \leqslant \mathrm{E}[|X|] \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P\big(\{|X| \geqslant n\}\big) \ .$$

En particular,

$$X \text{ és integrable} \Leftrightarrow \sum_{n\geqslant 1} P\big(\{|X| \geqslant n\}\big) \text{ convergeix.}$$

Demostració:
1) Primera desigualtat:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} P\big(\{|X| \geqslant n\}\big) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} P\big(\{k \leqslant |X| < k+1\}\big) \overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} P\big(\{k \leqslant |X| < k+1\}\big) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P\big(\{k \leqslant |X| < k+1\}\big) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{k\leqslant|X|<k+1\}} |X|\, dP \\
&= \int_{\Omega} |X|\, dP = \mathrm{E}[|X|] \ .
\end{aligned}$$

(1) Podem intercanviar segur l'ordre de sumació perquè els termes de la sèrie són positius (això no és més que el Teorema de Fubini aplicat a sèries, o sigui, a la mesura comptadora de naturals).

2) Segona desigualtat:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[|X|] &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{k\leqslant|X|<k+1\}} |X|\, dP \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot P\big(\{k \leqslant |X| < k+1\}\big) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P\big(\{k \leqslant |X| < k+1\}\big) + \sum_{k=0}^{\infty} P\big(\{k \leqslant |X| < k+1\}\big) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P\big(\{|X| \geqslant k\}\big) + 1 \ .
\end{aligned}$$

4.3.9 Teorema (Llei Forta dels Grans Nombres)

Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de variables aleatòries independents, idènticament distribuïdes.
Aleshores:

1) $\mathrm{E}[|X_i|] < \infty \Rightarrow \dfrac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{q.s.}} m = \mathrm{E}[X_i]$.

2) $\mathrm{E}[|X_i|] = \infty \Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} \dfrac{|S_n|}{n} = +\infty$ *q.s.*

Demostració:
1) Definim $Y_n := X_n \cdot \mathbf{1}_{\{|X_n|<n\}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, i escrivim

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_i) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mathrm{E}[Y_i]) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}[Y_i] \ .$$

Vegem que, quan $n \to \infty$, els dos primers sumands tenen límit 0 quasi segur, i que el tercer té límit m:

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\big(\{X_n \neq Y_n\}\big) = \sum_{n=1}^{\infty} P\big(\{|X_n| \geqslant n\}\big) \overset{(1)}{\leqslant} \mathrm{E}[|X_1|] < \infty$$
$$\overset{(2)}{\Rightarrow} P\big(\overline{\lim_{n\to\infty}}\{X_n \neq Y_n\}\big) = 0 \Rightarrow P\big(\underline{\lim_{n\to\infty}}\{X_n = Y_n\}\big) = 1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_i) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{q.s.}} 0 \ .$$

(1) Apliquem el Lema 4.3.8. Donat que les variables X_n són idènticament distribuïdes, podem posar X_1 en lloc de X_n, per exemple. Això ho apliquem repetidament a la resta de la demostració.

(2) Pel 1r Lema de Borel–Cantelli.

b) Serà conseqüencia del Lema 4.3.6. Comprovem que es pot aplicar:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Var}\big[Y_n - \mathrm{E}[Y_n]\big]}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Var}[Y_n]}{n^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{E}[Y_n^2]}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,\mathrm{E}[X_n^2 \cdot \mathbf{1}_{\{|X_n|<n\}}]$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}[X_1^2 \cdot \mathbf{1}_{\{k-1\leqslant|X_1|<k\}}]$$
$$\overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{E}[X_1^2 \cdot \mathbf{1}_{\{k-1\leqslant|X_1|<k\}}]\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$
$$\overset{(2)}{\leqslant} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mathrm{E}[|X_1| \cdot \mathbf{1}_{\{k-1\leqslant|X_1|<k\}}] \cdot \frac{2}{k} \overset{(3)}{=} 2\,\mathrm{E}[|X_1|] < \infty \ .$$

(1) Podem intercanviar l'ordre de sumació perquè tots els termes són positius (Teorema de Fubini, Observació 3.2.4, 2), per a mesures comptadores de naturals.)

(2) Fem l'acotació següent:

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{k^2} + \int_k^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k} \leqslant \frac{2}{k} \ .$$

(3) Pel Teorema de la Convergència Dominada o el de Convergència Monòtona, a voluntad.

c)

$$\mathrm{E}[Y_n] = \mathrm{E}[X_n \cdot \mathbf{1}_{\{|X_n|<n\}}] = \mathrm{E}[X_1 \cdot \mathbf{1}_{\{|X_1|<n\}}] \xrightarrow[n\to\infty]{(1)} \mathrm{E}[X_1] = m$$
$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[Y_i] \xrightarrow[n\to\infty]{} m \ .$$

(1) Pel Teorema de la Convergència Dominada ($|X_1|$ domina la successió.)

(2) Pel Criteri de la Mitjana Aritmètica de convergència de successions de nombres reals.

2) Fixem $K \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\Big(\Big\{\frac{|X_n|}{n} \geqslant K\Big\}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} P\Big(\Big\{\frac{|X_1|}{K} \geqslant n\Big\}\Big) \overset{(1)}{\geqslant} \frac{\mathrm{E}[|X_1|]}{K} - 1 = +\infty$$
$$\overset{(2)}{\Rightarrow} P\Big(\overline{\lim_{n\to\infty}} \Big\{\frac{|X_n|}{n} \geqslant K\Big\}\Big) = 1 \ .$$

Donat que la intersecció numerable d'esdeveniments de probabilitat 1 té probabilitat 1, obtenim $P(A) = 1$, essent

$$A := \bigcap_{K=1}^{\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \Big\{\frac{|X_n|}{n} \geqslant K\Big\} \ .$$

En paraules, A és el conjunt de $\omega \in \Omega$ tals que, per a cada $K \in \mathbb{N}$, existeixen infinits $n \in \mathbb{N}$ complint $\frac{|X_n(\omega)|}{n} \geqslant K$.
On posa $|X_n|$ podem posar $|S_n|$, perquè:

$$K \leqslant \frac{|X_n|}{n} = \frac{|S_n - S_{n-1}|}{n} < \frac{|S_n|}{n} + \frac{|S_{n-1}|}{n-1} \Rightarrow \frac{|S_n|}{n} \geqslant \frac{K}{2} \quad \text{o} \quad \frac{|S_{n-1}|}{n-1} \geqslant \frac{K}{2} \ .$$

En conclusió,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|S_n(\omega)|}{n} = +\infty, \quad \forall\omega \text{ d'un conjunt de probabilitat 1.}$$

(1) Apliquem el Lema 4.3.8.

(2) Pel 2n Lema de Borel–Cantelli.

4.3.10 Exercici (per a lectors fanàtics de les v.o.)

Traduïu i interpreteu el text següent (Llei Feble dels Grans Nombres):

Ut circumlocutionis taedium vitem, vocabo casus illos, quibus eventus quidam contingere potest, foecundos seu fertiles; & steriles illos, quibus idem eventus potest non contingere: nec non experimenta foecunda sive fertilia illa, quibus aliquis casuum fertilium evenire depreher ditur; & infoecunda sive sterilia, quibus sterilium aliquis contingere observatur. Sit igitur numerus casuum fertilium ad numerum sterilium vel praecisè vel proximè in ratione r/s, adeoque ad numerum omnium in ratione $r/(r+s)$ seu r/t, quam rationem terminent limites $(r+1)/t$ & $(r-1)/t$. Ostendendum est, tot posse capi experimenta, ut datis quotlibet (puta c) vicibus versimilius evadat, numerum fertilium observationum intra hos limites quàm extra casurum esse, h. e. numerum fertilium ad numerum omnium observationum rationem habiturum nec majorem quàm $(r+1)/t$, nec minorem quâm $(r-1)/t$.

Jakob Bernoulli, Ars Conjectandi, 1713.

4.4 Problemes

4.1 Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de variables aleatòries independents tals que $P\{X_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n}$ i $P\{X_n = 1\} = \frac{1}{n}$. Demostreu que:
a) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0$.
b) $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no convergeix q.s.
c) La parcial $\{X_{k^2}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergeix q.s.

4.2 El problema anterior proporciona un exemple de convergència en probabilitat que no és quasi segura. Comproveu amb els següents exemples que no hi ha relació entre la convergència en L^p i la convergència quasi segura:
a) A l'espai de probabilitat $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \mu)$, amb $\mu = \mathrm{Unif}([0,1])$, considereu les variables aleatòries $X_n(\omega) = e^n \cdot \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(\omega)$. La successió $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix q.s. però no convergeix en cap espai L^p.
b) Considereu el mateix espai de probabilitat anterior, i les variables aleatòries $X_n(\omega) = \mathbf{1}_{[q2^{-p},(q+1)2^{-p}]}(\omega)$, on p i q són els únics naturals tals que $n = 2^p + q, p > 0, 0 \leqslant q < 2^p$. La successió $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix en tots els L^p, però no convergeix q.s.
De fet, aquest constitueix un altre exemple de successió que convergeix en probabilitat però no q.s.

4.3 Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de variables aleatòries definides sobre un espai de probabilitat $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, complint

$$P\{X_n = n\} = \frac{1}{n^2} \qquad \text{i} \qquad P\{X_n = \frac{1}{n}\} = 1 - \frac{1}{n^2} \ , \quad \forall n \geqslant 1.$$

Estudieu la convergència en probabilitat, quasi segura i en L^2 d'aquesta successió.

4.4 Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de variables aleatòries independents.
Demostreu que si $\overline{\lim_{n\to\infty}} \dfrac{|X_n|}{n} < 1$ q.s., aleshores $\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| > n\} < +\infty$.

4.5 En la situació del problema anterior:
a) Demostreu que el recíproc és cert si imposem a més que les variables siguin idènticament distribuïdes.
Idea: Useu el criteri d'integrabilitat de variables aleatòries del Lema 4.3.8.
b) Doneu un exemple que mostri que sense cap més hipòtesi addicional el recíproc no és cert.

4.6 Siguin $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dues successions de variables aleatòries tals que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} X$ i $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} Y$, per certes variables aleatòries X i Y. Sigui $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funció contínua.
Demostreu que $g(X_n, Y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} g(X, Y)$.

4.7 Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes, seguint una llei amb funció de densitat respecte la mesura de Lebesgue

$$f(x) = 2ax\, e^{-ax^2} \cdot \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x) \ ,$$

on $a > 0$.
Demostreu que

$$P\Big(\big\{ \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{X_n^2}{\log n} = a^{-1} \big\}\Big) = 1 \ .$$

Idea: Deduïu el resultat a partir de

$$P\Big(\varlimsup_{n\to\infty}\big\{\frac{X_n^2}{\log n}\geqslant a^{-1}\big\}\Big)=1 \qquad \text{i} \qquad P\Big(\lim_{n\to\infty}\big\{\frac{X_n^2}{\log n}\leqslant a^{-1}\big\}\Big)=1 \ .$$

Per demostrar la segona igualtat, reduïu-la a la condició equivalent

$$P\Big(\varlimsup_{n\to\infty}\big\{\frac{X_n^2}{\log n}\geqslant ca^{-1}\big\}\Big)=0\ , \quad \forall c>1\ .$$

4.8 Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de variables aleatòries independents, totes elles amb llei *exponencial de paràmetre 1:* és a dir, amb densitat respecte la mesura de Lebesgue

$$f(x)=e^{-x}\cdot\mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)\ .$$

a) Comproveu que, per a tot $\alpha>0$,

$$P\big(\{X_n>\alpha\log n\}\big)=n^{-\alpha}\ .$$

b) Demostreu que

$$P\big(\varlimsup_{n\to\infty}\{X_n>\alpha\log n\}\big)=\begin{cases}0, & \text{si } \alpha>1\\ 1, & \text{si } \alpha\leqslant 1\ .\end{cases}$$

c) Sigui $L=\varlimsup_{n\to\infty}\dfrac{X_n}{\log n}$. Demostreu que $L=1$ quasi segur.

4.9 Per a cada nombre real $\omega\in[0,1[$, sigui $X_n(\omega)$ la n-èsima xifra en el desenvolupament decimal de ω. (O sigui, $\omega=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(\omega)\cdot 10^{-n}$).
a) Comproveu que en l'espai de probabilitat $([0,1[,\mathfrak{B}([0,1[),\mathrm{Unif}([0,1[))$ la família de variables $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és independent i idènticament distribuïda.
b) Direm que un nombre $\omega\in[0,1[$ és *normal* si la freqüència relativa amb què el dígit k apareix en les seves primeres n xifres decimals tendeix a $1/10$ quan $n\to\infty$, per a cada $k\in\{0,1,2,\dots,9\}$. (És a dir, parlant informalment, si, a la llarga, tots els dígits apareixen en la mateixa proporció.)
Demostreu que tot nombre en $[0,1[$ és normal quasi segur, respecte la mesura de Lebesgue en $[0,1[$ (o sigui, respecte la probabilitat $\mathrm{Unif}([0,1[)$.)
Idea: Considereu les variables aleatòries $X_n^{(k)}(\omega)=\mathbf{1}_{\{X_n=k\}}(\omega)$ (Són variables que prenen el valor 1 si la n-èsima xifra decimal de ω és k, i zero en cas contrari.) Utilitzeu la Llei Forta dels Grans Nombres.

4.10 Siguin ν i μ dues mesures sobre un espai mesurable qualsevol $(\Omega,\mathfrak{F})$.
a) Demostreu que la condició

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 \text{ tal que } \forall A\in\mathfrak{F},\ \mu(A)<\delta\Rightarrow\nu(A)<\varepsilon$$

implica que ν és absolutament contínua respecte μ.
b) Demostreu que si ν és una mesura finita, aleshores és cert també el recíproc de la implicació anterior.
Idea: Useu el 1r Lema de Borel–Cantelli, que és vàlid per a mesures arbitràries, segons l'Exercici 4.1.4.
c) Doneu un exemple, amb ν infinita (però σ-finita) que mostri que el recíproc no és cert si traiem la condició de finitud de ν.

4.11 Demostreu la generalització següent del Teorema 4.3.1 (Llei Feble dels Grans Nombres per a variables de L^2):
Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de variables aleatòries de L^2, independents, amb variàncies uniformement acotades per una certa constant M:

$$\operatorname{Var}[X_n] \leqslant M < +\infty, \quad \forall n \ .$$

Sigui $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$.
Aleshores,

$$\frac{S_n - \mathrm{E}[S_n]}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} 0 \ .$$

5. Successions de probabilitats i funcions característiques

5.1 Convergència feble de probabilitats

Volem definir un concepte de convergència per a successions de probabilitats $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ o, més en general, en $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$. Sembla natural establir que $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu$ si

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(B) = \mu(B) \ , \quad \forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) \ ,$$

però aquesta exigència resulta ser massa forta i no és útil.

5.1.1 Definició

Diem que una successió de probabilitats $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$ *convergeix feblement* a una probabilitat μ sii per a tota funció $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínua i acotada,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu \ .$$

Ho abreviarem $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \mu$. □

La convergència feble té una caracterització fàcil en termes de funcions de distribució. L'estudiarem només en el cas real, però és vàlida també en $\mathbb{R}^n$.

5.1.2 Teorema

Sigui $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de probabilitats en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$, amb funcions de distribució associades $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Sigui μ una probabilitat amb funció de distribució F.
Aleshores,

$$\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \mu \Leftrightarrow F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x) \ \forall x \text{ punt de continuïtat de } F.$$

Demostració:
$\Rightarrow$) Sigui $x \in \mathbb{R}$ tal que F és contínua en x.

$$F_n(x) = \mu_n(]-\infty, x]) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{]-\infty,x]}(y) \, \mu_n(dy) \ .$$

L'integrand no és una funció contínua de y, i per tant no podem aplicar aquí la hipòtesi directament. L'aproximarem inferiorment i superiorment per funcions contínues.
Per qualsevol $\varepsilon > 0$, podem considerar dues funcions contínues $f_{-\varepsilon}$ i f_ε tals que

$$f_{-\varepsilon}(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } y \leqslant x-\varepsilon \\ 0, & \text{si } x \leqslant y \end{cases} , \quad f_\varepsilon(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } y \leqslant x \\ 0, & \text{si } x+\varepsilon \leqslant y \end{cases} .$$

Tindrem les desigualtats

$$\mathbf{1}_{]-\infty,x-\varepsilon]} \leqslant f_{-\varepsilon} \leqslant \mathbf{1}_{]-\infty,x]} \leqslant f_\varepsilon \leqslant \mathbf{1}_{]-\infty,x+\varepsilon]} .$$

Ara,

$$\begin{aligned} F(x-\varepsilon) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{]-\infty,x-\varepsilon]}\, d\mu \leqslant \int_{\mathbb{R}} f_{-\varepsilon}\, d\mu \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_{-\varepsilon}\, d\mu_n \\ &\overset{(2)}{\leqslant} \varliminf_{n\to\infty} F_n(x) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} F_n(x) \\ &\overset{(3)}{\leqslant} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon\, d\mu_n \overset{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon\, d\mu \leqslant F(x+\varepsilon) . \end{aligned}$$

Fem $\varepsilon \to 0$:

$$F(x) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} F_n(x) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} F_n(x) \leqslant F(x) .$$

(1) Per hipòtesi.

(2) Usem que $\int_{\mathbb{R}} f_{-\varepsilon}\, d\mu_n \leqslant F_n(x)$, però no sabem si el límit de la dreta existeix.

(3) Usem que $F_n(x) \leqslant \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon\, d\mu_n$. Aquí sí sabem que el límit de la dreta existeix.

$\Leftarrow$) Observem primer que si a, b són punts de continuïtat de F, aleshores

$$\mu_n(]a,b]^c) = F_n(a) + 1 - F_n(b) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(a) + 1 - F(b) = \mu(]a,b]^c) . \tag{5.1.1}$$

Aplicarem repetidament aquest fet en el que segueix.
Sigui $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua i acotada.
Fixem $\varepsilon > 0$.
Siguin a, b punts de continuïtat de F tals que $\mu(]a,b]^c) < \varepsilon$.
f és uniformement contínua en $]a,b]$. Sigui $\delta > 0$ tal que $x, y \in]a,b]$, $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
Descomponem $]a,b] = \biguplus_{k=1}^m]a_k, b_k]$, amb a_k, b_k punts de continuïtat de F i $b_k - a_k < \delta$.
Notem $I_k :=]a_k, b_k]$.
(Tots aquests punts a, b, a_k, b_k existeixen gràcies al fet que F té límits 0 i 1 en els infinits i al fet que en tot interval no degenerat és possible trobar punts de continüitat de F: vegeu la demostració de la Proposició 1.3.17.)

$$\begin{aligned} \Big| \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu_n - \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu \Big| &= \Big| \int_{]a,b]^c} f\, d\mu_n + \sum_{k=1}^m \int_{I_k} f\, d\mu_n - \int_{]a,b]^c} f\, d\mu - \sum_{k=1}^m \int_{I_k} f\, d\mu \Big| \\ &\leqslant \sup|f| \cdot \big(\mu_n(]a,b]^c) + \mu(]a,b]^c)\big) + \sum_{k=1}^m \Big| \int_{I_k} f\, d\mu_n - \int_{I_k} f\, d\mu \Big| . \end{aligned}$$

El primer sumand convergeix a $2\sup|f|\mu(]a,b]^c)$, per (5.1.1). Quant als altres,

$$\begin{aligned} &\Big| \int_{I_k} f\, d\mu_n - \int_{I_k} f\, d\mu \Big| \\ &\leqslant \Big| \int_{I_k} (f - f(a_k))\, d\mu_n \Big| + \Big| \int_{I_k} f(a_k)\, d\mu_n - \int_{I_k} f(a_k)\, d\mu \Big| + \Big| \int_{I_k} (f(a_k) - f)\, d\mu \Big| \\ &\leqslant \varepsilon\mu_n(I_k) + \big| f(a_k)\big(\mu_n(I_k) - \mu(I_k)\big) \big| + \varepsilon\mu(I_k) \xrightarrow[n\to\infty]{(1)} 2\varepsilon\mu(I_k) . \end{aligned}$$

Per tant,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_n - \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu \right| \leqslant 2 \sup |f| \mu(]a,b]^c) + \sum_{k=1}^{m} 2\varepsilon\mu(I_k) \leqslant 2\varepsilon(\sup |f| + 1) \; .$$

Fent $\varepsilon \to 0$, hem acabat.

(1) Aplicant (5.1.1), els dos primers sumands convergeixen a $\varepsilon\mu(I_k)$ i zero, respectivament.

5.1.3 Corol·lari

El límit feble, si existeix, és únic.

Demostració: Segons el teorema anterior, les funcions de distribució de dos possibles límits han de coincidir en tot punt de continuïtat. Però si dues funcions de distribució coincideixen en tot punt de continuïtat, han de coincidir arreu, perquè els punts de continuïtat són densos en $\mathbb{R}$ i les funcions han de ser contínues a la dreta. □

La unicitat del límit feble és certa també en $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$.

És possible introduir una distància en el conjunt $\mathfrak{P}$ de totes les probabilitats que metritzi la convergència feble. Per exemple, en $\mathbb{R}$, hom pot definir-la de la manera següent: Si μ i ν són dues probabilitats amb funcions de distribució F i G, la distància entre μ i ν és

$$d_w(\mu,\nu) := \inf\{\varepsilon > 0 : \; G(x-\varepsilon) - \varepsilon \leqslant F(x) \leqslant G(x+\varepsilon) + \varepsilon\} \; . \tag{5.1.2}$$

Tota variable aleatòria $X\colon\Omega \to \mathbb{R}$ indueix una probabilitat en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$. Podem doncs transportar el concepte de convergència feble de probabilitats a un concepte de convergència de variables aleatòries. No és res més, però, que un conveni per simplificar notació.

5.1.4 Definició

Una successió $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aleatòries (no cal que estiguin definides sobre el mateix espai de probabilitat) *convergeix en llei* a una variable aleatòria X sii les lleis de X_n convergeixen feblement a la llei de X.

Ho abreviarem $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathfrak{L}} X$.

Òbviament, es pot posar en lloc de X qualsevol variable que tingui la mateixa llei que X, i per tant el límit no és únic. Per això, si μ és la llei límit, té sentit també escriure $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathfrak{L}} \mu$. □

La convergència en llei és la més feble de totes les definides:

5.1.5 Proposició

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathfrak{L}} X \; .$$

Demostració:

Sigui $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ l'espai de probabilitat on estan definides totes les variables.

Siguin μ_n les lleis de X_n i μ la llei de X.

Sigui $f\colon\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua i acotada. Farem servir el mateix truc de la demostració del Teorema 5.1.2 per poder utilitzar la continuïtat uniforme de f sobre intervals acotats.

Fixem $\varepsilon > 0$. Siguin $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $\mu(]a,b]^c) < \varepsilon$. Sigui $1 > \delta > 0$ tal que $x, y \in]a-1, b+1]$, $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu_n - \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu \Big| \overset{(1)}{=} \Big| \int_{\Omega} \big(f(X_n) - f(X)\big)\, dP \Big| \\
&\leqslant \int_{\substack{\{|X_n - X| \leqslant \delta,\\ X \in]a,b]\}}} \big|f(X_n) - f(X)\big|\, dP + \int_{\substack{\{|X_n - X| > \delta,\\ X \in]a,b]\}}} \big|f(X_n) - f(X)\big|\, dP \\
&\quad + \int_{\{X \in]a,b]^c\}} \big|f(X_n) - f(X)\big|\, dP \\
&\leqslant \varepsilon + 2 \sup |f| P(\{|X_n - X| > \delta\}) + 2 \sup |f| P(\{X \in]a,b]^c\}) \ .
\end{aligned}$$

Prenent límits superiors,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \Big| \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu_n - \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu \Big| \overset{(2)}{\leqslant} \varepsilon \cdot (2 \sup |f| + 1) \ .$$

Fent $\varepsilon \to 0$, hem acabat.

(1) Pel Teorema de la Mesura Imatge.

(2) El segon sumand convergeix a zero per hipòtesi.

5.1.6 Exercici

El recíproc només es pot afirmar quan la convergència en llei és a una variable aleatòria constant (vegeu el Problema **5.1**).

5.2 Funcions característiques

5.2.1 Definició

Sigui μ una probabilitat en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$.
La *funció característica* de μ és

$$\begin{aligned}
\varphi_\mu \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\
t &\longmapsto \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, \mu(dx)
\end{aligned}$$

És a dir, escrita d'una altra manera,

$$\varphi_\mu(t) := \int_{\mathbb{R}} \cos tx\, \mu(dx) + i \int_{\mathbb{R}} \sin tx\, \mu(dx) \ ,$$

usant la definició de la funció exponencial complexa i la d'integral d'una funció complexa. Si $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ és una variable aleatòria, la *funció característica de X* és la funció característica de la seva llei:

$$\varphi_X(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, P_X(dx) = \mathrm{E}[e^{itX}] \quad \square$$

Hom pot definir també la funció característica de probabilitats en $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$.

5.2.2 Definició

Sigui μ una probabilitat en $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$.

Definim la seva *funció característica* com

$$\begin{aligned} \varphi_\mu\colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t,x\rangle}\,\mu(dx) \end{aligned}$$

on $\langle t,x\rangle$ és el producte escalar habitual en $\mathbb{R}^n$.
Si $X\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$ és un vector aleatori,

$$\varphi_X(t) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t,x\rangle}\,P_X(dx) = \mathrm{E}[e^{i\langle t,X\rangle}]\ .$$

5.2.3 Proposició (Propietats de les funcions característiques)
Sigui μ una probabilitat en $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$. La funció característica de μ gaudeix de les propietats següents:

1) $\varphi_\mu(0)=1$.

2) $|\varphi_\mu(t)|\leqslant 1$, $\forall t\in\mathbb{R}^n$.

3) $\varphi_\mu(-t)=\overline{\varphi_\mu(t)}$, $\forall t\in\mathbb{R}^n$.

4) φ_μ *és uniformement contínua.*

Demostració:
1)

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle 0,x\rangle}\,\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} 1\,\mu(dx) = 1\ .$$

2)

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t,x\rangle}\,\mu(dx)\Big| \overset{(1)}{\leqslant} \int_{\mathbb{R}^n} |e^{i\langle t,x\rangle}|\,\mu(dx) \overset{(2)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} 1\,\mu(dx) = 1\ .$$

(1) Per la Proposició 2.2.21.
(2) El mòdul de l'exponencial complexa és 1.

3)

$$\varphi_\mu(-t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mu(dx) \overset{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{e^{i\langle t,x\rangle}}\,\mu(dx) \overset{(2)}{=} \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t,x\rangle}\,\mu(dx)} = \overline{\varphi_\mu(t)}\ .$$

(1) Propietat de l'exponencial complexa que és immediata a partir de la seva definció en termes de sinus i cosinus.
(2) Immediat de la definició d'integral d'una funció complexa.

4)

$$\begin{aligned} |\varphi_\mu(t)-\varphi_\mu(s)| &= \Big|\int_{\mathbb{R}^n} (e^{i\langle t,x\rangle} - e^{i\langle s,x\rangle})\,\mu(dx)\Big| \\ &\overset{(1)}{\leqslant} \int_{\mathbb{R}^n} \big|e^{i\langle t,x\rangle} - e^{i\langle s,x\rangle}\big|\,\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \big|e^{i\langle s,x\rangle}(e^{i\langle t-s,x\rangle}-1)\big|\,\mu(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \big|e^{i\langle t-s,x\rangle}-1\big|\,\mu(dx) \xrightarrow[|t-s|\to 0]{(2)} 0\ . \end{aligned}$$

És a dir: $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0:\ |t-s|<\delta \Rightarrow |\varphi_\mu(t)-\varphi_\mu(s)|<\varepsilon$.

(1) Per la Proposició 2.2.21.
(2) Pel Teorema de la Convergència Dominada, puix que el límit puntual de la integral és zero i $\big|e^{i\langle t-s,x\rangle}-1\big|\leqslant 2$.

5.2.4 Exemples

1) $\mu = \delta_a$:
$$\varphi_\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,\mu(dx) = e^{ita}\ .$$

2) $\mu = \mathrm{Bern}(p)$ (*Llei de Bernouilli de paràmetre* p, caracteritzada per $\mu(\{1\}) = p$ i $\mu(\{0\}) = 1-p$):
$$\varphi_\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,\mu(dx) = pe^{it} + 1 - p\ .$$

3) $\mu = N(0,1)$:
$$\varphi_\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\cos tx\,dx\ .$$
$$\varphi'_\mu(t) \stackrel{(2)}{=} \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} xe^{-x^2/2}\sin tx\,dx \stackrel{(3)}{=} \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}t\cos tx\,dx = -t\varphi_\mu(t)\ .$$

Hem obtingut una equació diferencial per a $\varphi_\mu(t)$. Usant $\varphi_\mu(0) = 1$ com a condició inicial, l'única solució és $\varphi_\mu(t) = e^{-t^2/2}$. Observeu que en aquest cas particular la funció característica és real (vegeu també el Problema **5.5**).

(1) La part imaginària és la integral d'una funció imparella, i per tant zero.

(2) Apliquem el Teorema 2.3.8 per commutar la derivada respecte t amb la integral respecte x.

(3) Integrant per parts. □

La funció característica d'una probabilitat en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ està relacionada de forma senzilla amb els seus moments, com veurem a les dues proposicions següents.

5.2.5 Proposició

Sigui μ una probabilitat en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ amb moment d'ordre n finit ($n \in \mathbb{N}$). Aleshores, φ_μ és n vegades derivable i
$$\varphi_\mu^{(k}(t) = i^k \int_{\mathbb{R}} x^k e^{itx}\,\mu(dx)\ ,\quad \forall k = 1,\dots,n\ .$$

Demostració: Aplicarem el Teorema 2.3.8 (vegeu també l'Observació 2.3.9, 2) per commutar la derivada respecte t amb la integral respecte x:
$$|e^{itx}| + \left|\frac{\partial}{\partial t}e^{itx}\right| = 1 + |ixe^{itx}| = 1 + |x|\ .$$
Si el moment d'ordre 1 és finit (és a dir, si $|x|$ és integrable respecte μ), aleshores
$$\varphi'_\mu(t) = i\int_{\mathbb{R}} xe^{itx}\,\mu(dx)\ .$$
Anàlogament,
$$|ixe^{itx}| + \left|\frac{\partial}{\partial t}ixe^{itx}\right| = |x| + |-x^2e^{itx}| = |x| + x^2\ ,$$
i per tant, si el moment d'ordre 2 és finit,
$$\varphi''_\mu(t) = i^2\int_{\mathbb{R}} x^2e^{itx}\,\mu(dx)\ .$$

I així successivament mentre existeixin moments finits, utilitzant que $\dfrac{\partial^k}{\partial t^k} e^{itx} = i^k x^k e^{itx}$.

5.2.6 Corol·lari

En la situació de la proposició anterior,

$$\varphi_\mu^{(k}(0) = i^k \int_{\mathbb{R}} x^k \, \mu(dx) \ , \quad \forall k = 1, \ldots, n \quad \square \tag{5.2.1}$$

La fórmula (5.2.1) ens proporciona, si coneixem φ_μ, un mètode eficient per calcular moments de μ.

L'enunciat següent és una mena de recíproc de la Proposició 5.2.5.

5.2.7 Proposició

Sigui μ una probabilitat en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$.
Suposem que φ_μ és n vegades derivable en un entorn de zero, amb n parell.
Aleshores, μ té moment d'ordre n finit.

Demostració: Notarem $m_k := \int_{\mathbb{R}} x^k \, \mu(dx)$, per abreviar.
Fixem $n \geqslant 2$. Veurem per inducció sobre k que existeixen moments d'ordre $2k$, si $2k \leqslant n$.
Per $k = 1$:

$$\begin{aligned}
\varphi_\mu''(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{\varphi_\mu(h) - 2\varphi_\mu(0) + \varphi_\mu(-h)}{h^2} = \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ihx} - 2 + e^{-ihx}}{h^2} \, \mu(dx) \\
&\overset{(1)}{=} -2 \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos hx}{h^2} \, \mu(dx) \overset{(2)}{\leqslant} -2 \int_{\mathbb{R}} \varliminf_{h \to 0} \frac{1 - \cos hx}{h^2} \, \mu(dx) = - \int_{\mathbb{R}} x^2 \, \mu(dx) \ , \\
&\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} x^2 \, \mu(dx) \leqslant -\varphi_\mu''(0) \in \mathbb{R} \ .
\end{aligned} \tag{5.2.2}$$

Suposem que $m_{2(k-1)}$ és finit i $2k \leqslant n$. Si $m_{2(k-1)} = 0$ (cas trivial), aleshores forçosament $\mu = \delta_0$, que té moments de tots els ordres. Suposem que $m_{2(k-1)} > 0$.
Aplicant la Proposició 5.2.5, tenim que $\varphi_\mu^{(2k-2}$ existeix i

$$\varphi_\mu^{(2k-2}(t) = (-1)^{k-1} \int_{\mathbb{R}} x^{2k-2} e^{itx} \, \mu(dx) \ . \tag{5.2.3}$$

Considerem la probabilitat $\nu \ll \mu$ amb densitat $\dfrac{d\nu}{d\mu} = \dfrac{x^{2k-2}}{m_{2k-2}}$. La seva funció característica és

$$\varphi_\nu(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \, \nu(dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{x^{2k-2}}{m_{2k-2}} \, \mu(dx) \overset{(3)}{=} \frac{(-1)^{k-1} \varphi_\mu^{(2k-2}(t)}{m_{2k-2}} \ .$$

Per la hipòtesi de derivabilitat sobre φ_μ, existeix $\varphi_\nu''(t)$ en un entorn de zero. Aplicant (5.2.2) a ν,

$$\begin{aligned}
&- \varphi_\nu''(0) \geqslant \int_{\mathbb{R}} x^2 \, \nu(dx) = \frac{1}{m_{2k-2}} \int_{\mathbb{R}} x^{2k} \, \mu(dx) \\
&\Rightarrow 0 \leqslant m_{2k} \leqslant -\varphi_\nu''(0) \cdot m_{2k-2} \ ,
\end{aligned}$$

i per tant m_{2k} és finit.

(1) $e^{ihx} + e^{-ihx} = 2 \cos hx$.

(2) Pel Lema de Fatou.

(3) Apliquem (5.2.3). $\square$

És possible reconstruir una probabilitat a partir de la seva funció característica. És a dir, la funció característica justifica el seu nom i realment "caracteritza" la probabilitat. Això es deduirà d'una fórmula que ens determina la funció de distribució a partir de la funció característica.

5.2.8 Teorema (Fórmula d'Inversió)
Sigui μ una probabilitat en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$, amb funció característica φ i funció de distribució F.
Aleshores, per a tots $a < b$ punts de continuïtat de F,

$$F(b) - F(a) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^{M} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t)\, dt \ . \tag{5.2.4}$$

Demostració:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-M}^{M} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t)\, dt &\overset{(1)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^{M} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, \mu(dx)\, dt \\
&\overset{(2)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{-M}^{M} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} e^{itx}\, dt\, \mu(dx) \\
&\overset{(3)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{-M}^{M} \frac{\cos(t(x-a)) - \cos(t(x-b))}{it}\, dt \\
&\qquad + i \int_{-M}^{M} \frac{\sin(t(x-a)) - \sin(t(x-b))}{it}\, dt \Big]\, \mu(dx) \\
&\overset{(4)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{-M}^{M} \frac{\sin(t(x-a))}{t}\, dt - \int_{-M}^{M} \frac{\sin(t(x-b))}{t}\, dt \Big]\, \mu(dx) \\
&\overset{(5)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{-M(x-a)}^{M(x-a)} \frac{\sin u}{u}\, du - \int_{-M(x-b)}^{M(x-b)} \frac{\sin u}{u}\, du \Big]\, \mu(dx) \ .
\end{aligned}$$

Sabem que

$$\lim_{K\to\infty} \int_{-K}^{K} \frac{\sin u}{u}\, du \overset{(6)}{=} \pi \ .$$

Això ens diu que la família de funcions

$$x \longmapsto \int_{-M(x-a)}^{M(x-a)} \frac{\sin u}{u}\, du - \int_{-M(x-b)}^{M(x-b)} \frac{\sin u}{u}\, du$$

està acotada (per la constant $2 \sup_K \int_{-K}^{K} \frac{\sin u}{u}\, du$) i que el seu límit quan $M \to \infty$ és

$$x \longmapsto \begin{cases} 0, & \text{si } x < a \ \text{ o } \ x > b \\ 2\pi, & \text{si } a < x < b \\ \pi, & \text{si } x = a \ \text{ o } \ x = b \ . \end{cases}$$

Podem aplicar doncs el Teorema de la Convergència Dominada i obtenim

$$\begin{aligned}
\lim_{M\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^{M} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t)\, dt &= \int_{\mathbb{R}} \big(\mathbf{1}_{]a,b[}(x) + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{a,b\}}(x) \big)\, \mu(dx) \\
&\overset{(7)}{=} F(b^-) - F(a) + \frac{1}{2}(F(a) - F(a^-) + F(b) - F(b^-)) \\
&= \frac{F(b) + F(b^-)}{2} - \frac{F(a) + F(a^-)}{2} \ .
\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

No hem usat enlloc que a i b siguin punts de continuïtat de F. Per tant, aquest resultat és vàlid per a tots a, b. Si són punts de continuïtat, (5.2.5) és igual a $F(b) - F(a)$ i obtenim l'enunciat del teorema.

(1) Definició de φ.

(2) Podem aplicar el Teorema de Fubini, perquè

$$\Big|\frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} e^{itx}\Big| = \Big|\int_a^b e^{-itx}\,dx\Big| \leqslant \int_a^b |e^{-itx}|\,dx = b - a\ ,$$

i per tant la funció $\dfrac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} e^{itx}$ és integrable a l'espai producte $(\mathbb{R} \times [-M, M],\ \mathfrak{B}(\mathbb{R} \times [-M, M]), \mu \times \lambda)$, on λ és la mesura de Lebesgue restringida a $\mathfrak{B}([-M, M])$. Per $t = 0$ la funció no està definida, però es tracta d'una discontinuïtat evitable (el límit en zero és $b - a$) i per tant no importa a efectes d'integració respecte la mesura de Lebesgue.

(3) Apliquem la definició de la funció exponencial complexa.

(4) La primera integral val zero, perquè es tracta d'una funció imparella (deixant de banda la unitat imaginària i, que és una constant) integrada sobre un interval simètric al voltant del zero.

(5) Fem el canvi de variable $u = t(x - a)$ a la primera integral i $u = t(x - b)$ a la segona.

(6) La manera més fàcil i instructiva de calcular aquesta integral requereix tècniques d'Anàlisi Complexa. Ens creurem aquí el resultat, que es pot trobar en els llibres de taules d'integrals, normalment escrit com « $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u}\,du = \pi$ », encara que en la nostra teoria la integral no existeix, perquè $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{\sin u}{u}\Big)^{+} du = \infty$ i $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{\sin u}{u}\Big)^{-} du = \infty$.

(7) Vegeu l'Observació 1.3.11 i el Problema **1.20**.

5.2.9 Corol·lari

Si μ i ν són dues probabilitats en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ amb la mateixa funció característica, aleshores $\mu = \nu$.

Demostració: La funció característica determina la funció de distribució en els seus punts de continuïtat, i per tant a tot arreu (vegeu la demostració del Corol·lari 5.1.3). □

Hi ha una fórmula similar a (5.2.4) en $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$, i se'n dedueix també en aquest cas el Corol·lari 5.2.9.

5.2.10 Observacions

1) Suposem que una funció característica φ és integrable respecte la mesura de Lebesgue λ. Aleshores:

   a) La Fórmula d'Inversió esdevé més simple: Com que

$$\Big|\mathbf{1}_{[-M,M]}(t)\frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}\varphi(t)\Big| \leqslant \Big|\int_a^b e^{-itx}\,dx \cdot \varphi(t)\Big| \leqslant (b - a)|\varphi(t)|\ ,$$

   pel Teorema de la Convergència Dominada i el Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^{M} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}\varphi(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_a^b e^{-itx}\varphi(t)\,dx\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_a^b\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\varphi(t)\,dt\,dx\ , \end{aligned}$$

   per a tots a, b punts de continuïtat de F. A més, la integral respecte dx és una funció contínua dels límits d'integració. Per tant, F és contínua i la fórmula val $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

b) Es té $\mu \ll \lambda$: En efecte, la funció

$$x \longmapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\varphi(t)\,dt$$

és contínua, gràcies al Teorema 2.3.7. Pel Teorema Fonamental del Càlcul, F és derivable i

$$0 \leqslant F'(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\varphi(t)\,dt \ .$$

Per tant, $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\varphi(t)\,dt$ és la densitat de μ respecte la mesura de Lebesgue.

2) El fet que aparegui un límit a la fórmula (5.2.4) és només per solucionar el problema que φ pot no ser integrable (per exemple, si $\mu = \delta_0$, llavors $\varphi \equiv 1$). Hi ha altres maneres de solucionar la no integrabilitat a priori de φ, i per tant es poden escriure diferents fórmules d'inversió. Per exemple,

$$F(b) - F(a) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon t^2}\frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}\varphi(t)\,dt \ .$$

En lloc de multiplicar per indicadors que tendeixen a 1 de manera simètrica, es multiplica aquí per funcions suaus, que també tendeixen a 1 de manera simètrica i que decreixen prou ràpid en els infinits per tal que la integral tingui sentit.

3) El fet que μ sigui absolutament contínua respecte la mesura de Lebesgue no implica que φ sigui integrable. □

Enunciem dues propietats més de les funcions característiques, que tenen relació amb la independència de variables aleatòries.

5.2.11 Proposició (Més propietats de les funcions característiques)

5) Sigui $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatori.
$X_1, \dots, X_n$ són variables aleatòries independents sii

$$\varphi_X(t_1, \dots, t_n) = \varphi_{X_1}(t_1)\cdot \dots \cdot \varphi_{X_n}(t_n) \ .$$

6) Si $X_1, \dots, X_n$ són variables independents, aleshores

$$\varphi_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t)\cdot \dots \cdot \varphi_{X_n}(t) \ .$$

Demostració:
5)

$$\begin{aligned}
&X_1, \dots, X_n \text{ independents} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} P_X = P_{X_1}\times\cdots\times P_{X_n} \overset{(2)}{\Leftrightarrow}\\
&\varphi_{P_X}(t_1, \dots, t_n) = \varphi_{P_{X_1}\times\cdots\times P_{X_n}}(t_1, \dots, t_n)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t,x\rangle}\big(P_{X_1}\times\cdots\times P_{X_n}\big)(d(x_1, \dots, x_n))\\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{it_1x_1}\,P_{X_1}(dx_1)\cdot\dots\cdot\int_{\mathbb{R}} e^{it_nx_n}\,P_{X_n}(dx_n) = \varphi_{X_1}(t_1)\cdot\dots\cdot\varphi_{X_n}(t_n) \ .
\end{aligned}$$

(1) Per la Proposició 3.3.9.
(2) Pel Corol·lari 5.2.9 (en $\mathbb{R}^n$).

6)

$$\begin{aligned}\varphi_{X_1+\cdots+X_n}(t) &= \mathrm{E}\left[e^{it(X_1+\cdots+X_n)}\right] \\ &= \mathrm{E}\left[e^{itX_1}\right]\cdot\ldots\cdot\mathrm{E}\left[e^{itX_n}\right] = \varphi_{X_1}(t)\cdot\ldots\cdot\varphi_{X_n}(t)\ .\end{aligned}$$

5.2.12 Exemples

1) $\mu = \mathrm{Bin}(n,p)$ (*Llei binomial de paràmetres* n *i* p, que és la de la suma de n variables $\mathrm{Bern}(p)$ independents):
Usant la propietat *6)* de la Proposició 5.2.11,

$$\varphi_\mu(t) = \left(\varphi_{\mathrm{Bern}(p)}(t)\right)^n = \left(pe^{it}+1-p\right)^n\ .$$

2) $\mu = N(m,\sigma^2)$ (*Llei Normal de mitjana* m *i variància* σ^2, que es defineix com la que té densitat respecte la mesura de Lebesgue $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$):
Usant la propietat *6)* anterior es demostra fàcilment que

$$\varphi_\mu(t) = e^{itm-\sigma^2t^2/2}$$

(vegeu el Problema **5.6**).

5.3 El Teorema de Continuïtat

Si una successió de probabilitats convergeix feblement, aleshores les funcions característiques convergeixen puntualment a la funció característica del límit, i recíprocament. Aquest resultat es coneix com el Teorema de Continuïtat de Lévy. La implicació directa és molt fàcil; pel recíproc, ens calen uns resultats previs que anomenarem 'lemes'.

5.3.1 Lema (Teorema de Helly)

Sigui $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successió de probabilitats en* $(\mathbb{R},\mathfrak{B}(\mathbb{R}))$*, amb funcions de distribució associades* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*.*
Aleshores: Existeix una successió parcial $\{F_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *de* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *i una funció de distribució* F *d'una mesura finita (no necessàriament una probabilitat) tals que*

$$\lim_{k\to\infty} F_{n_k}(x) = F(x) \quad \forall x \textit{ punt de continuïtat de } F.$$

Demostració: Sigui $\{r_m,\ m\geqslant 1\}$ el conjunt dels nombres racionals $\mathbb{Q}$ indexats per $\mathbb{N}$. És clar que per a cada r_m, la successió $\{F_n(r_m)\}_{n\in\mathbb{N}}$ té una parcial convergent a un cert límit $L(r_m)$, perquè els seus termes estan en $[0,1]$.
Voldríem tenir, primer de tot, una parcial que valgui per a tots els racionals a la vegada. Considerem l'esquema següent:

$$\begin{array}{lllll} F_{1,1}(r_1), & F_{1,2}(r_1), & F_{1,3}(r_1), & \ldots\ \ldots & \longrightarrow L(r_1) \\ F_{2,1}(r_2), & F_{2,2}(r_2), & F_{2,3}(r_2), & \ldots\ \ldots & \longrightarrow L(r_2) \\ F_{3,1}(r_3), & F_{3,2}(r_3), & F_{3,3}(r_3), & \ldots\ \ldots & \longrightarrow L(r_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \end{array}$$

on les funcions de la fila m formen una successió parcial de les de la fila $m-1$, convergent en el punt r_m, i les de la primera formen una successió parcial de la successió original.
Aleshores, la successió $\{F_{n,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una parcial de $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Per cada punt $r_m\in\mathbb{Q}$, $\{F_{n,n}(r_m)\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una parcial de $\{F_{m,n}(r_m)\}_{n\in\mathbb{N}}$, i per tant convergeix a $L(r_m)$.

Tenim doncs una parcial que convergeix sobre $\mathbb{Q}$ a una certa funció L. Ens falta definir-la en els punts no racionals i fer-la contínua per la dreta. Això s'aconsegueix definint

$$F(x) := \inf_{\substack{x<r \\ r\in\mathbb{Q}}} L(r) \ .$$

Comprovarem que $\{F_{n,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ i F compleixen l'enunciat.

1) F és creixent:
$$x < y \Rightarrow \inf_{\substack{x<r \\ r\in\mathbb{Q}}} L(r) \leqslant \inf_{\substack{y<r \\ r\in\mathbb{Q}}} L(r) \ .$$

2) F és contínua a la dreta:
Fixem $x \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$.
Sigui $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r$ i $L(r) < F(x) + \varepsilon$.
Si $x < y < r$, aleshores $F(y) \leqslant L(r) < F(x) + \varepsilon$, i obtenim la continuïtat a la dreta.

3) Els límits de F en $-\infty$ i $+\infty$ existeixen i estan en $[0, 1]$:
Existeixen per la monotonia de F, i han d'estar en $[0, 1]$ per construcció.

4) $\lim_{n\to\infty} F_{n,n}(x) = F(x)$, $\forall x$ on F sigui contínua:
Fixem $\varepsilon > 0$.
Si F és contínua en x, siguin $r, s \in \mathbb{Q}$ tals que $r < x < s$ i $F(x) - L(r) < \varepsilon$, $L(s) - F(x) < \varepsilon$. Llavors,

$$\begin{aligned} F(x) - \varepsilon < L(r) = \lim_{n\to\infty} F_{n,n}(r) &\overset{(1)}{\leqslant} \underline{\lim}_{n\to\infty} F_{n,n}(x) \\ &\leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} F_{n,n}(x) \overset{(1)}{\leqslant} \lim_{n\to\infty} F_{n,n}(s) = L(s) < F(x) + \varepsilon \ . \end{aligned}$$

Fent $\varepsilon \to 0$, obtenim la convergència desitjada.
(1) Cada $F_{n,n}$ és monòtona. □

Sigui $\mu_n = \delta_n$ (Delta de Dirac en el punt n.) Les funcions de distribució associades $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeixen puntualment a $F \equiv 0$. Aquest exemple trivial mostra que la funció límit del Teorema de Helly no té per què ser la funció de distribució d'una probabilitat.

El concepte que veurem a continuació defineix la propietat justa que es necessita per evitar que passin coses com la d'aquest exemple i la convergència sigui segur a una probabilitat.

5.3.2 Definició

Sigui $\mathfrak{M}$ un conjunt de probabilitats en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$.
Es diu que $\mathfrak{M}$ és un conjunt *ajustat* sii

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists a < b \in \mathbb{R} :\ \forall \mu \in \mathfrak{M},\ \mu(]a, b]^c) < \varepsilon \ .$$

Clarament, si a un conjunt ajustat li afegim un nombre finit de probabilitats, el conjunt resultant torna a ser ajustat.

5.3.3 Lema (Teorema de Prokhorov)

Un conjunt de probabilitats $\mathfrak{M}$ sobre $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ és ajustat sii $\mathfrak{M}$ és un conjunt relativament compacte de l'espai mètric $(\mathfrak{P}, d_w)$ definit per (5.1.2). En altres paraules, sii tota successió $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}$ té una parcial convergent en $(\mathfrak{P}, d_w)$.

Demostració:
$\Rightarrow$) Suposem que $\mathfrak{M}$ és un conjunt ajustat.
Sigui $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}$ i sigui $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successió de funcions de distribució associades.
Volem veure que $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ té una parcial convergent en $(\mathfrak{P}, d_w)$.

Pel Teorema de Helly, existeixen una parcial $\{F_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i una funció de distribució F tals que $\lim\limits_{k\to\infty} F_{n_k}(x) = F(x)$, per a tot x punt de continuïtat de F. Comprovarem que F és la funció de distribució d'una probabilitat.
Fixem $\varepsilon > 0$. Siguin a, b tals que $\mu_{n_k}(]a,b]^c) < \varepsilon$, per a tot k. Podem suposar que a i b són punts de continuïtat de F. Llavors:

$$F(b) = \lim_{k\to\infty} F_{n_k}(b) = \mu_{n_k}(]-\infty, b]) \geqslant \mu_{n_k}(]a,b]) > 1-\varepsilon\ ,$$
$$F(a) = \lim_{k\to\infty} F_{n_k}(a) = \mu_{n_k}(]-\infty, a]) \leqslant \mu_{n_k}(]a,b]^c) < \varepsilon\ .$$

De l'arbitrarietat de ε, deduïm que F pren valors tant propers com es vulgui a 0 i a 1. En conseqüència,

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1\ ,$$

i F és la funció de distribució d'una certa probabilitat μ. Hem obtingut

$$\mu_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{w} \mu\ .$$

$\Leftarrow$) Suposem que $\mathfrak{M}$ és un conjunt relativament compacte.
Si $\mathfrak{M}$ no és ajustat, existeixen $\varepsilon > 0$ i una successió $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}$ tals que $\mu_n(]-n,n]^c) > \varepsilon$.
Per hipòtesi, existirà una parcial $\{\mu_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergent feblement a una probabilitat μ.
Per a tots $a < b$ punts de continuïtat de la funció de distribució de μ, es tindrà $]a,b] \subset]-n,n]$ per n prou gran, i per tant

$$\varepsilon \leqslant \mu_n(]-n,n]^c) \leqslant \mu_n(]a,b]^c) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(]a,b]^c)\ ,$$

i μ no pot ser una probabilitat.

5.3.4 Lema (Desigualtat de Truncació)

Sigui μ una probabilitat en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$, amb funció característica φ.
Aleshores, $\forall a > 0$,

$$\mu\big(\{x :\ |x| \geqslant \tfrac{2}{a}\}\big) \leqslant \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} (1-\varphi(t))\, dt\ .$$

Demostració:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}(1-\varphi(t))\,dt = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\int_{\mathbb{R}}(1-e^{itx})\,\mu(dx)\,dt \\
&\overset{(1)}{=} \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}}\int_{-a}^{a}(1-e^{itx})\,dt\,\mu(dx) \overset{(2)}{=} \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}}\int_{-a}^{a}(1-\cos tx)\,dt\,\mu(dx) \\
&= \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}} 2\big(a - \frac{\sin ax}{x}\big)\,\mu(dx) \geqslant \int_{\{x:\ |ax|\geqslant 2\}} 2\big(1-\frac{\sin ax}{ax}\big)\,\mu(dx) \\
&\overset{(3)}{\geqslant} 2\inf_{|u|\geqslant 2}\big(1-\frac{\sin u}{u}\big)\cdot\mu(\{x :\ |ax|\geqslant 2\}) \overset{(4)}{\geqslant} \mu(\{x :\ |x| \geqslant \frac{2}{a}\})\ .
\end{aligned}$$

(1) $|1-e^{itx}| \leqslant 2$. Podem aplicar el Teorema de Fubini.
(2) Usant la definició de la funció exponencial complexa i que el sinus és una funció imparella.
(3) Substituïm l'integrand per una constant que l'acota inferiorment i fem la integral resultant.
(4) $\inf\limits_{|u|\geqslant 2}(1-\frac{\sin u}{u}) \geqslant \frac{1}{2}$.

5.3.5 Teorema de Continuïtat de Lévy

Sigui $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successió de probabilitats en* $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ *amb funcions característiques associades* $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Aleshores:

1) Si $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \mu$, *i* φ *és la funció característica de la probabilitat* μ, *es té*

$$\varphi_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(t) \ , \quad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

2) Si $\varphi_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, *amb* φ *una funció contínua en zero, aleshores* φ *és la funció característica d'una certa probabilitat* μ *i*

$$\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \mu \ .$$

Demostració:
1) Per a cada t, les parts reals i imaginària de e^{itx} són funcions de x contínues i acotades. Per tant, per les definicions de convergència feble i integral complexa,

$$\varphi_n(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,\mu_n(dx) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,\mu(dx) = \varphi(t) \ .$$

2) Veurem primer que els elements de la successió $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ constitueixen un conjunt ajustat de probabilitats.
Fixem $\varepsilon > 0$.
Per $a > 0$,

$$\mu_n([\frac{-2}{a}, \frac{2}{a}]^c) = \mu_n(\{x : \ |x| \geqslant \frac{2}{a}\}) \overset{(1)}{\leqslant} \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} (1-\varphi_n(t))\,dt \overset{(2)}{\leqslant} \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} (1-\varphi(t))\,dt + \frac{\varepsilon}{2} \overset{(3)}{\leqslant} \varepsilon \ .$$

Per tant, $\{\mu_n : \ n \geqslant n_0\}$ és ajustat, el que implica que $\{\mu_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ també ho és.
El Teorema de Prokhorov aplicat a aquest últim conjunt ens diu en particular que tota successió parcial $\{\mu_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ té una parcial convergent $\{\mu_{n_{k_\ell}}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ a un cert límit μ. Per la part *1)* del teorema,

$$\varphi_\mu(t) = \lim_{\ell\to\infty} \varphi_{n_{k_\ell}}(t) = \varphi(t) \ .$$

En resum, tota parcial de $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ té una parcial convergent a un mateix límit μ. Com en tot espai mètric, això és equivalent al fet que $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix a μ.

(1) Per la Desigualtat de Truncació.

(2) Desigualtat vàlida per $n \geqslant n_0$ prou gran. En efecte, com que $|1-\varphi_n(t)| \leqslant 2$, es té $\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}(1-\varphi_n(t))\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}(1-\varphi(t))\,dt$, pel Teorema de la Convergència Dominada.

(3) Desigualtat vàlida per a prou petit. En efecte, gràcies a la continuïtat de φ en $t=0$, el Teorema Fonamental del Càlcul implica que $\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}(1-\varphi(t))\,dt \xrightarrow[a\to 0]{} 2(1-\varphi(0)) = 0$. □

El Teorema de Continuïtat també és cert en $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$.

5.4 El Teorema Central del Límit

La Llei Forta dels Grans Nombres ens diu que la successió $\{S_n/n\}_{n\in\mathbb{N}}$, on S_n és la suma de n variables aleatòries independents idènticament distribuïdes amb moment de primer ordre finit m, convergeix quasi segur a m. Per tant, les lleis de S_n/n convergeixen feblement a la llei δ_m.

Si les variables tenen variància finita σ^2 podem impedir aquesta degeneració de les lleis cap a δ_m: Restant a S_n/n la seva esperança i dividint després per la desviació tipus, obtenim variables d'esperança 0 i variància 1:

$$\frac{\frac{S_n}{n}-\mathrm{E}[\frac{S_n}{n}]}{\sqrt{\mathrm{Var}[\frac{S_n}{n}]}}=\frac{\frac{S_n}{n}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{S_n-nm}{\sigma\sqrt{n}}\ .$$

Ara ja no és possible la convergència a un punt. De fet, no es pot esperar la convergència quasi segura, en L^p o en probabilitat de la successió $\dfrac{S_n-nm}{\sigma\sqrt{n}}$ a cap variable aleatòria concreta. Però sí podem esperar encara que convergeixi en llei.

El resultat més antic en aquest sentit és de l'anglès Abraham De Moivre (1756): Si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió de variables aleatòries independents que prenen els valors 0 i 1 amb probabilitat 1/2, aleshores les lleis de

$$\frac{S_n-\frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}$$

convergeixen feblement a la llei N(0,1).

Veurem una versió més general però encara prou simple d'aquest resultat.

5.4.1 Teorema Central del Límit (versió de Lévy–Lindeberg)

Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de variables aleatòries de L^2, independents, idènticament distribuïdes.

Notem $m=\mathrm{E}[X_i]$, $\sigma^2=\mathrm{Var}[X_i]$ i $S_n=X_1+\cdots+X_n$.

Aleshores:

$$\frac{S_n-nm}{\sigma\sqrt{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{\mathfrak{L}}N(0,1)\ .$$

Demostració: Volem veure que les funcions característiques de $T_n=\dfrac{S_n-nm}{\sigma\sqrt{n}}$ convergeixen a la funció característica de la llei $N(0,1)$, que és $e^{-t^2/2}$ (vegeu l'Exemple 5.2.4, 3).

Sigui φ_n la funció característica de $\dfrac{X_1-m}{\sigma\sqrt{n}}$. Per la propietat *6)* de la Proposició 5.2.11, i tenint en compte que les variables són independents i tenen la mateixa llei,

$$\varphi_{T_n}(t)=(\varphi_n(t))^n=\Big(\mathrm{E}\Big[\exp\Big\{it\frac{X_1-m}{\sigma\sqrt{n}}\Big\}\Big]\Big)^n\ .$$

Com que X_1 és de L^2, φ_n és dues vegades derivable i

$$\varphi_n'(t)=i\,\mathrm{E}\Big[\frac{X_1-m}{\sigma\sqrt{n}}\exp\Big\{it\frac{X_1-m}{\sigma\sqrt{n}}\Big\}\Big]\ ,$$

$$\varphi_n''(t)=-\,\mathrm{E}\Big[\Big(\frac{X_1-m}{\sigma\sqrt{n}}\Big)^2\exp\Big\{it\frac{X_1-m}{\sigma\sqrt{n}}\Big\}\Big]\ .$$

Aplicant la fórmula de Taylor,

$$\begin{aligned}\varphi_n(t)&=\varphi_n(0)+\varphi_n'(0)t+\frac{1}{2}\varphi_n''(\xi)t^2\\&=1+0+\frac{t^2}{2}\varphi_n''(\xi)\ ,\quad\text{per algun }\xi\in\,]0,t[\ .\end{aligned}$$

És sabut que si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió creixent amb límit $+\infty$ i existeix el límit de $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, aleshores

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{a_n}\Big)^{a_n b_n} = e^{\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)} . \tag{5.4.1}$$

Escrivim

$$\Big(1+\frac{t^2}{2}\varphi_n''(\xi)\Big)^n = \Big(1+\frac{1}{\big(\frac{t^2}{2}\varphi_n''(\xi)\big)^{-1}}\Big)^{\left(\frac{t^2}{2}\varphi_n''(\xi)\right)^{-1}\left(\frac{t^2}{2}\varphi_n''(\xi)\right)n} .$$

Només ens cal comprovar que $n\varphi_n''(\xi) \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$. Aleshores estarem en condicions d'aplicar la idea de (5.4.1) i hi haurà convergència precisament a $e^{-t^2/2}$.
En efecte,

$$n\varphi_n''(\xi) = -\,\mathrm{E}\Big[\Big(\frac{X_1-m}{\sigma}\Big)^2 \exp\Big\{i\xi\frac{X_1-m}{\sigma\sqrt{n}}\Big\}\Big] \xrightarrow[n\to\infty]{} -\,\mathrm{E}\Big[\Big(\frac{X_1-m}{\sigma}\Big)^2\Big] = -1 ,$$

gràcies al Teorema de la Convergència Dominada.

5.5 Problemes

5.1 Demostreu que la convergència en llei a una variable aleatòria constant implica la convergència en probabilitat.
Idea: Useu que $f(x) = \inf\{1, |x-a|\}$ és contínua i acotada, combinat amb la Desigualtat de Txebixev.

5.2 Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de variables aleatòries independents amb llei $\mathrm{Unif}([0,1])$. Estudieu la convergència en llei de la successió $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida per:

$$Y_n := n\min\{X_1,\dots,X_n\} .$$

5.3 *a)* Sigui $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de probabilitats sobre $(\mathbb{R},\mathfrak{B}(\mathbb{R}))$, donades per les funcions de densitat respecte la mesura de Lebesgue

$$f_n(x) = (1+\cos 2\pi n x)\cdot \mathbf{1}_{[0,1]}(x) .$$

Demostreu que $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix feblement i determineu el límit.
b) Si una successió de probabilitats $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sobre $(\mathbb{R},\mathfrak{B}(\mathbb{R}))$, absolutament contínues respecte la mesura de Lebesgue, convergeix feblement, ¿es pot assegurar que la corresponent successió de funcions de densitat $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix quasi per tot en $\mathbb{R}$ respecte la mesura de Lebesgue?
Idea: Considereu l'exemple de *a).*

5.4 Calculeu els moments d'ordre p, per a qualsevol $p\in\mathbb{N}$, de la llei $N(0,1)$.

5.5 Sigui $\tau\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la transformació donada per $\tau(x) = -x$. Notarem per μ_τ la mesura imatge de μ per τ.
Sigui φ_μ la funció característica d'una probabilitat μ en $(\mathbb{R},\mathfrak{B}(\mathbb{R}))$. Notarem per $\bar\varphi_\mu$ la funció conjugada de φ_μ. És a dir, si $\varphi_\mu(t) = a(t)+ib(t)$, llavors $\bar\varphi_\mu(t) = a(t)-ib(t)$.
a) Demostreu que, per a tota probabilitat μ sobre $(\mathbb{R},\mathfrak{B}(\mathbb{R}))$, es té $\bar\varphi_\mu = \varphi_{\mu_\tau}$.
Idea: Apliqueu el Teorema de la Mesura Imatge a la funció $f(x) = e^{itx}$.
b) Una mesura μ sobre $(\mathbb{R},\mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ es diu que és *simètrica* sii si $\mu(B) = \mu(-B)$, per a tot $B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, on

$$-B := \{x\in\mathbb{R} :\ -x\in B\} .$$

Demostreu que per a tota μ simètrica es té $\mu = \mu_\tau$.
c) Usant els resultats de *a)* i *b)*, demostreu que una probabilitat és simètrica sii la seva funció característica és real.

5.6 *a)* Calculeu la funció característica de la llei $N(m,\sigma^2)$ (el més fàcil és utilitzar que si X té una llei $N(0,1)$, aleshores $Y = m + \sigma X$ té llei $N(m,\sigma^2)$ i aplicar la propietat *6)* de la Proposició 5.2.11.)
b) Demostreu que si $\mu_n = N(m_n, \sigma_n^2)$, aleshores μ_n convergeix feblement si i només si $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{\sigma_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeixen, i en tal cas el límit és també una llei Normal.
Nota: En cas que $\sigma_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, la convergència és a una Delta de Dirac, que podem considerar com a cas particular de llei Normal, si fem el conveni $N(m,0) := \delta_m$.

5.7 Podríem definir una convergència "forta" de probabilitats en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ posant simplement

$$\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{f} \mu \Leftrightarrow \mu_n(B) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(B) \ , \quad \forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \ .$$

Comprovarem que no és equivalent a la convergència feble:
a) Demostreu que $\quad \mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{f} \mu \Rightarrow \mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \mu$.
b) Si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió de variables aleatòries amb llei Bern(p), el Teorema Central del Límit ens diu que la llei de

$$Y_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

convergeix feblement a la probabilitat $N(0,1)$ quan $n \to \infty$.
Demostreu que no hi ha convergència "forta".
Idea: Considereu el conjunt

$$A = \big\{ x \in \mathbb{R} : \ P(\{Y_n = x\}) > 0, \ \text{per algun } n \big\} \ .$$

c) Sigui $\mu_n = \mathrm{Bin}(n, p_n)$ amb n i p_n tals que $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot p_n = \lambda > 0$.
Demostreu que μ_n convergeix feblement a $\mu = \mathrm{Pois}(\lambda)$, la llei de Poisson de paràmetre λ, que ve determinada per $\mu(\{k\}) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$, per k enter positiu. (Feu-ho veient que $\mu_n(\{k\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(\{k\})$, $\forall k \in \mathbb{N}$; deduïu d'aquí que en aquest cas es té en realitat $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{f} \mu$.)

5.8 Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de variables aleatòries independents, idènticament distribuïdes, amb llei Exp(λ) (Exponencial de paràmetre λ, que té per densitat $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)$.)
a) Per a cada n, notem $\bar{X}_n = \dfrac{1}{n}\big(X_1 + \cdots + X_n\big)$.
Estudieu la convergència en llei de la successió

$$\{n^{1/2}(\lambda \bar{X}_n - 1)\}_{n\in\mathbb{N}} \ .$$

b) Per a cada n, sigui $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.
Estudieu la convergència en llei de la successió

$$\Big\{ M_n - \frac{\log n}{\lambda} \Big\}_{n\in\mathbb{N}} \ .$$

5.9 *a)* Calculeu la funció característica de la llei Pois(λ).
b) Usant el Teorema de Continuïtat de Lévy, repetiu l'apartat *c)* del problema **5.7**.
c) Si $X_1, \ldots, X_n$ són variables aleatòries independents tals que X_i té una llei Pois(λ_i), trobeu la llei de $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

5.10 La funció característica és un exemple del que s'anomenen *transformades*. En el context de l'Anàlisi Matemàtica general rep el nom de *transformada de Fourier*. Hom pot definir també la *transformada de Laplace* d'una mesura μ en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$. És la funció

$$\begin{aligned} \psi_\mu \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \int_{\mathbb{R}} e^{tx}\, \mu(dx) \end{aligned}$$

Quan μ és una probabilitat el nom tradicional és *funció generatriu de moments*, a causa que $\psi_\mu^{(n}(0)$ és el moment d'ordre n de μ, si aquest existeix i és finit (comproveu-ho com per la propietat anàloga de les funcions característiques).
El problema amb la transformada de Laplace és que pot no estar definida per a tot $t \in \mathbb{R}$. En particular, si $t = 0$ no està a l'interior del seu domini, la fórmula anterior pels moments d'una probabilitat no val (es diu llavors que la funció generatriu de moments no existeix).
a) Comproveu que, en el domini de ψ, es té $\psi(t) = \varphi(-it)$. Deduïu que, si la funció generatriu de moments existeix, aleshores caracteritza també la probabilitat.
b) Demostreu que si $X_1, \dots, X_n$ són variables aleatòries independents, aleshores

$$\psi_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \psi_{X_1}(t) \cdot \dots \cdot \psi_{X_n}(t) \ .$$

c) Aplicació: La llei Gamma(λ, α) (Gamma de paràmetres $\lambda > 0$ i $\alpha > 0$) ve definida per la densitat respecte la mesura de Lebesgue

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \cdot \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x) \ ,$$

on Γ és la funció Gamma de Euler.
Calculeu la funció característica de la llei Gamma$(\lambda, 1)$ (que no és més que Exp(λ)).
Constateu la dificultat de calcular-la per α general.
Calculeu la funció generatriu de moments de Gamma(λ, α).
Si $X_1, \dots, X_n$ són variables aleatòries independents i la llei de X_i és Gamma(λ, α_i), trobeu la llei de $\sum_{i=1}^n X_i$.

5.11 Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de variables aleatòries independents idènticament distribuïdes, complint $P(\{X_n = k\}) = \frac{1}{10}$, per $k \in \{0, 1, \dots, 9\}$.
Definim $X = \sum_{n=1}^\infty X_n \cdot 10^{-n}$. ($X$ serà el nombre real en $[0, 1[$ que té desenvolupament decimal $0.X_1X_2X_3\dots$).
Demostreu que $X \sim \mathrm{Unif}([0, 1])$.

5.12 Demostreu que la convergència feble de Deltes de Dirac $\delta_{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{w} \delta_a$ és equivalent a la convergència de nombres reals $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

5.13 Demostreu que

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

usant la idea següent:
Considereu una successió $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aleatòries amb llei Pois(1), independents, i calculeu $P(\{X_1 + \cdots + X_n \leqslant n\})$.

5.14 Se sap per experiència que el nombre d'accidents en un cert tram de 15 km de carretera és una variable aleatòria amb distribució de Poisson i una mitjana de 2 per setmana. Quina és la probabilitat (aproximada) que hi hagi menys de 100 accidents en aquest tram durant un any?

5.15 Quan fan un càlcul numèric, els ordinadors emmagatzemen els nombres amb què treballen amb una precisió determinada, és a dir, amb un cert nombre de xifres decimals. Això implica que nombres tan simples com 1/3, per exemple, no es poden representar exactament, qualsevol que sigui la precisió, ja que no tenen una seqüència finita de decimals.

Cada cop que s'emmagatzema un nombre, per tant, es comet un error. Concretament, si arrodonim un nombre a k xifres decimals, estem cometent un error ϵ, que pertany a l'interval $[-\frac{1}{2}10^{-k}, \frac{1}{2}10^{-k}]$. Quan sumem dos nombres que han estat arrodonits a k xifres decimals, la suma tindrà un error entre -10^{-k} i 10^{-k}. Es diu que *els errors es propaguen* quan es fan operacions amb els nombres.

a) Si sumem 10 000 nombres arrodonits a k xifres decimals, quin és l'error màxim que pot tenir la suma?

b) Introduint probabilitats en el problema, veurem que la situació no és tant desesperada com pugui semblar a la vista de l'apartat *a)*:

Suposem que l'error en un nombre és una variable aleatòria amb llei uniforme sobre l'interval $[-\frac{1}{2}10^{-k}, \frac{1}{2}10^{-k}]$, i que els errors de diferents nombres són independents entre si. Calculeu ara entre quins límits, amb una probabilitat no menor de 0.99, es troba la suma de 10 000 nombres.

Índex alfabètic