



## Eficiencia empresarial comparativa: Indicadores y técnicas de análisis para la evaluación de la eficiencia de entidades productivas

Joaquim Vergés © <sup>1</sup>

*Edición Mayo 2011*



Departamento de Economía de la Empresa

---

<sup>1</sup> No está autorizada la reproducción total ni parcial de este texto mediante ningún tipo de medio o soporte. Se agradecerá sinceramente cualquier comentario sobre esta versión: [joaquim.verges@uab.es](mailto:joaquim.verges@uab.es)

## Índice

1. Las tres dimensiones de la eficiencia productiva de una empresa, 3
  - Eficiencia productiva 'estándar': Producir con los costes mínimos, 4
  - La tercera dimensión: Eficiencia de adaptación/respuesta a los cambios, 6
2. Evaluación de la eficiencia comparativa: La calidad (o eficacia), y otros requisitos de homogeneidad para la comparación.
  - Alternativas: eficiencia absoluta, eficiencia comparativa, 8
  - La evaluación de la gestión: Eficiencia, Eficacia (o calidad), y su relación, 9
  - Cuestiones adicionales en la comparación entre Empr. Públicas y Empr. Privadas, 11
3. Indicadores para medir la eficiencia productiva de cualquier empresa, 12
  - Indicadores de "Resultados" (beneficios), 13
  - Indicadores de Costes Medios, 14
  - Indicadores de Productividad, 15
4. El cálculo de la productividad global en la práctica
  - Índice de Productividad Global - Productividad Total de los Factores, 20
  - Cálculo de los IPG utilizando valores monetarios, 22
  - Los cálculos de los IPG por aproximación, 24
  - El cálculo por aproximación, cuando se opta por determinar directamente las tasas de variación de la productividad, 26
  - Los índices de productividad aplicados a la comparación entre empresas, 28
5. Indicadores de productividad parcial
  - Productividad parcial aparente, 31
  - Relación entre los indicadores de Productividad Parcial y el de Productividad total (IPG, TFP), 34
6. Recapitulación: Relación entre Productividad, Coste Medio y Rentabilidad, 35
7. Técnicas o metodologías de análisis
  - Análisis longitudinal o temporal ('cross time'), 40
  - Eficiencia comparativa: empresa "A" <---> empresa "B" (cross section simple), 42
  - Eficiencia comparativa: varias empresas A <-----> varias empresas B, 44
    - Comparación de medias (análisis de la varianza), 45
    - Utilizar una función polinómica (lineal), 46
    - Funciones multiplicativas ('translog'), 48
    - Modelos tipo 'función de producción', 50
    - Modelos frontera (Funciones de producción frontera), 51
    - Función de producción frontera, no paramétrica.- AED, 54
    - Análisis (o Regresión) con Datos de Panel, 57
  - La cuestión de la fiabilidad, y de la relevancia de los resultados cuantitativos, 59
- Anexo I - Sobre Indicadores de Productividad Parcial, 61
  - Relación entre el indicador de productividad global,  $\Pi^x$ , y los indicadores de productividad parcial de cada factor,  $\Pi_j^x$ , 61
  - Productividad Parcial Aparente de los bienes de Capital (costes de amortizaciones), y Nivel de Ocupación, 62
- Anexo II- El índice de Malmquist aplicado a la comparación de productividad entre empresas, 66

## 1. LAS TRES DIMENSIONES DE LA EFICIENCIA PRODUCTIVA DE UNA EMPRESA

Las proposiciones de la economía normativa sobre el comportamiento socialmente óptimo ('eficiente') de una empresa pueden resumirse en que ésta opere con *eficiencia asignativa* a la vez que con *eficiencia productiva*. La primera se refiere al comportamiento de la empresa respecto al conjunto de la sociedad. En economía del bienestar –y bajo el típico supuesto simplificador de que la empresa en cuestión produce un solo bien- se considera que la eficiencia asignativa con la que opera será tanto más alta como próximo esté su precio de venta al coste medio mínimo que técnica y socialmente es posible, para el volumen de producto a suministrar de forma estable; es decir, el coste medio, a largo plazo, de máxima eficiencia productiva<sup>2</sup>. Y es a esta última –la eficiencia productiva, que se centra en el uso de los factores productivos por parte de la empresa (concretamente desde la perspectiva de la minimización de sus costes, dadas las unidades de output producidas)- a la que generalmente se refieren los estudios de eficiencia comparativa entre empresas.

Centrándonos en lo que sigue en la eficiencia productiva (o microeconómica, si se prefiere) ésta comporta a su vez dos dimensiones o componentes; utilizando la terminología habitual: *eficiencia de gestión* (o a corto plazo, considerando la dimensión o estructura de la empresa como dada) y *eficiencia de escala* (cuando la dimensión o estructura es la adecuada para el volumen de producción requerido). Sin embargo, cuando en la práctica se pretende, bien analizar el cambio en la eficiencia de una empresa a lo largo del tiempo, o bien comparar la *eficiencia* de varias empresas y explicar las diferencias observadas, se hace necesario introducir en este contexto habitual del análisis microeconómico una tercera dimensión o componente de lo que se entiende por 'que una empresa funcione eficientemente': la *eficiencia de adaptación-respuesta a los cambios*. Y se hace imprescindible además introducir el elemento 'calidad' del producto, pues ésta no es en realidad algo fijado o dado para un determinado bien –como, por simplificación, supone el concepto habitual de eficiencia productiva- sino que es algo susceptible de experimentar cambios tanto a mejor como a peor. Y, por supuesto, un diferente nivel de calidad puede explicar que la eficiencia de una empresa (medida por los respectivos costes medios, por ejemplo) sea diferente a la de otra. Veamos primero un resumen sobre las dos dimensiones 'estándar' de la *eficiencia productiva*, para pasar seguidamente a considerar lo que implica la tercera y, a continuación, abordar la relación entre eficiencia productiva y *eficacia* o calidad.

---

<sup>2</sup> Si la presión competitiva en el mercado del producto de la empresa es alta, podemos esperar que la eficiencia asignativa del conjunto de las empresas del mismo tenderá a su máximo: La fuerte competencia hará que cada empresa trate de minimizar su coste medio –para así poder reducir algo su precio y vender más (o, simplemente, para no quedarse fuera del mercado). En consecuencia tenderán a operar con una tasa de margen baja; la mínima para que les resulte interesante seguir operando como empresas en ese sector. E inversamente, si un bien o servicio está en manos de una sola empresa (monopolista) guiada por el criterio del beneficio, su tasa de margen tenderá a ser notablemente alta (la de maximización de resultados en régimen de monopolio) y por tanto la eficiencia asignativa será baja.

## 1.1 Eficiencia productiva ‘estándar’: Producir con los costes mínimos

Como se ha apuntado, el concepto habitual de *eficiencia productiva* de una empresa –en el sentido de operar con el coste medio mínimo posible, dada la calidad del producto y la cantidad a producir– comporta dos requisitos o condiciones: operar tanto con *eficiencia de gestión* (no malgastar recursos) como con *eficiencia de escala* (estar adecuadamente dimensionada).

### Eficiencia de gestión

Se entiende que una empresa funciona con plena *eficiencia de gestión* cuando, para suministrar a los consumidores o usuarios una determinada cantidad de bien (un producto o un servicio), lo hace con los costes totales menores posibles que le permite su estructura o dimensión en ese momento. Siempre y cuando, por supuesto, realice esta minimización de costes cumpliendo con las leyes (laborales, ambientales, sanitarias, etc.) y las costumbres laborales y sociales de la comunidad en la que opera.

Consideremos, por ejemplo, una empresa editorial, con una determinada estructura o dimensión (unas determinadas instalaciones de impresión, una plantilla de personal fijo, unos determinados locales...), y que ha colocado en el mercado un número concreto de libros durante el último año. Diremos que su *eficiencia de gestión* habrá sido mayor cuanto menor haya sido la suma de los costes en que ha incurrido para colocar tal producción en el mercado (costes del personal de preparación o de edición de los originales, derechos de autor, costes de papel y cubiertas, costes de impresión, de transporte y distribución de los libros, de publicidad y marketing, costes de administración, costes financieros, etc.). Es decir, cuanto menor resulte el coste medio por libro.

### Eficiencia de escala, y volumen estable de producción

Supongamos que, efectivamente, dada su estructura/dimensión, estos costes totales son los mínimos razonablemente posibles. Podría ser, sin embargo, que, teniendo en cuenta el número de libros que viene produciendo o colocando en el mercado, sus costes totales pudieran ser todavía menores si su estructura o dimensión fuera más grande (más pequeña). En tal caso –y si tal volumen de producción se prevé estable– diremos que la empresa funciona con eficiencia de gestión, pero no con *eficiencia de escala*, porque está sub-dimensionada (sobre-dimensionada). La *ineficiencia de escala* significa tener una estructura demasiado grande o demasiado pequeña para producir el volumen estable de output a colocar en el mercado. Una empresa en este sentido sobredimensionada tendrá un exceso de costes de carácter fijo. Y una empresa subdimensionada tendrá generalmente un exceso de costes variables, porque estará forzando su nivel de producción más allá del que corresponde a su capacidad productiva instalada.

Visto desde otra perspectiva: si, dado el número de libros que viene produciendo/ colocando en el mercado de forma estable, la empresa no hubiera alcanzado unos costes totales más bajos ni ahorrando costes corrientes ni redimensionándose, entonces es que está operando tanto con plena eficiencia de gestión como con eficiencia de escala: está obteniendo su actual volumen de *output* con los costes mínimos posibles, no sólo a corto plazo (dada su dimensión/ estructura) sino también a largo plazo, pues su dimensión/ estructura o capacidad de producción instalada es la adecuada a tal volumen de *output*.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup> Como sea que el verificar si tal supuesta eficiencia máxima de gestión y de escala se da o no es algo virtualmente imposible en la práctica, lo más realista es partir de la base de que en principio *todas las empresas son en alguna medida ineficientes*; y, en general, lo son más cuanto más grande es el poder de mercado de que disfrutan. *Ineficiencia-X* es el término acuñado para referirse a este hecho. El concepto fue

Desde luego, una empresa puede tener la dimensión/estructura adecuada para su nivel estable esperado de producción, pero a corto plazo –cada mes, por ejemplo- el volumen de producción real puede oscilar, debido, entre otras cosas, a variaciones en la demanda; bien sea por razones estacionales, o de tipo más bien aleatorio. Concretamente una caída de la demanda para una empresa que en principio está bien dimensionada hará que ésta opere con un *nivel de ocupación* de su capacidad productiva (la cual depende de su dimensión/estructura) inferior al 100%. Y, como consecuencia, aunque opere también con eficiencia de gestión tendrá un coste medio algo superior al de máxima eficiencia productiva.<sup>4</sup>

La realidad es dinámica

Una determinada situación de plena eficiencia productiva se romperá en el momento que el volumen estable de *output* -el número de libros al año, por ejemplo- cambie substancialmente. Lo que quiere decir que conseguir la eficiencia de escala implica un cierto proceso de eventuales adaptaciones de la dimensión de la empresa a lo largo del tiempo. Esta adaptación (sea incrementando o disminuyendo su capacidad/estructura) no significará necesariamente que el coste total *medio por libro* sea mayor o menor. Si el volumen de producción es claramente superior a lo que se entiende por *escala mínima óptima* (e.m.o.) del sector, la adaptación de escala será simplemente la manera de mantener el coste medio en su nivel mínimo absoluto. Si, por el contrario, el volumen anual de libros que produce la editorial es inferior a la correspondiente e.m.o., y se diese el caso de que –debido a incrementos de la demanda- la empresa va re-adaptando su capacidad productiva al alza, ello le permitirá pasar a trabajar con un coste medio por libro cada vez inferior, hasta el momento que eventualmente alcance el volumen correspondiente a la e.m.o.

Cuando se da esta situación concreta (producción actual inferior a la e.m.o.), la empresa está operando a un volumen para el cual decimos que existen *economías de escala* por realizar. Es decir, aunque actúe con eficiencia de gestión y eficiencia de escala (dimensión adecuada al volumen de producción que debe realizarse), el volumen de producción es demasiado pequeño para que a la empresa le salga a cuenta utilizar la dimensión/tecnología más barata. En tal caso, si es la única empresa editorial en producir el tipo de libros que produce (es decir, si disfruta de un cierto poder de monopolio), la situación de la empresa puede ser económicamente estable, e incluso con buenas perspectivas: si la demanda de estos libros evoluciona en el futuro al alza, la empresa podrá adoptar una dimensión superior, lo que significará normalmente trabajar con una tecnología más barata, y por lo tanto con unos costes medios inferiores. Pero si, por el contrario, sus libros tienen que competir con los de otras empresas de mayores dimensiones (que tendrán, por lo tanto, costes medios inferiores), la situación de la empresa no será sostenible a largo plazo, porque aunque funcione con plena eficiencia de gestión y con eficiencia de escala su volumen de producción es comparativamente pequeño

---

introducido por H. Liebenstein («Allocative Efficiency vs. X-Efficiency», en *American Economic Review*, 1966, junio, págs. 392-415) para referirse al fenómeno observado de la existencia de bolsas de ineficiencia en empresas privadas, aparentemente en contradicción con el objetivo de maximización de los beneficios. Se refiere a la existencia de un cierto exceso de costes, especialmente en el caso de empresas con poder monopolístico; exceso de costes que podría estar explicado por la falta de una efectiva presión competitiva sobre la empresa, lo que haría que en ésta se relajaran los esfuerzos por alcanzar una plena eficiencia productiva. Con el tiempo el concepto, *ineficiencia-X*, ha pasado a formar parte del lenguaje económico corriente.

<sup>4</sup> En el apartado segundo del Anexo I puede verse una aplicación concreta del concepto *nivel de ocupación*, como variable que incide en los indicadores de eficiencia de una empresa.

(inferior a la e.m.o.) y eso hace que tenga unos costes medios más altos que los de sus competidoras.

Obsérvese que esta última situación tendríamos que interpretarla como un signo de ineficiencia comparativa respecto a las competidoras, pero en un sentido de la eficiencia diferente a los dos anteriores. Eso nos lleva a la tercera dimensión de la eficiencia productiva de una empresa: la *eficiencia de adaptación/respuesta a los cambios* del binomio mercado y tecnología.

## 1.2 La tercera dimensión: Eficiencia de adaptación/respuesta a los cambios

Independientemente de su eficiencia productiva, la empresa editorial del ejemplo puede ser más o menos exitosa adaptándose a los cambios del mercado –principalmente cambios en los gustos o las necesidades de los consumidores- y/o adaptándose a las innovaciones tecnológicas. Adaptarse, en ambos aspectos, significará cambiar en alguna medida el tipo de libro o el servicio añadido que pueda darse con el libro. Comporta, en definitiva, *cambiar el tipo de producto* (o la gama de productos) que produce y vende. Por ejemplo, algunos libros técnicos se venden ahora con un programa de ordenador como complemento; y en general las nuevas tecnologías multimedia están cambiando las posibilidades del mundo editorial. Eso hace que por una parte en el sector se ofrezcan “nuevos productos” y, por otra, que como respuesta vayan cambiando también las demandas de los consumidores.

El binomio *eficiencia de gestión / eficiencia de escala* supone que el “producto” está dado (por ejemplo: suministrar electricidad; o libros de determinadas características; o un servicio de autobús entre los lugares A y B, con una frecuencia dada; etc.), y que lo que eventualmente va cambiando es el volumen que debe producir o colocar la empresa en el mercado cada año. Por el contrario, la eficiencia de adaptación aparece cuando consideramos que el propio producto que constituye la actividad de la empresa puede ser necesario ir modificándolo a lo largo del tiempo.

Las dos primeras dimensiones habituales de la eficiencia se resumen en: producir lo que tenga que producirse (una determinada cantidad de un bien con unas características dadas) incurriendo en los costes técnica y socialmente menores posibles; mientras que el concepto de *eficiencia de adaptación* tiene con ver con *qué es lo que tiene que producirse*.<sup>5</sup>

La ineficiencia de adaptación de una empresa –ya sea a las posibilidades que ofrecen los cambios tecnológicos, o a los cambios de los gustos o las necesidades de los usuarios/consumidores- se traduce normalmente en una paulatina reducción de la demanda para la empresa, y por lo tanto, en una gradual reducción de su actividad. Y si la ineficiencia de adaptación es significativa y persistente, fácilmente puede desembocar en que la empresa pase a tener pérdidas y tenga que plantearse su liquidación.<sup>6</sup>

Muchos de los temas que configuran los estudios de Administración y Dirección de Empresas, como *el análisis de la gama de productos idónea* o la *planificación estratégica*,

---

<sup>5</sup> Ciertamente, pueden haber casos en que esta cuestión de la adaptación dinámica de la actividad de la empresa no sea relevante. Por ejemplo, en el caso de las empresas que producen y suministran electricidad: el producto “kilovatios de electricidad” no parece admitir o estar sujeto a cambios cualitativos. Aunque, puede ser que ni estas empresas sean una excepción: no sería de extrañar, por ejemplo, que dentro de unos pocos años sea posible que a través de cualquiera de los enchufes eléctricos de las habitaciones podamos tener una videoconferencia y conectarnos a Internet. Tendríamos, entonces, a las empresas eléctricas ofreciéndonos también servicios de telecomunicaciones por la misma red eléctrica (lo que, entre otras cosas, les permitiría abaratar los dos productos).

<sup>6</sup> Obsérvese que esta situación de ir quedándose sin demanda es perfectamente compatible con el hecho de que la empresa vaya operando con plena eficiencia de gestión y que se vaya redimensionando a la baja adecuadamente (eficiencia de escala).

tienen que ver fundamentalmente con esta dimensión de la eficiencia; así como también las actividades de estudios prospectivos de mercados o las de investigación y desarrollo (I+D)<sup>7</sup>. Y las decisiones sobre firmar acuerdos o alianzas estratégicas con otras empresas, o sobre reorganizar la empresa en “unidades de negocio” relativamente autónomas, por ejemplo, están también relacionadas con la *eficiencia de adaptación*.

Todas estas cuestiones de adaptación dinámica son tan relevantes para las empresas privadas como para las públicas, incluidas las más tradicionales. Eso resultará seguramente evidente para empresas como las telefónicas (hasta hace poco, en general, empresas públicas), porque su “producto” (servicios de telecomunicaciones) ha experimentado un cambio notable en los últimos años; pero no es este un caso excepcional. Hemos visto, por ejemplo, como en España la compañía ferroviaria nacional Renfe ha ido transformando sus grandes estaciones ferroviarias en verdaderos centros comerciales y de servicios, al tiempo que modificaba/ampliaba su oferta (AVE, Euromed). Incluso la tradicional Correos anunciaba recientemente a los usuarios —por correo, claro— que ofrece ahora «una gama de servicios (nuevos o adaptados) que es conveniente que conozcamos».<sup>8</sup>

En resumen, el objetivo de que una empresa —pública o privada— funcione de forma eficiente (dejando aparte la dimensión social, es decir, la eficiencia asignativa) tiene tres niveles o dimensiones: eficiencia de gestión, eficiencia de escala y eficiencia de adaptación. Visto desde otra perspectiva: si una empresa que opera en competencia con otras funciona con pérdidas puede ser debido a una determinada mezcla de estos elementos: que opere con un exceso de costes corrientes (*ineficiencia de gestión*), que no esté bien dimensionada (*ineficiencia de escala*) o que no esté respondiendo adecuadamente en cuanto a adaptarse a los cambios tecnológicos y de mercado. Aunque también puede ser, simplemente, que las pérdidas se deban a que los precios que están dispuestos a pagar los usuarios/consumidores no sean (o hayan dejado de ser) suficientes para cubrir los costes de la empresa; con lo que su actividad es (o ha pasado a ser) de las económicamente no autofinanciables (en el sentido de “actividad no rentable”).<sup>9</sup>

- -

Planteado el panorama más o menos completo anterior, por razones prácticas y de método lo que sigue está referido a la medición y comparación de la *eficiencia productiva* en sentido estricto; a menos que no se haga referencia explícita a la ‘tercera dimensión’ relativa a la adaptación a los cambios de mercado y tecnológicos.

---

<sup>7</sup> Por supuesto, esta ‘eficiencia de adaptación al mercado’ no es un concepto novedoso. Es, de hecho, la idea en torno a la cual gira el concepto de ‘empresario /emprendedor dinámico/innovador’ Shumpeteriano.

<sup>8</sup> Bajo el lema publicitario «Tenemos soluciones rápidas para todo lo que *mandes*», el folleto describe los diferentes servicios estándares y los adaptables a las conveniencias del usuario. (Es fácil relacionar esta “diversificación” —así como esta primera publicidad masiva de Correos— con la necesidad de hacer frente a la competencia que le representan las numerosas empresas de mensajería).

<sup>9</sup> Este es el caso de muchos de los bienes que están subvencionados por los poderes públicos. Como determinados servicios culturales, de enseñanza o ciertos servicios de transporte, que socialmente se consideran importantes pero que dejados al juego del mercado no se producirían porque no son “rentables”.

## 2. EVALUACIÓN DE LA EFICIENCIA COMPARATIVA: LA CALIDAD (EFICACIA) Y OTROS REQUISITOS DE HOMOGENEIDAD PARA LA COMPARACIÓN

### 2.1 Alternativas: eficiencia absoluta, eficiencia comparativa

Los estudios que tratan de evaluar la eficiencia económica relativa de tal o cual empresa —o de un determinado tipo de empresas (públicas / privadas; locales / extranjeras; cotizadas/ cooperativas; ...— pueden ser de dos tipos: Analizar los resultados de la empresa ‘A’ en cuestión —sus indicadores económicos— a lo largo de varios años (análisis longitudinal); o bien comparar esos indicadores económicos con los de otra empresa, ‘B’, del mismo sector de actividad -por ejemplo, una empresa pública vs. una privada que realice una actividad similar y tengan un tamaño no demasiado dispar, o que sean comparables en algún otro sentido. El primer tipo de estudios (longitudinales, *cross time*) nos ofrece informaciones que se supone son significativas en sí mismas como indicadoras de “mala” o “buena” gestión en términos absolutos. O, más propiamente, como indicadores de que la eficiencia ha mejorado o empeorado en determinada proporción de un periodo a otro. Por ejemplo, un estudio que pone de manifiesto una evolución favorable, a lo largo de varios periodos, de los beneficios, los costes o la cuota de mercado de la empresa “Y”.<sup>10</sup>

El segundo tipo de estudios —los que comparan dos o más empresas: análisis horizontal, *cross section*— son los más abundantes en la literatura sobre el tema. El planteamiento conceptual de este tipo de estudios es, generalmente, relativista: se basa en no definir ningún valor ‘estándar’ que represente idealmente la eficiencia óptima de las empresas objeto de comparación, sino partir de la base de que todas ellas pueden de hecho más o menos ineficientes. En consecuencia, la aproximación adoptada consiste en determinar si el grado de ineficiencia/eficiencia, medido según un determinado indicador, es mayor en unas que en otras.

De hecho, un estudio de eficiencia absoluta (longitudinal) de una empresa o de un conjunto de empresas podemos considerarlo formalmente también como un estudio *comparativo*, puesto que consiste básicamente en comparar las cifras correspondientes a un año (de coste unitario, de productividad, ...) con las de otros años. Podemos hablar, pues, de ellos como de estudios de *comparación temporal*; y de los propiamente comparativos (*cross section*) como de *comparación interempresas*.

La cuestión clave para que las conclusiones de cualquier estudio de eficiencia comparativa puedan considerarse relevantes o válidas es si se da una homogeneidad razonable entre las empresas cuyos resultados económicos se van a comparar (o bien entre la actividad de la empresa en los diferentes años a comparar, si se trata de un análisis longitudinal). Solo así podremos afirmar que las diferencias que muestre el indicador de eficiencia reflejan efectivamente diferente eficiencia productiva y no otros elementos. Hay dos causas básicas de que tal homogeneidad no se dé realmente: 1) heterogeneidad en la actividad económica (el tipo de output, o la gama de productos); 2) diferentes niveles de calidad o eficacia en el suministro del bien o servicio.

<sup>10</sup> Generalmente, cuando este tipo de estudios están hechos desde dentro de la propia empresa, con destino a sus propietarios —en el caso de una EP, por encargo de la Administración pública que ejerce los derechos de propiedad— se habla de una *auditoría de gestión*.

En estudios comparativos interempresas, la condición de homogeneidad en cuanto a la actividad económica (bienes o servicios suministrados) es imprescindible para que al comparar sus respectivos indicadores de eficiencia productiva las diferencias observadas puedan ser atribuidas a la gestión más o menos exitosa de una u otra empresa, y no a que en realidad operan negocios distintos.

El riesgo de que se de esta heterogeneidad en un estudio es alto en el caso de utilizar fuentes secundarias para los datos, pues normalmente éstas ofrecen cifras agregadas que engloban empresas que suministran outputs en realidad distintos. Por ejemplo, dentro de la agrupación ‘empresas textiles’ de una base de datos económico-contables estarán normalmente incluidas empresas cuya actividad principal es tan diferente como: producción de hilo, confección de prendas de vestir, o servicios de tinte y apresto. Si calculamos el valor del tal o cual indicador de eficiencia a partir de los valores agregados para ‘empresas textiles’ que nos suministra la base de datos, y lo comparamos con el valor del indicador calculado para la empresa A, productora de tejidos de fibra, cuya eficiencia comparativa queremos evaluar, la diferencia que muestre dicho indicador no nos dirá nada especialmente útil.

Para estudios de tipo longitudinal también es necesaria esta condición de homogeneidad, aunque al tratarse de comparar los resultados económicos de diferentes años para una misma empresa, la homogeneidad en cuanto al tipo de actividad económica puede tomarse como dada; aunque no siempre es así, ya que la empresa analizada puede también haber cambiado substancialmente su actividad económica (su output, o la composición de éste) durante los años estudiados.

También la falta de homogeneidad respecto a la calidad es frecuentemente que sea soslayada en los estudios comparativos. El *output* de la empresa A, aun siendo exactamente el mismo que el de la empresa B, con la que se quiere efectuar la comparación (por ejemplo, “servicio de transporte marítimo Barcelona-Génova”), puede ser significativamente diferente en lo que concierne a sus niveles de calidad o de eficacia en la prestación del servicio.<sup>11</sup> Y ocurre que generalmente a más calidad para un mismo *output*, más elevados son los costes de la empresa productora (y, por lo tanto, la medida de su eficiencia económica resultará inferior). Veamos esto más detenidamente:

## 2.2 La evaluación de la gestión: Eficiencia, Eficacia (calidad), y su relación

Evaluar la gestión llevada a cabo por una empresa durante un periodo significa, principalmente, analizar la evolución de sus indicadores económicos para cada año de ese periodo. Y esta evaluación es lógicamente una cuestión clave para sus titulares o propietarios, que han delegado la gestión diaria de la empresa en un/a profesional; y ello tanto si hablamos de empresas públicas (EP) como de empresas privadas. Pero lo que no es tan obvio es que para realizar tal evaluación se hace necesario tomar en cuenta no solo medidas de *eficiencia* sino también de la *eficacia* (o *calidad*), pues el nivel de la segunda afecta, normalmente en sentido contrario, a los indicadores que miden la primera.

Por *eficacia* en el suministro de un bien se entiende la medida en que una empresa o cualquier organización está efectivamente cubriendo las demandas, necesidades o expectativas de sus usuarios/clientes de forma satisfactoria. Eso quiere decir, normalmente,

---

<sup>11</sup> En el caso de un análisis longitudinal, este motivo de heterogeneidad consistiría en que los niveles de calidad o eficacia del servicio sean diferentes de un año a otro.

que el bien o servicio prestado a los clientes/usuarios lo ha sido en la forma (en cuanto a regularidad, garantía de servicio, no colas de espera, ..etc.) y, sobre todo, la *calidad* requerida o esperada. Eficacia –o calidad- que suele poderse concretar mesurando diferentes atributos (indicadores) del bien, según sea la naturaleza de éste. Por ejemplo ¿qué proporción de cartas es entregada por Correos al día siguiente de ser depositadas en el buzón? o, ¿cuál es el grado de puntualidad de los trenes de la línea L? o, ¿cual es la duración del viaje, el grado de seguridad, y el de confortabilidad de el servicio de autobuses A? ¿cuál es la *gama de servicios* médicos o de diagnóstico que presta un centro sanitario? ¿ídem, la de un servicio de asistencia a usuarios de ordenadores?

No ha de sorprender, por tanto, que los usuarios/consumidores, y las asociaciones representativas de estos, estén especialmente interesados en el mantenimiento o incremento de los indicadores de *eficacia* o calidad de la prestación de ciertas empresas – sobre todo de servicios públicos (sean éstas públicas o privadas)-, más que en la mayor o menor *eficiencia* con la que operen dichas empresas. Serán en todo caso a sus propietarios a quines preocupará su nivel de eficiencia.

Ocorre, sin embargo, que los niveles de *eficacia (calidad)* y de *eficiencia* de una empresa están relacionados, como es fácil deducir. Y concretamente *están, en general, inversamente relacionados*.

Dicho brevemente, la medida de la *eficiencia* tienen que ver con la relación entre el volumen del bien o servicio suministrado y el consumo de factores, o costes, en que ha incurrido la empresa. Por eso son indicadores típicos para medir el grado de eficiencia los costes unitarios, o la productividad. Y por otra parte, la eficacia o calidad se mide mediante indicadores de atributos del output. En ciertos casos es posible incrementar la eficacia o calidad sin que haya repercusiones en los costes de producción; bien sea porque se ha podido mejorar la forma en que se organizan y utilizan los factores (especialmente el trabajo), o porque se ha introducido una determinada innovación tecnológica. Pero, normalmente no es así: Aumentar en alguna medida la *eficacia* (alguno de los atributos que definen la calidad o prestaciones del producto o servicio) significa que su coste unitario aumentará; y que, en consecuencia, la *eficiencia aparente* de la empresa disminuirá. Y a la inversa: una fuerte presión, por parte de los propietarios, sobre la dirección de la empresa, en la línea de que ésta aumente su grado de eficiencia (lo que, normalmente significa que reduzca sus costes, dado un determinado nivel de producción) lleva en muchos casos a la dirección de la empresa a reducir en alguna medida la calidad o el nivel del servicio prestado a los usuarios<sup>12</sup>.

Por supuesto, se trata de una cuestión general, no específica de la gestión de un tipo de empresas u otro: normalmente, aumentar en un determinado aspecto la calidad de un bien o de un servicio implica inevitablemente incrementar su coste unitario (suponiendo que el grado de eficiencia *real* con el que opera la empresa suministradora no varíe). Obsérvese que esta última afirmación puede parecer contradictoria con lo que se ha dicho antes, pero es que nos estamos refiriendo ahora a la *eficiencia como tal*, no al valor del *indicador utilizado para medirla*. Una cosa es considerar el coste unitario como un indicador para medir la eficiencia, y otra es la eficiencia en sí de la empresa, puesto que el coste unitario de un bien o de un servicio depende también de los niveles de calidad que quieran mantenerse para el mismo. Es por ello que para que una variación en los costes unitarios de un periodo a otro podamos interpretarla como la repercusión de un cambio en la eficiencia

---

<sup>12</sup> No siempre, evidentemente. Si la empresa no está operando con plena eficiencia productiva, la referida presión de los propietarios a reducir costes puede traducirse total o parcialmente en un intento por parte del/la gerente de la empresa de eliminar costes realmente innecesarios; es decir, de pasar a producir efectivamente de forma más eficiente sin alterar los niveles de eficacia o calidad.

productiva propiamente dicha de una empresa, debería darse que los niveles de calidad o de eficacia referidos al bien o al servicio producidos fuesen idénticos (o al menos comparables) en ambos períodos. Y lo mismo es válido para diferencias entre los costes unitarios (o cualquier otro indicador utilizado para medir la eficiencia) de dos empresas: para que la diferencia podamos atribuirla a que una empresa tiene una eficiencia productiva superior a la de la otra es necesario que los niveles de calidad o de eficacia de ambas sean los mismos.<sup>13</sup>

### 2.3 Cuestiones adicionales en la comparación entre Empresas Públicas (EP) y Empresas Privadas (ER)

Un problema específico en cuanto a la necesaria homogeneidad respecto a la actividad económica (tipo de output) es que no siempre existen empresas privadas comparables a la EP cuya eficiencia se querría evaluar; por ejemplo, en los casos de ciertas grandes EP de servicios públicos (como ferrocarriles): Al estar en situación de monopolio, difícilmente pueden compararse con otras empresas privadas que realicen la misma actividad. Esta limitación explica que en estos casos los estudios empíricos se orienten a comparar la EP en cuestión con otra/s, de la misma actividad, de otros países (en general también EP). Pero esto comporta un nuevo tipo de heterogeneidad: El marco institucional (laboral, fiscal, medioambiental, usos sociales, ...) es entonces distinto; como también en general lo son los precios y salarios relativos. Y todo esto influye sobre los respectivos costes unitarios (o sobre el valor del que sea el indicador de eficiencia utilizado). La solución consistiría desde luego en, una vez determinado el diferencial de eficiencia, aislar la parte que puede atribuirse al diferente marco económico-institucional; pero esto resulta en la práctica extremadamente complejo (por lo que tiende –también– a soslayarse).

No obstante, el elemento específico de heterogeneidad más relevante es la posible existencia de repercusiones negativas sobre las cuentas de la EP cuya eficiencia comparativa se quiere evaluar, debido a que ésta haya sido utilizada por el gobierno para objetivos sociales extra-productivos. Y constituye un problema para la evaluación de la eficiencia comparativa en la medida en que no es habitual que el investigador disponga de información sobre el importe de dichas repercusiones negativas (costes extras y/o de minoraciones de ingresos).<sup>14</sup> Repercusiones que no existirán en el caso de la/s empresa privada con la que se vaya a comparar.

Así, para que indicadores como “tasa de margen”, “productividad” o “coste unitario” puedan aceptarse como útiles o válidos para hacer comparaciones de eficiencia, es necesario que los valores registrados por las cuentas de la EP objeto de estudio no estén afectados negativamente por causa de obligaciones de servicio o por condicionamientos gubernamentales relativos a objetivos políticos o de política económica. Esto se dará, desde luego, cuando la EP no haya sido utilizada como instrumento de política económica ni se le hayan impuesto obligaciones de servicio sobre sus actividades. O bien cuando, en caso de existir estas intervenciones gubernamentales, los posibles *costes de intervención*

---

<sup>13</sup> Un ejemplo simple: Con una misma eficiencia productiva en el uso de los factores, una empresa tendrá un coste unitario más alto si, por ejemplo, produce una camisa con tejido de algodón que si lo hace con una materia prima más barata, como cierta fibra de poliéster.

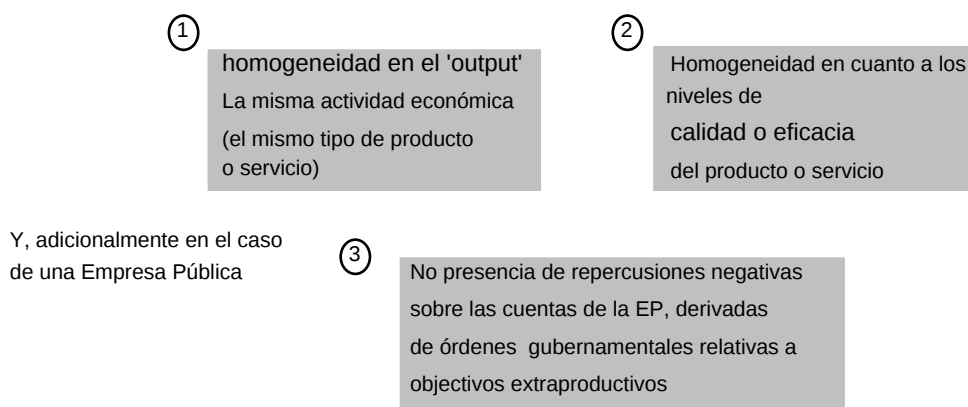
<sup>14</sup> Si nos referimos a estudios de comparación temporal, la falta de homogeneidad de las cifras por este motivo provendrá de que las mencionadas repercusiones negativas serán probablemente diferentes de un año a otro.

generados hayan sido compensados, mediante los correspondientes pagos de la Administración pública a la EP, dentro del mismo ejercicio contable.<sup>15</sup>

Visto desde otra perspectiva: si la EP objeto de estudio es utilizada para objetivos de política económica (como por otra parte es normal y lógico que lo sea, puesto que es uno de los motivos de que, históricamente hablando, existan EP) y los *costes de intervención* que tal utilización ha generado a la empresa no han sido compensados financieramente por el Gobierno en el mismo ejercicio económico, el resultado contable (beneficio o pérdida) que presenten las cuentas de la EP no será representativo de su funcionamiento económico. Como, por la misma razón, tampoco lo será el indicador de coste medio, pues una parte de los costes totales que lo determinan no existirían de no haberse dado la intervención gubernamental. Y, como veremos más adelante, tampoco evitaríamos este problema recurriendo a un indicador de productividad, porque vendría igualmente afectado por un cierto exceso en el consumo de factores, derivado de la intervención gubernamental.

En resumen, si las empresas pertenecen al mismo país (marco institucional-social):

Condiciones de homogeneidad entre las empresas a comparar



### 3 INDICADORES PARA MEDIR LA EFICIENCIA PRODUCTIVA DE CUALQUIER EMPRESA O ENTIDAD

El coste medio (CM) es, en principio, el indicador ideal para —haciendo comparaciones con el coste medio de otra empresa o con un coste medio mínimo teóricamente alcanzable— medir la eficiencia económica con la que opera una determinada empresa (competitividad); al igual que una medida de su productividad nos permite evaluar específicamente su eficiencia productiva. El problema, como sabemos, es que en el caso más habitual —que es el de empresas multiproducto— no es posible realizar el cálculo del coste unitario de cada producto sin hacer supuestos arbitrarios sobre el reparto de los

<sup>15</sup> O bien sería necesario que las cifras de costes, ingresos y beneficios fueran *corregidas* como si la compensación se hubiera realizado.

costes comunes<sup>16</sup>. No obstante, son posibles aproximaciones razonables en la medición de la eficiencia productiva utilizando *indicadores globales* (referidos al conjunto de la actividad de la empresa) como: tasa de margen, tasa de costes sobre ingresos, la propia cifra de beneficios de la empresa, o un indicador de productividad global. Precisaremos a continuación las respectivas definiciones de los indicadores más habituales, pensando en su aplicación en la práctica. Esto significa, sobre todo, tener en cuenta que, cuando se aplican estos indicadores, los datos cuantitativos de base de que se dispone son -en la mayor parte de los casos- los que aparecen habitualmente en las cuentas de resultados y en los informes anuales (“memorias”) de las empresas.

### 3.1 Indicadores de “Resultados” (beneficios)

(1) *Resultado* propiamente dicho, en valor absoluto. El Resultado que presenten las cuentas de una empresa puede tomarse como indicador de eficiencia, aunque —como es bien conocido— comporta limitaciones que pueden llegar a invalidarlo para tal fin. Un resultado positivo (beneficio) no es necesariamente la consecuencia de una gestión eficiente<sup>17</sup>, ya que la empresa puede no actuar en un mercado competitivo sino en condiciones de monopolio u oligopolio<sup>18</sup>. Y un resultado negativo (pérdidas) no necesariamente es un indicador fiable de ineficiencia, porque las pérdidas pueden ser el resultado conjunto de varias causas: 1) un funcionamiento ineficiente; 2) una caída brusca de la demanda; y —en el caso de una EP— 3) que venga obligada a aplicar precios políticos; y/o 4) que tenga unos costes adicionales como consecuencia de ser utilizada por el gobierno para determinados objetivos macroeconómicos y sociales.

Salvadas estas cuestiones, en todo caso el concepto de resultado o beneficio a tener en cuenta cuando se pretende hablar sobre el grado de eficiencia productiva de la empresa tendrá que ser el que en la terminología contable se entiende por *beneficio de la explotación* (o *beneficio operativo*), el cual excluye, 1) los gastos financieros que pueda tener la empresa<sup>19</sup> (y los posibles ingresos financieros), 2) los posibles ingresos y costes ajenos a la producción del *bien* o servicio que constituye la actividad propia de la empresa, así como 3) los de carácter extraordinario<sup>20</sup>.

$$\text{Beneficio de la explotación} = \text{Ingresos de la Explotación} - \text{Costes de la Explotación}$$

$$BE = IE - CE$$

El concepto de *CE* se corresponde con lo que en terminología más típicamente económica sería ‘el valor monetario del consumo de factores’ par un período:  $CE \equiv \sum_j F_j \cdot K_j$  (donde  $F$  representa la cantidad de factor ‘j’ consumida, y  $K$  su precio de adquisición (medio)). De la misma manera que el concepto de *IE* se corresponde con el de ‘valor monetario del output

<sup>16</sup> Véase, por ejemplo, capítulo G (apartado 24) de *Economía Pública Industrial*, J. Vergés, Departamento de Economía de la Empresa, UAB (2000).

<sup>17</sup> Entendiendo la eficiencia empresarial en el sentido amplio definido en el primer apartado: eficiencia de gestión, más eficiencia de escala, más eficiencia de adaptación.

<sup>18</sup> Poseer una patente es ya, por ejemplo, disfrutar de una situación monopolística sobre un producto, servicio o procedimiento productivo.

<sup>19</sup> Conviene que queden excluidos estos gastos —que corresponden a los intereses del endeudamiento no comercial que tiene la empresa— ya que el hecho de que estos gastos sean superiores o inferiores depende de la estructura de financiación de la empresa (que es en última instancia una decisión de política empresarial de los máximos responsables de la empresa) y no de que la empresa en un periodo determinado produzca un producto o servicio concreto en menor o mayor cantidad.

<sup>20</sup> Para una definición más rigurosa de *Beneficio de la Explotación* (u *Operativo*) se remite a un manual de contabilidad.

suministrado' durante el mismo periodo:  $IE \equiv \sum_i q_i \cdot P_i$  (donde  $q$  representa la cantidad del bien 'i' colocada en el mercado, y  $P$  el precio (medio) al que se ha facturado.

(2) *Tasas de beneficios* (o beneficio relativo). El beneficio en valor absoluto tiene, como indicador, la indudable ventaja de la sencillez, sin embargo no siempre resulta útil. Por ejemplo, no lo es demasiado cuando queremos comparar los resultados económicos de dos empresas de tamaño o volumen de actividad muy diferentes. Debido a ello se ha generalizado la utilización preferente de las tasas de beneficio, que representan valores relativos y que, por lo tanto, son válidas para comparar empresas de diferentes tamaños. En capítulos anteriores hemos visto precisamente una de estas tasas, la tasa de margen (con sus dos variantes: sobre costes, y sobre ingresos) utilizada en la formulación del criterio de gestión-socialmente-óptima de una empresa. Sólo hace falta añadir ahora la misma precisión práctica realizada respecto al Beneficio:

$$\text{Tasa de margen sobre Ingresos: } m = \frac{\text{Beneficio de la Explotacion}}{\text{Ingresos de la Explotacion}} = \frac{BE}{IE}$$

La otra medida más habitual del beneficio relativo es la *tasa de rentabilidad*. Y, concretamente para nuestro tema, la *tasa de rentabilidad de la explotación*:

$$r = \frac{\text{Beneficio de la Explotacion}}{\text{Capital o Inversion Financiera Total}} = \frac{BE}{FP+EF} = \frac{BE}{RT}$$

FP = fondos propios; EF = Exigible financiero (= créditos o endeudamiento no comercial)

Y, menos utilizada como indicador pero igualmente útil, está también la *tasa de Ingresos sobre Costes*,

$$\frac{IE}{CE} = 1 + m' ; (m' = \text{tasa de margen sobre costes})$$

tasa que puede interpretarse como una cierta aproximación a la relación Output/Input global.

Para interpretar los valores que se obtengan de estas variables en una aplicación dada, es importante tener en cuenta que entre  $r$  y  $m$  existe una bien conocida relación funcional: la primera depende en parte de la segunda:

$$r = \frac{BE}{RT} \equiv m \cdot \frac{IE}{AE} \cdot \frac{AE}{RT}; \quad \text{donde AE=Valor del Activo de la Explotación}$$

Es decir, que la tasa de margen es concretamente una variable explicativa de la variable rentabilidad, la cual (la rentabilidad) depende además de una variable de tipo técnico,  $IE/AE$  (ingresos por unidad de inversión en activos), y de una variable relacionada con la estrategia financiera de la empresa,  $AE/RT$  (índice de financiación con crédito comercial, en cual –a diferencia de EF- no genera coste financiero).

### 3.2 Indicadores de costes medios

Si estamos ante un caso de empresa uni-producto (por ejemplo una empresa productora de electricidad), el coste medio unitario será posible y fácil de calcular; y, evidentemente, útil para cualquier consideración sobre eficiencia productiva:

$$\text{Coste medio: } CM = \frac{\text{Costes de la explotación}}{\text{Unidades de producto}} = \frac{CE}{q}$$

En el caso general de empresa multiproducto el cálculo de los diferentes CM choca con la dificultad ya mencionada de la arbitrariedad del posible reparto de los costes comunes. Además de que las cuentas de resultados que habitualmente se publican de las empresas no suelen llevar información sobre los costes totales en forma desglosada, en el sentido de distinguir entre costes específicos para cada producto y costes comunes. Por lo que ni siquiera un cálculo ‘arbitrario’ de los respectivos CM para cada producto es posible de realizar. Un indicador alternativo –si bien de significado excesivamente genérico- es el de *tasa de costes sobre ingresos*:

$$\text{Tasa de costes s/ ingresos: } tc = \frac{\text{Costes de la explotación}}{\text{Ingresos de la explotación}} = \frac{CE}{IE}$$

Aunque, ciertamente, esto equivale a medir, en otros términos, lo mismo que mide la anteriormente referida tasa de margen sobre ingresos<sup>21</sup>, ya que:  $1 - (CE/IE) = m$

En determinados casos de empresas multiproducto hay sin embargo otra alternativa: calcular un coste unitario *como si se tratara de una empresa uniproducto*, dividiendo los costes totales por una cantidad (Q) que pueda considerarse como representativa del conjunto de las unidades de los diferentes *outputs* de la empresa,  $Q=f(q_i)$ . Eso es, por ejemplo, lo que se acostumbra a hacer al analizar empresas de transporte de pasajeros:

$$“CM” = \frac{\text{Costes de la explotación}}{n^{\circ} \text{ de Pasajeros – kilometro}} = \frac{CE}{Q}; \quad Q = \sum_i q_i \cdot km_i$$

Donde:  $q_i$  = n° de pasajeros de la línea ‘i’;  $km_i$  = Distancia o recorrido de la línea ‘i’, en km.

En cualquier caso, entre la variable *m* y la variable *CM* existe también una –menos conocida pero no por ello menos útil- relacional funcional, en la que la segunda es una variable explicativa de la primera. La relación es especialmente clara en el caso de que la empresa produzca un solo bien:

$$m \equiv 1 - \frac{CE}{IE} \equiv 1 - \frac{CE}{q \cdot P} \equiv 1 - CM \cdot \frac{1}{P} \quad ; \text{ siendo: } P = \text{Precio de venta};$$

### 3.3 Indicadores de productividad

*Las bases*

Productividad y eficiencia productiva son conceptos casi sinónimos. En el caso de una empresa que produjese un solo *output* a partir de un solo *input*, la definición general de productividad,

$$\text{Productividad} = \frac{\text{Unidades de producto (output) producidas (suministradas)}}{\text{Unidades de factor (input) utilizadas para ello}} = \frac{q}{F} = \Pi$$

sería perfectamente calculable. Y, como puede verse, si la inversa de la productividad la multiplicamos por el precio del factor obtenemos precisamente el coste medio del producto, (CM).

$$\frac{F \cdot K}{q} = CM \quad ; \text{ donde } K = \text{precio de compra/contratación del factor.}$$

<sup>21</sup> Así como también lo mismo que mide, a la inversa, la tasa de Ingresos sobre Costes referida antes.

Productividad y coste medio son pues, en cierto modo, dos maneras de medir la misma realidad, siempre que el precio del factor no variase. Pero como los precios de los factores suelen variar en el tiempo, y/o o ser diferentes de una empresa a otra, si de lo que se trata es de comparar la eficiencia de una empresa pública con la de una privada que produce el mismo tipo de bien (o se trata de comparar la eficiencia de la EP en el año '1' con la observada en el año '0'), la diferencia que se observe entre los respectivos costes medios puede tener dos causas: que la productividad sea diferente, y que el precio pagado por el factor sea diferente.

$$CM^1 = \left( \frac{F \cdot K}{q} \right)^1 ; CM^0 = \left( \frac{F \cdot K}{q} \right)^0 ; CM^1 \leftarrow \text{causas de la } \neq \rightarrow CM^0$$

donde '1' = empresa pública (o año en estudio); '0' = empresa privada (o año anterior)

y explicitando ambas componentes de (la inversa del) coste medio: *productividad* ( $\Pi$ ) y precio de compra ( $K$ ):

$$\frac{q^1}{F^1} \cdot \frac{1}{K^1} \quad (\neq?) \quad \frac{q^0}{F^0} \cdot \frac{1}{K^0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi^1 = q^1 / F^1 \quad (\neq?) \quad \Pi^0 = q^0 / F^0 \\ K^1 \quad (\neq?) \quad K^0 \end{array} \right.$$

En muchos casos el interés de la investigación se centra en la productividad, y no en el coste unitario, por entender que el hecho de que el precio de coste del factor (salario, por ejemplo) sea diferente puede responder a decisiones políticas (de política de empresa) y no a que la gestión de la empresa haya sido más o menos eficiente. O, simplemente, el interés de la investigación se centra en la productividad porque se considera relevante aislar este elemento como sinónimo de eficiencia productiva. En definitiva, que un menor coste medio no necesariamente indica que la eficiencia sea mayor, puesto que este indicador depende también del precio que se paga por el factor.

Centrándonos en el indicador de productividad, hay que destacar que la variable más utilizada no es tanto el valor en sí de la productividad ( $\Pi$ ) sino, bien su índice de variación ( $\pi$ ), o bien su tasa de cambio en el periodo estudiado ( $t$ ):

$$\text{índice de variación, } \pi = \frac{\Pi^1}{\Pi^0} ; \quad \text{tasa de variación nominal, } t' = \pi - 1$$

$$\text{tasa de variación equivalente continua}^{22} \quad t = \ln \left( \frac{\Pi^1}{\Pi^0} \right)$$

En la literatura sobre el tema se ha impuesto la segunda versión de la tasa de variación, por las facilidades de cálculo que permite. Y, especialmente, porque esta tasa,  $t$ , también puede expresarse en términos de la diferencia entre la tasa de cambio en el producto y la tasa de cambio en el factor:

$$t = \ln \frac{q^1}{q^0} - \ln \frac{F_j^1}{F_j^0} \equiv q^\wedge - F^\wedge$$

y es esta metodología la que quizás más frecuentemente encontraremos en las publicaciones y trabajos sobre el tema; probablemente por la ventaja que tiene de mostrar

<sup>22</sup> Ambos tipos de tasas dan valores similares cuando el cambio observado es relativamente pequeño. Por ejemplo:  $(42/40)-1 = 0,05$  , (+5%) ; y  $\ln(42/40) = 0,049$  , (+4,9 %).

algo así como las dos componentes que determinan la tasa de variación de la productividad:  $t = q^{\wedge} - F^{\wedge}$ .

Ejemplo numérico ilustrativo de las variables o indicadores expuestos hasta aquí

| Año '0' (base)                    |                                                                | Año '1' (año en estudio)                                                          |                         |          |
|-----------------------------------|----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|----------|
|                                   | 9.000 €<br>= 3.000 × 3 €<br>7.200 €<br>= 600 × 12 €<br>1.800 € | Ingresos (IE)                                                                     | 15.381,6<br>= 4.524×3,4 |          |
|                                   |                                                                | Costes totales (CE)                                                               | 11.310<br>= 870 ×13     |          |
|                                   |                                                                | Beneficio (BE)                                                                    | 4.071,6                 |          |
| 2,4                               | 7.200/3000                                                     | Coste medio (CM)                                                                  | 11.310/4524             | 2,5      |
| 5                                 | 3000/600                                                       | Productividad (I)                                                                 | 4524/870                | 5,2      |
| 20 %                              | 1800/9000                                                      | Tasa de margen (m)                                                                | 4.071,6/15.381,6        | 26,47 %  |
| 1,25                              | 9000/7200                                                      | Ingresos/Costes                                                                   | 15.381,6/11.310         | 1,36     |
| 1,25                              | "                                                              | Ingresos <sup>0</sup> /Costes <sup>0</sup>                                        | (4524×3)/(870×12)       | 1,3      |
| 2,4                               |                                                                | Coste medio <sup>0</sup>                                                          | (870×12)/4.524          | 2,307    |
|                                   | 4.500                                                          | Recursos Totales                                                                  | 7.000                   |          |
|                                   | 7.500                                                          | Activo de la Expl.                                                                | 13.000                  |          |
| 40 %                              |                                                                | Tasa de rentabilidad s/rt                                                         |                         | 58,2 %   |
|                                   | + 3,992 % (t)                                                  | Tasa de cambio en la Productividad (t')                                           |                         | + 4, - % |
|                                   |                                                                | Tasa de cambio en el coste medio                                                  |                         | + 4,2 %  |
|                                   | - 3,952 % (t)                                                  | Tasa de cambio en el coste medio <sup>0</sup> (a precio de compra constante) (t') |                         | - 3,85 % |
| q <sup>^</sup> - F <sup>^</sup> = | q <sup>^</sup> = + 41,078 %                                    | Tasa de cambio en el Producto (q <sup>^</sup> ) ( ' )                             |                         | + 50,8 % |
| +3,992 %                          | F <sup>^</sup> = + 37,156 %                                    | Tasa de cambio en el factor (F <sup>^</sup> ) ( ' )                               |                         | + 45,0 % |
|                                   |                                                                | Tasa de cambio en la ratio Ingresos/Costes ( ' )                                  |                         | + 8,8 %  |
|                                   | + 3,992 %                                                      | Tasa de cambio en la ratio (Ingresos) <sup>0</sup> /(Costes) <sup>0</sup> ( ' )   |                         | + 4, - % |
|                                   |                                                                | (.) <sup>0</sup> = a precios constantes, del año base                             |                         |          |

El principal problema en la práctica es, sin embargo, cómo cuantificar la productividad en un caso 'normal', entendiendo por tal aquel en el que –contrariamente al ejemplo numérico anterior- la empresa no sólo utiliza, como es inevitable, más de un factor (personal, materiales, energía...) sino que produce o suministra más de un *output* (empresa multiproducto). Las soluciones habituales a este problema de la medición de la productividad consisten en utilizar, bien *indicadores de productividad parcial* (para un factor determinado), bien un *indicador de productividad global*. Vayamos por partes.

*Indicador de Productividad Global.- Situación simplificada: Empresa uni-producto*

Supongamos que la empresa (o las empresas a comparar) producen un solo output, a partir, como es habitual, de varios factores. En tal caso no hay problema, por ejemplo, para calcular el coste medio de cada año (si se trata de una comparación temporal, año 1 / año 0, para una empresa) o el coste medio de cada empresa (si se trata de una comparación entre empresas: empresa 1 / empresa 0),

$$CM = \frac{\sum_j F_j \cdot K_j}{q} ; \quad j = 1, 2, \dots \text{denota los diferentes factores}$$

pero si que hay problema en cuanto a calcular la productividad. Una posibilidad es, por supuesto, calcular para cada año (o para cada empresa)<sup>23</sup> tantas *productividades parciales* como factores,

$$\Pi_j = \frac{q}{F_j} ; \text{ por ejemplo : } \frac{\text{Toneladas de cemento}}{\text{Horas de trabajo directo}}$$

Pero si lo que se pretende es una medida global de la productividad de la empresa no es posible construirla a partir de esos valores de productividad parcial, pues son medidas heterogéneas entre sí. En lugar de ello, está ampliamente aceptada como definición de la *productividad global* de la empresa el cociente entre las unidades de producto y un agregado de los factores, a modo de ‘cifra de input global’. Siendo tal agregado una cifra consistente en la suma de las diferentes cantidades de factores, ponderadas con unos determinados pesos o parámetros:  $\sum_j F_j \cdot \sigma_j$ . Unos parámetros ( $\sigma_j$ ) o constantes que serán siempre los mismos para los cálculos del ‘input global’ de cada año (o de cada empresa). Generalmente se conviene en tomar como tales pesos los precios de compra o contratación de los respectivos factores para un periodo determinado, periodo ‘0’:  $\sigma_j = K_j^0$ . Con este procedimiento, la cifra resultante como agregado de los factores para un año determinado equivale a los costes totales de la empresa para ese año, recalculados a precios constantes (a precios del año base). Así, si de lo que se trata es de calcular (comparar) la productividad de una empresa uni-producto en dos años consecutivos, ‘0’ y ‘1’, los respectivos indicadores de productividad global serán:

$$\Pi^1 = \frac{q^1}{\sum_j F_j^1 \cdot K_j^0} ; \Pi^0 = \frac{q^0}{\sum_j F_j^0 \cdot K_j^0} ; \quad t = \ln \left( \frac{\Pi^1}{\Pi^0} \right) \quad [1]$$

Por otra parte, este cálculo es totalmente equivalente -si lo que nos interesa es concretamente determinar *en cuanto ha cambiado* la productividad- a utilizar la forma de calcular la tasa de variación de la productividad,  $t$ , como: la diferencia entre la tasa de cambio en el producto menos la tasa de cambio media de los factores:

$$t = \ln \frac{\Pi^1}{\Pi^0} \equiv \ln \frac{q^1}{q^0} - \ln \sum_j \frac{F_j^1}{F_j^0} \cdot a_j^0 \quad [2]$$

$$\begin{aligned} \text{ó: } t &= q^\wedge - \ln(\text{media ponderada de los índices de variación de los factores}) \\ &\equiv q^\wedge - (\text{tasa de variación media de los factores}); \quad t = q^\wedge - F^\wedge \end{aligned}$$

donde  $a_j^0$  es la proporción que el factor ‘j’ representa en los costes totales del periodo tomado como base: periodo ‘0’

<sup>24</sup>. (Puede verificarse que, efectivamente, ambos cálculos de la tasa de variación  $t$  -[1] y [2]- dan el mismo resultado).

### El caso general

Pasemos ya al caso estadísticamente más normal: empresas que producen, como es habitual, varios productos distintos, a partir de varios factores. El *índice de productividad*

<sup>23</sup> La comparación temporal y la comparación entre empresas es formalmente idéntica. Toda expresión referida a la comparación temporal es aplicable directamente a la comparación interempresas, cambiando ‘Productividad del año 1’ por ‘Productividad de la empresa 1’, etc. En consecuencia, y para simplificar la exposición, en adelante se prescinde de hacer referencias a la aplicabilidad de lo expuesto a la comparación interempresas.

<sup>24</sup>  $\frac{\Pi^1}{\Pi^0} = \frac{q^1 / \sum_j (F_j^1 \cdot K_j^0)}{q^0 / \sum_j (F_j^0 \cdot K_j^0)} ; \rightarrow \frac{\sum_j (F_j^1 \cdot K_j^0)}{\sum_j (F_j^0 \cdot K_j^0)} \equiv \sum_j (F_j^1 / F_j^0) \cdot \frac{(F_j^0 \cdot K_j^0)}{\sum_j (F_j^0 \cdot K_j^0)} ; \rightarrow \frac{(F_j^0 \cdot K_j^0)}{\sum_j (F_j^0 \cdot K_j^0)} =^d a_j^0 ; \quad \sum a_j^0 = 1$

*global* o total y su tasa de variación pueden calcularse, según la definición estándar (Indicador de Productividad Global, IPG; *Total Factor Productivity*, *TFP*) como:

$$\Pi^1 = \frac{\sum_i q^1 \cdot \lambda_i}{\sum_j F^1 \cdot \sigma_j}; \quad \Pi^0 = \frac{\sum_i q^0 \cdot \lambda_i}{\sum_j F^0 \cdot \sigma_j}; \quad t = \ln\left(\frac{\Pi^1}{\Pi^0}\right)$$

[3a]
[3b]
[4]

donde:  $i = 1, 2, \dots$  denota los diferentes productos;  $\lambda_i$  son los pesos escogidos para ponderar los diferentes productos; y  $\sigma_j$  son los pesos, ya definidos anteriormente, tomados para los diferentes factores.

La utilización de los pesos  $\lambda_i$  permite obtener un agregado de los diferentes productos en forma de una cifra que representa el ‘producto total’ de la empresa. Paralelamente a lo dicho antes para los factores, para los productos lo más habitual es tomar como dichos pesos los precios de cada producto en un año dado, tomado como base (generalmente el mismo año que para los factores):  $\lambda_i = P^0_i$ . Con lo que el cálculo del IPG queda como:

$$\Pi^1 = \frac{\sum_i q^1 \cdot P^0_i}{\sum_j F^1 \cdot K^0_j}; \quad \Pi^0 = \frac{\sum_i q^0 \cdot P^0_i}{\sum_j F^0 \cdot K^0_j};$$

[3aa]
[3ba]

Obsérvese que en esta opción metodológica el numerador de  $\Pi^1$  equivale a los ‘ingresos a precios constantes’ (es decir, los ingresos del año ‘1’, recalculados a precios del año base), y el denominador a los ‘costes a precios constantes’ (ídem). Y, al igual que en la situación simplificada de un solo producto, también en este caso general es posible calcular la tasa de variación de la productividad [además de según la expresión 4] directamente, como la diferencia entre la tasa de cambio media de los productos menos la tasa de cambio media de los factores:

$$t = \ln \sum_i \left( \frac{q^1}{q^0} \right)_i v_i^0 - \ln \sum_j \left( \frac{F^1}{F^0} \right)_j a_j^0 \quad [4a]^{25}$$

donde  $v_i^0$  son coeficientes que indican la importancia relativa de los ingresos procedentes del producto ‘i’ con relación a los ingresos totales, en el año base (ver nota); y  $a_j^0$  es la proporción que el factor ‘j’ representa en los costes totales de dicho año base.

Hay que señalar que esta tasa de variación anual debe interpretarse como referida a la productividad ‘bruta’ o total (‘eficiencia productiva’), la cual puede tener una componente de variación de la *productividad técnica* (‘eficiencia de gestión’) más otra de efecto de las posibles *economías de escala* (‘eficiencia de escala’). Visto de otra manera, si hay motivos para pensar que en el intervalo de volumen de producción observado para dos años consecutivos se dan economías de escala constantes, entonces la correspondiente tasa de variación  $t$  se referirá exclusivamente a la *productividad técnica*.<sup>26</sup>

---

<sup>25</sup>  $\frac{\Pi^1}{\Pi^0} = \frac{\sum_i (q^1 \cdot P^0)_i / \sum_i (q^0 \cdot P^0)_i}{\sum_j (F^1 \cdot K^0)_j / \sum_j (F^0 \cdot K^0)_j}; \quad \frac{\sum_i (q^1 \cdot P^0)_i}{\sum_i (q^0 \cdot P^0)_i} \equiv \sum_i \left( \frac{q^1}{q^0} \right)_i \cdot \frac{(q^0 \cdot P^0)_i}{\sum_i (q^0 \cdot P^0)_i}; \quad \frac{(q^0 \cdot P^0)_i}{\sum_i (q^0 \cdot P^0)_i} =^d v_i^0$

<sup>26</sup> Es frecuente encontrar en la literatura sobre el tema una perspectiva distinta sobre esta cuestión. Sintetizándola: El utilizar como pesos los coeficientes  $v_i$  y  $a_j$  implica introducir la restricción (presunción) de que la empresa opera con economías de escala constantes. (Puede verse al respecto: Milward, R y Parker, D.M. “Public and Private Enterprise: Comparative Behaviour and Relative Efficiency” en Milward, R./ Parker, D.M./ Rosenthal, L/ Summer, M. T./ Topham, N. (Eds), *Public Sector Economics*, Longman, 1983, pág. 225-227). Y, en efecto, así sería si interpretásemos –como así hacen los referidos autores– que los

Conviene señalar, además, que en los trabajos sobre mediciones de productividad es frecuente encontrar que el cálculo de la ‘tasa de variación media’ de los productos en [4, 4a] es substituida por el cálculo de una aproximación en la que la tasa de variación está definida de forma diferente. Y lo mismo se aplica a la tasa de variación media de los factores. Concretamente tal alternativa es:

$$t \approx \sum_i v_i^* \cdot \ln\left(\frac{q^1}{q^0}\right)_i - \sum_j a_j^* \cdot \ln\left(\frac{F^1}{F^0}\right)_j \quad [4b]$$

$$\text{Siendo: } v_i^* = (v_i^1 + v_i^0)/2; \sum v_i^* = 1; \quad \text{y: } a_j^* = (a_j^0 + a_j^1)/2; \sum a_j^* = 1$$

A la tasa  $t$  así calculada se le denomina “índice de Törnqvist”<sup>27</sup>. Y es fácil que la encontremos expresada también de forma más compacta, así:

$$t \approx \sum_i v_i^* \cdot q_i^\wedge - \sum_j a_j^* \cdot F_j^\wedge \quad [4b]$$

donde  $q_i^\wedge$  es la tasa de variación observada para el producto ‘i’, y  $F_j^\wedge$  la tasa de variación observada para el factor ‘j’.

En cualquier caso, puede verse que la definición de *Indicador de Productividad Global* (IPG)<sup>28</sup> que implícitamente se está utilizando cuando se efectúan cálculos tipo [4a,b] es el antes definido:  $\Pi^1, \Pi^0$ .

## 4 EL CÁLCULO DE LA PRODUCTIVIDAD GLOBAL EN LA PRÁCTICA

### 4.1 Índice de Productividad Global - Productividad Total de los Factores

Abandonemos la simplificación de que solo nos interesa calcular la productividad de la empresa en cuestión para solo dos años. Lo más adecuado para sacar conclusiones relevantes será calcularla para un periodo de varios años:

$$[3] \quad \Pi^x = \frac{\sum_i (q^x \cdot P^0)_i}{\sum_j (F^x \cdot K^0)_j}; \quad x = \text{año}; (x=0, 1, 2 \dots) \quad t^x = \ln\left(\frac{\Pi^x}{\Pi^{x-1}}\right) \quad [4]$$

Siendo entonces la expresión general para el cálculo directo de las tasas anuales de variación de la productividad:

valores  $t$  que vamos a obtener representan la tasa de variación de la *productividad técnica*. En la presente exposición se ha optado por una perspectiva más directa: Las tasas de variación  $t$  resultantes de las expresiones [4] (o de las que siguen después, 4a, 4b) nos hablan de la variación de la productividad de la empresa. Variación que puede tener una componente de *eficiencia técnica* y otra de *eficiencia de escala* (Y – habría que añadir, por lo que veremos a continuación– una tercera posible componente generada por cambios significativos en el ‘mix’ comercial).

<sup>27</sup> Puede verse sobre esto Milward / Parker, op. cit. Pág. 228-229. El “Índice de Divisia” es lo mismo, solo que suponiendo variaciones no anuales si no ‘continuas’ en la productividad; puede verse sobre esto Prior, D. / Vergés, J. / Vilardell, I. *La evaluación de la eficiencia en los sectores privado y público*, IEF, Madrid 1993, pág. 202-207.

<sup>28</sup> En la terminología en inglés: Total Factor Productivity, TFP.

$$t^x = \ln \sum_i \left( \frac{q^x}{q^{x-1}} \right)_i v_i^{(x-1),0} - \ln \sum_j \left( \frac{F^x}{F^{x-1}} \right)_j \cdot a_j^{(x-1),0} \quad [4a]$$

Donde  $v_i^{(x-1),0}$  representa los coeficientes (en tantos-por-uno) de la composición de los ingresos del año x-1, pero previamente recalculados a precios de venta del año base (0); y  $a_j^{(x-1),0}$  representa la composición de los costes del año x-1, también previamente recalculados a los respectivos precios de compra del año 0. En ambos casos, la suma de los coeficientes es por tanto igual a 1.

Como puede verse, cada indicador de productividad anual,  $\Pi^x$ , equivale a un cociente entre los ingresos y los costes totales del año 'x' considerado, pero valorados los unos y los otros a unos precios (de venta, para los numeradores; de compra/contratación, para los denominadores) constantes, idénticos para el cálculo de los  $\Pi^x$  para los sucesivos años (es decir, que los precios referidos entran en el cálculo del IPG simplemente como parámetros).

$$[3] \text{ Indicador de Productividad Global }^x, \Pi^x = \frac{\text{Ingresos}^x \text{ (a unos precios dados }^0)}{\text{Costes totales}^x \text{ (a unos precios dados }^0)}$$

x = año para el que se calcula el IPG; 0 = año que se toma como base para los precios (utilizados como parámetros)

Este es en la práctica el indicador más utilizado, bien explícita [3] o implícitamente [4, 4a, 4b], tanto para comparar la productividad de una empresa en un año con respecto a otro, como para comparar la productividad de una empresa (A) con la de otra u otras (B), para un periodo dado. En lo que sigue nos referiremos a las aplicaciones del primer tipo (*cross time*); posteriormente nos centraremos en la aplicación a comparar la productividad de dos o más empresas.

El resultado de un cálculo de productividades de una empresa para un periodo determinado, siguiendo el planteamiento anterior, puede ilustrarse con el siguiente ejemplo numérico:

| Años →  | 2000  | 2001   | 2002    | 2003    | 2004    | 2005    | 2006    | 2007    | 2008    |
|---------|-------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $\Pi^x$ | 1,085 | 1,16   | 1,20    | 1,22    | 1,38    | 1,45    | 1,35    | 1,48    | 1,42    |
| t × 100 |       | +6,68% | +3,39 % | +1,65 % | +12,32% | +4,95 % | -7,15 % | +9,19 % | -4,14 % |

#### *El efecto del 'mix' comercial, sobre la productividad total*

Con relación a la definición estándar del IPG [3] conviene tener en cuenta que nos puede estar midiendo en realidad algo más que la eficiencia productiva en sentido estricto (entendiendo por tal el conjunto de la productividad técnica y de los posibles efectos de las economías de escala): Si, como a veces se observa, la relación Ingresos/Costes a precios constantes para uno de los productos es, de forma estable, mayor que para el resto, el solo hecho de que cambie la estructura de la venta en el sentido de que este producto que rinde un mayor margen comercial represente una mayor proporción en el año 'x' que en el 'x-1' hará que el  $\text{IPG}^x$  de la empresa estudiada presente un incremento para ese año x <sup>29</sup>. Y, sin embargo, ese incremento numérico en el IPG no tendrá en realidad nada que ver con la

<sup>29</sup> Y un razonamiento paralelo es aplicable cuando lo que se trata es de comparar el IPG de dos empresas para un año determinado: si la línea de productos con una relación Ingresos/Costes más alta representa una mayor proporción en los ingresos de la empresa 'A' que en los de la 'B', ese solo hecho hará aparecer la productividad de la 'A' superior a la de la 'B'; volveremos sobre esto más adelante

idea de incremento de la productividad propiamente dicha, sino como un cambio en la composición del ‘output’ total.<sup>30</sup>

## 4.2 Cálculo de los IPG utilizando valores monetarios

Partiendo de la definición estándar [3], los valores  $IPG^x$  pueden también calcularse –en lugar de con datos de unidades físicas y de precios para cada producto y cada factor– utilizando: 1) valores monetarios de los ingresos anuales, para cada producto; y de los costes anuales, para cada factor y 2) índices de variación de los precios cobrados y pagados por la empresa. La principal ventaja es que esto permite trabajar con información más asequible de obtener de las empresas. O, más aún, que puede ser la única posibilidad de efectuar el cálculo de las productividades cuando –como es lo más frecuente– la información disponible para llevar a cabo la evaluación es incompleta y hay que recurrir a efectuar alguna estimación. He aquí la equivalencia entre las dos vías de cálculo de los IPG –la que hemos visto hasta ahora, [3], y la que utiliza valores monetarios [6]:

La expresión correspondiente es concretamente la [6<sup>a</sup>], o su equivalente ‘compacto’, la [6c].

$$\Pi^x = \frac{\sum_i (q^x \cdot P^0)_i}{\sum_j (F^x \cdot K^0)_j} \equiv \frac{\sum_i IE_i^x \cdot \frac{1}{IP_i^x}}{\sum_j CE_j^x \cdot \frac{1}{IK_j^x}} \equiv \frac{IE^x \cdot \sum_i v_i^x \cdot \frac{1}{IP_i^x}}{CE^x \cdot \sum_j a_j^x \cdot \frac{1}{IK_j^x}} \equiv \frac{IE^x \cdot \left( \frac{1}{IP^x} \right)^{31}}{CE^x \cdot \left( \frac{1}{IK^x} \right)} \quad [3] \quad [6a] \quad [6b] \quad [6c]$$

Donde:

$IP_i^x$  es el índice de variación observado para el precio de venta del producto ‘i’:  $IP_i^x = (P^x/P^0)_i$ ;

$IK_j^x$  es el índice de variación del precio de adquisición del factor ‘j’:  $IK_j^x = (K^x/K^0)_j$ .

(Se trata de índices de precios que indican la variación de cada precio desde el periodo tomado como base, ‘0’ al periodo ‘x’).

$v_i^x$  son los coeficientes de estructura de la venta en el año x:  $IE_i/IE^x$ ;

$a_j^x$  son los coeficientes de estructura de los costes en el año x:  $CE_j/CE^x$ .

$IP^x$  (sin subíndices) representa el índice promedio de variación de precios del conjunto de los outputs;

y  $IK^x$  es el correspondiente promedio para el conjunto de los inputs. (Medias ponderadas en ambos casos, como puede verse en las expresiones [6]):

$$\sum_i \frac{1}{IP_i^x} \cdot v_i^x \equiv \frac{1}{IP^x} \quad ; \quad \sum_j \frac{1}{IK_j^x} \cdot a_j^x \equiv \frac{1}{IK^x} \quad [7] \quad [8]$$

A efectos de aplicaciones prácticas, la vía [6a, c] resulta determinantemente útil –especialmente cuando hay que recurrir a cálculos por aproximación, como veremos a continuación–, pues muestra cómo los numeradores de los IPG de cada año (‘ingresos a precios constantes’) pueden calcularse también traduciendo los ingresos nominales con el

<sup>30</sup> Del cambio observado en el IPG (tasa  $t$ ) en un año es posible separar la parte que es atribuible al cambio registrado en la estructura de la venta –y, por tanto, deslindar la parte que muestra propiamente un cambio en la productividad. Para ello es necesario disponer de datos sobre la diferente relación ventas/costes para los diferentes productos o líneas de facturación. Puede verse sobre esto Prior, D. / Vergés, J. / Vilardell, I., op. cit. pág. 83-91,

<sup>31</sup>

$$\frac{\sum_i (q^x \cdot P^0)_i}{\sum_j (F^x \cdot K^0)_j} \equiv \frac{\sum_i (q^x \cdot P^x) \cdot \left( \frac{P^0}{P^x} \right)}{\sum_j (F^x \cdot K^x) \cdot \left( \frac{K^0}{K^x} \right)} \equiv \frac{\sum_i IE_i^x \cdot \frac{1}{IP_i^x}}{\sum_j CE_j^x \cdot \frac{1}{IK_j^x}} \equiv \frac{IE^x \sum_i \left( \frac{IE_i^x}{IE^x} \right) \cdot \frac{1}{IP_i^x}}{CE^x \sum_j \left( \frac{CE_j^x}{CE^x} \right) \cdot \frac{1}{IK_j^x}} \equiv \frac{IE^x \cdot \sum_i v_i^x \cdot \frac{1}{IP_i^x}}{CE^x \cdot \sum_j a_j^x \cdot \frac{1}{IK_j^x}} \quad [6a] \quad [6b]$$

índice de variación promedio de los precios de venta aplicados por la empresa en cada año [7]. Y, paralelamente, que los denominadores de los IPG ('costes totales a precios constantes') pueden también calcularse aplicando a los costes totales de cada año el promedio del índice de variación de los precios de compra/contratación [8].

#### *Relación entre los indicadores 'margen' y 'productividad'*

La reexpresión de la medida de la productividad global según [6c] permite además poner de relieve que existe una relación directa entre el indicador IPG de un año 'x' y el indicador tasa de margen del mismo. Es decir, que no se trata de dos variables independientes entre sí (lo cual es importante tener en cuenta cuando se utilizan ambos indicadores simultáneamente). Así:

$$[6c] \quad \Pi^x = \frac{IE^x \cdot \left(\frac{1}{IP^x}\right)}{CE^x \cdot \left(\frac{1}{IK^x}\right)} \equiv \frac{1}{1-m^x} \cdot \frac{IK^x}{IP^x} ; \quad \text{o, a la inversa: } m^x = 1 - \frac{1}{\Pi^x} \cdot \frac{IK^x}{IP^x} \quad [9]$$

Esto permite deducir que si, por ejemplo, se diese el caso de que el cambio promedio experimentado por el conjunto de los precios de venta de la empresa fuese precisamente idéntico al experimentado por los precios de compra/contratación ( $IP^x = IK^x$ ) -por ejemplo: que tanto los salarios como los precios de las materias primas, los de la energía, ... etc. hayan aumentado en un 6%, y que todos los precios de venta hayan aumentado también en un 6%- , entonces el IPG del año 'x' tendría el mismo valor que resultaría de efectuar el simple cociente entre los ingresos y los costes totales de dicho año, a precios corrientes, tal como directamente se obtienen estos de la cuenta de resultados de la empresa. Por lo tanto, en tal caso aplicar un indicador relativamente sofisticado de cálculo como es  $\Pi^x$  llevaría exactamente a las mismas conclusiones sobre la eficiencia de la empresa que aplicar el sencillo indicador  $m^x$ .

#### *'Efecto productividad' y 'efecto precios'*

Pero, sobre todo, la expresión [9] nos muestra que la productividad (IPG) y la tasa de margen están relacionadas. Y, concretamente, que la segunda depende de la primera y del comportamiento de los precios de venta y de compra/contratación de la empresa (índices IP, y IK). Tomemos el siguiente ejemplo del cálculo de ambos indicadores para dos años consecutivos:

| año | m        | $\Pi$ | IP    | IK    |
|-----|----------|-------|-------|-------|
| x-1 | 18/100   | 1,453 | 1,301 | 1,549 |
| x   | 26,1/100 | 1,52  | 1,38  | 1,55  |

La relación [9] nos dice que necesariamente se cumplirá que:

$$\frac{18}{100} = 1 - \frac{1}{1,453} \cdot \frac{1,549}{1,301} , \quad \text{y que: } \frac{26,1}{100} = 1 - \frac{1}{1,52} \cdot \frac{1,55}{1,38}$$

La simple lectura de lo anterior nos permite a su vez deducir que la relación de precios outputs/inputs para la empresa mejoró: los precios de los factores no variaron substancialmente de un año a otro, mientras que los de sus productos subieron en promedio alrededor de un 6%. Esto por si solo habría hecho que la tasa de margen aumentase. A lo que se añadió que la productividad aumentó en un 4,5%. Y es el conjunto de ambos movimientos favorables lo que hace que la tasa de margen mejorase del 18% al 26,1%. Dando un paso más, podemos preguntarnos ¿qué parte de la variación observada en la tasa de margen de un año a otro ha sido causada por el comportamiento de la productividad, y qué parte por los cambios en la relación de precios -venta/precios compra?

Concretamente, la tasa de margen aumentó en 8,1 puntos de %. ¿Qué parte de este aumento fue debido a la mejora en la productividad? Aplicando [9] podemos determinar que si en el año  $x$  la productividad hubiese sido la misma que en el año anterior (1,453, en lugar de 1,52), dada la evolución de la relación de precios la tasa de margen hubiese sido del 22,7%

$$1 - \frac{1}{1,453} \cdot \frac{1,55}{1,38} = \frac{22,7}{100}$$

Es decir, 3,4 puntos menor de lo que en realidad ha sido. Podemos decir pues que éste ha sido el efecto derivado de la mejora observada en la productividad; y que en consecuencia el resto,  $8,1 - 3,4 = 4,7$  puntos de %, es el efecto derivado del cambio experimentado en la relación de precios <sup>32</sup>.

### 4.3 Los cálculos de los IPG por aproximación

Es frecuente que al tratar de calcular los IPG de una empresa para determinados años (para así efectuar una comparación temporal) no se disponga de la información detallada por unidades y precios para cada producto y/o para cada factor. Cabe entonces el recurso a algún tipo de estimación (de hecho esto es lo que más frecuentemente encontramos en la literatura empírica sobre el tema). Veamos como pueden ser éstas aproximaciones, yendo de la mejor a las menos buenas.

#### *Aproximación tipo I*

Teniendo en cuenta que, como hemos visto, el  $\Pi^x$  puede también calcularse utilizando valores monetarios para productos y para factores, junto con los índices de variación de los precios de la empresa, una buena aproximación a  $\Pi^x$  -cuando no se dispone de datos sobre unidades y sobre precios de cada producto y de cada factor- consiste en aplicar [6a] calculando los numeradores y/o los denominadores utilizando estimaciones para los correspondientes índices de variación de los precios cobrados por la empresa para cada producto,  $IP^x_i$ , y/o los pagados para cada factor,  $IK^x_j$ .

Así, supongamos, a título de ejemplo, que no se dispone de datos sobre los precios de cada producto para cada año del periodo en estudio pero si se conoce -a partir de informaciones indirectas, procedentes de la memoria anual de la empresa- cual ha sido la política de precios de venta seguida. Esto permitiría estimar con razonable confianza unos valores para el índice de variación de precios de cada producto, en ese año:  $IP^x_i$ . Aplicando estos valores estimados en [6a] la resultante sería una aproximación perfectamente aceptable -al menos por lo que respecta al numerador (cifra de 'output' global).

#### *Aproximación tipo II*

También puede darse -como situación menos favorable- que la información obtenida de las memorias anuales se refiera solo de forma general a la política de precios de facturación seguida por la empresa. En tal caso, ello permitiría efectuar una cierta estimación del índice global de precios,  $IP^x$ , para aplicarlo en la expresión [6c]. Lógicamente esta estimación digamos global (II) será menos buena (tiene asociado un margen de error superior) que la primera, que es detallada (I).

-

<sup>32</sup> Aunque no es sería ésta, desde luego, la única manera de efectuar tal desglose, si bien cualquier alternativa (por ejemplo, la de proceder a la inversa: suponer que es la relación de precios la que no hubiese cambiado de un año a otro) dará valores muy próximos. Ver más adelante punto 6.

En resumen, y centrándonos en el cálculo de los numeradores de los IPG de cada año:

$$[6a] \quad \text{Aproximación I: } \sum_i q_i^x \cdot P_i^0 \equiv \sum_i IE_i^x \cdot \frac{1}{IP_i^x} \equiv \sum_i IE_i^x \cdot \frac{1}{EST(IP_i^x)} \quad [[6a]]$$

$$[6c] \quad \text{Aproximación II } \sum_i (q_i^x \cdot P_i^0) \equiv IE^x \cdot \left( \sum_i \frac{1}{IP_i^x} \cdot v_i^x \right) \equiv IE^x \cdot \frac{1}{IP^x} \approx IE^x \cdot \frac{1}{EST(IP^x)}; \quad [[6c]]$$

Donde ‘EST(..)’ significa que se trata de un valor estimado.

Y, paralelamente, el mismo esquema y razonamiento es aplicable al cálculo por aproximación de los denominadores de 6a, b, c, basada en estimaciones de los respectivos índices de precios de compra/contratación.

Una aproximación tipo I presupone que se dispone de los valores monetarios de ingresos para cada producto (o/y de los de costes para cada factor). Pero raramente se dispone de una información detallada a ese nivel. Lo más probable es que –en el mejor de los casos- dispongamos tan solo de un cierto desglose de los ingresos, por *agregados de productos* (cifras de facturación de cada una de las, pongamos, dos o tres líneas de venta o de actividad de la empresa). Y es bastante probable que dispongamos también de un cierto desglose de los costes anuales: el que nos permitan las cuentas de resultados publicadas por la empresa. Generalmente cifras de bloques de costes (*agregados de factores*), como: ‘Costes de Personal’, de ‘Aprovisionamientos’, de ‘Amortizaciones’, y ‘Costes Restantes’. Con tal tipo de información podemos decidir llevar a cabo la medición de la productividad ‘como si’ esos agregados monetarios fuesen en realidad datos referidos a productos específicos ( $IE_i^x$ ), y a factores productivos propiamente dichos ( $CE_j^x$ ). Es decir, asumiendo la ficción de que la empresa que nos ocupa produce dos o tres productos y que consume tres o cuatro factores; y utilizando esos agregados monetarios en [6a,b] para efectuar entonces una aproximación tipo I. Con tal procedimiento estaremos inevitablemente acumulando dos elementos de error: el proveniente de usar datos agregados para lo que en realidad son diferentes productos, y diferentes factores; y el proveniente de estimar los correspondientes índices de precios.

De hecho esta alternativa (llamémosla I-A, por: ‘aproximación I, con datos agregados’) constituye un cierto intermedio entre las aproximaciones I y II. Y, por supuesto, una aproximación que trabaje con datos algo desglosados (I-A) tendrá en general un grado de error menor que una aproximación con cifras más globales (II).

Las cuentas que en general publican las empresas contienen normalmente un cierto desglose de los costes –por bloques de factores-, pero no es habitual que encontremos un desglose de los ingresos por líneas de venta. Una aproximación tipo II para los numeradores y una tipo I para los denominadores resulta, por tanto, la mejor opción de cálculo por aproximación en tal situación: la que conllevará un menor nivel de error.

#### *Aproximaciones con datos ajenos a la empresa*

Una situación aún menos favorable a las anteriores en cuanto a disponibilidad de datos es cuando ni siquiera se dispone de información alguna sobre la evolución de los precios cobrados y pagados por la empresa. En tales casos la única posibilidad para –a pesar de todo- llevar a cabo el cálculo de la productividad es tomar como estimadores de los respectivos índices de variación de precios de la empresa,  $IP_i^x$ ,  $IK_j^x$ , unos índices de precios exteriores; de los que publica una agencia pública como el Instituto Nacional de Estadística español, por ejemplo. El índice a escoger se supone que debería ser aquel que presumiblemente sea de naturaleza más próxima al índice de precios de la empresa para el

que buscamos una estimación (una variable ‘proxi’). Así, por ejemplo, tomar índices de precios del sector de actividad de la empresa, como estimadores de los índices de precios de los outputs ( $IP^x_i$ ); tomar el índice de salarios, también para el sector de actividad de la empresa, como estimación del  $IK^x$  a aplicar a los costes de personal; o tomar determinados índices de precios industriales, como estimadores para los  $IK^x_j$  del resto de los agregados de costes (costes de energía, amortizaciones/depreciaciones de bienes de equipo, gastos por servicios exteriores, etc.).

En cualquier caso, el tomar índices de precios externos para nuestros cálculos de productividad equivale a efectuar un supuesto –ahora sí- muy restrictivo: que la empresa ha aplicado en su facturación a los clientes una política de precios igual a la media de las empresas encuadradas estadísticamente en el mismo sector que ella, que su política de salarios también ha sido igual que la media de las empresas de ese sector, y que los precios pagados para los demás factores han tenido unas variaciones iguales a las experimentadas en el conjunto de la economía.

Por supuesto, este método de efectuar aproximaciones tipo I o II utilizando como estimaciones para los índices de precios de la empresa unos índices genéricos, exteriores (llamémosle aproximación tipo I/II-ex, por lo de estimación sobre precios, basada en datos externos) introduce un nuevo grado de error que se acumula a los anteriormente mencionados. En esta línea –de ir de la aproximación más aceptable a la menos buena- la peor estimación (no por ello la menos frecuente en la literatura) es la consistente en utilizar la expresión [6c] estimando directamente el índice de precios promedio para los productos ( $IP^x$ ) y el índice promedio para los factores ( $IK^x$ ), tomando como estimadores determinados índices de precios externos. Es decir, una aproximación tipo II-ex.

Nada obliga, desde luego, a efectuar el mismo tipo de aproximación para productos (numeradores) que para factores (denominadores). Lo lógico es optar en cada caso por la mejor aproximación, en función de los datos de que se disponga. Así, por ejemplo, es habitual encontrar en la literatura sobre el tema que para los numeradores se efectúe una aproximación tipo II-ex (porque los autores no dispusieron de desagregación alguna de los ingresos anuales totales de la empresa, ni siquiera por líneas de actividad), y una aproximación tipo I-A-ex para los denominadores, porque –como se ha señalado antes- las cuentas de resultados publicadas por las empresas sí suele ofrecer un cierto detalle de la composición de los costes anuales.

#### 4.4 El cálculo por aproximación, cuando se opta por determinar directamente las tasas de variación de la productividad

Las mismas consideraciones anteriores son de aplicación cuando la alternativa metodológica escogida no es la de calcular los IPG de cada año -para determinar después las respectivas tasas de variación- sino calcular directamente dichas tasas de variación de la productividad según las expresiones formuladas antes [4a] o [4b]):

$$[4a] \quad t^x = \ln \sum_i \left( \frac{q^x}{q^{x-1}} \right)_i \cdot v_i^{(x-1),0} - \ln \sum_j \left( \frac{F^x}{F^{x-1}} \right)_j \cdot a_j^{(x-1),0};$$

$$[4b] \quad t^x \approx \sum_i v_i^* \cdot \ln \left( \frac{q^x}{q^{x-1}} \right)_i - \sum_j a_j^* \cdot \ln \left( \frac{F^x}{F^{x-1}} \right)_j$$

Aparentemente esta opción tendría la ventaja de obviar la falta de información sobre las variaciones de los precios, pues, como puede verse, estos no aparecen en las expresiones

Por otra parte, lo más habitual es, como ya hemos visto, que dispongamos de información incompleta: en el mejor de los casos, agregados monetarios de ingresos y de costes; que es precisamente lo que obliga a efectuar los cálculos por aproximación vistos antes. Esta falta de la necesaria información detallada, ahora desde la perspectiva de calcular directamente las tasas de variación de la productividad,  $\dot{r}^x$ , consiste precisamente en que no se suele disponer de los datos anuales sobre, en primer lugar, unidades físicas,  $q^x_{i,j}$ ,  $F^x_j$ . Entonces, el cálculo por aproximación de [4a] o [4b] suele consistir en empezar por efectuar estimaciones para los cocientes que aparecen entre paréntesis en dichas expresiones, a partir de los valores monetarios de ingresos y de costes de cada año, obtenidos de las cuentas de resultados de la empresa. Valores monetarios que, en el caso más favorable, consistirán en los ingresos por líneas de actividad (agregados de productos), y los costes por bloques (agregados de factores). Con estos datos monetarios de partida se pasa entonces a *re-expresarlos a precios constantes*, para así tomarlos como estimadores en los cocientes entre unidades físicas que aparecen en las expresiones 4a,b. Es decir, utilizando la siguiente equivalencia:

donde 'i' representa ahora una línea de ventas; y 'j' un bloque de factores

#### 4.5 Los índices de productividad aplicados a la comparación entre dos (o más) empresas

Comparar el IPG de una empresa (A) con el de otra (B) implica, como hemos visto, que los pesos (precios) a que se ponderan (valoran) las respectivas unidades de productos y de factores sean los mismos para cada IPG; los de una de las empresas, por ejemplo.

$$\Pi^A = \frac{\sum_i (q^A \cdot P^B)_i}{\sum_j (F^A \cdot K^B)_j}; \quad \Pi^B = \frac{\sum_i (q^B \cdot P^B)_i}{\sum_j (F^B \cdot K^B)_j};$$

[3c],

[3d]

$$t = \ln \left( \frac{\Pi^A}{\Pi^B} \right); \quad \text{si } t > 0, \rightarrow \text{'A' más eficiente, en el año 'x'}; \text{ i viceversa}^{33}$$

La tasa de variación,  $t$ , nos da ya directamente la comparación de la productividad de la empresa A respecto a la de la B, en ese año 'x' para el que hemos efectuado el cálculo. Así, como ejemplo, si resultase  $t = 0,06$ , significaría que la productividad de la empresa 'A' fue un 6% mayor que la de la 'B' en el año para el que se ha hecho la determinación.

Deberíamos, pues, denominar a  $t$  aquí, mejor que *tasa de variación* (que sugiere comparación en el tiempo), *tasa de diferencia*: diferencia entre la productividad de una empresa comparada con la de la otra. Esta tasa, igual que en la comparación temporal, puede calcularse también explicitando sus dos componentes:

$$t \equiv \ln \sum_i \left( \frac{q^A}{q^B} \right)_i \cdot v_i^B - \ln \sum_j \left( \frac{F^A}{F^B} \right)_j \cdot a_j^B \quad (\text{para el año 'x'}) \quad [4c]$$

o bien aplicando su correspondiente versión Törnkvist:

$$t \approx \sum_i v_i^* \cdot \ln \left( \frac{q^A}{q^B} \right)_i - \sum_j a_j^* \cdot \ln \left( \frac{F^A}{F^B} \right)_j; \quad [4d]$$

Siendo aquí:  $v_i^* = (v_i^A + v_i^B)/2$ ;  $\sum v_i^* = 1$ ; y  $a_j^* = (a_j^A + a_j^B)/2$ ;  $\sum a_j^* = 1$

Como anteriormente en el análisis *cross time*, las expresiones anteriores podrían sugerir que esta segunda alternativa -calcular directamente la tasa de diferencia de productividad entre dos empresas- permite obviar la cuestión de los precios. Pero esto es -también como antes- algo solo aparente: La aplicación de [4c,d] requiere no solo disponer de unidades físicas de productos y de factores, sino también calcular los coeficientes  $v_i$  y  $a_j$ ; y para obtener estos es necesario disponer de los ingresos y los costes desglosados ( $IE_i$  y  $CE_j$ ) para ambas empresas; lo que -al igual que hemos visto antes- implícitamente equivale a disponer de (o requeriría estimar) los respectivos precios, (ya que  $IE_i/q_i = P_i$ , y  $CE_j/F_j = K_j$ ,  $\forall A, B$ ).

La comparación de productividad entre dos empresas para un año determinado ciertamente puede no ser significativa sino coyuntural, por lo que lo habitual y aconsejable es tomar varios años para hacer la comparación, calculando entonces la tasa de diferencia para cada año. El cálculo de los respectivos  $\Pi_x^A$  y  $\Pi_x^B$  para los años estudiados ( $x=1, 2, \dots$ ) sería en este caso aplicando los mismos precios de productos y de factores que en el caso del cálculo para un solo año. Así, por ejemplo:  $P_i^{B,0}$ ,  $K_j^{B,0}$ .

<sup>33</sup> Un ejemplo de aplicación del cálculo de IPG para la comparación de eficiencia entre empresas en un caso real (Transmediterránea SA vs. Europa Ferrys, SA) puede verse en el documento de trabajo <http://selene.uab.es/Jverges/EficComp.pdf>, especialmente en los cuadros que figuran en el anexo a ese documento.

Si el interés se centra en calcular las sucesivas tasas de diferencia anuales,  $t^{A,B}$ , tenemos también la opción de calcular los índices de productividad simplemente con los precios de cada año:  $P_i^{B,x}$ ,  $K_j^{B,x}$ ; lo que resulta algo más simple. En contrapartida, entonces los valores de productividad resultantes para cada año,  $\Pi_x^A$  y  $\Pi_x^B$  no serán significativos para calcular las tasas de cambio de la productividad de la empresa 'A' a lo largo de los años estudiados, porque esos  $\Pi_x^A$  serán valores calculados con precios diferentes cada año. Y lo mismo es aplicable respecto a los valores  $\Pi_x^B$  que resultarían en dicha opción de cálculo.

Para no confundir las tasas de diferencia *cross section* [4c,d] con las anteriores *cross time* [4a] y [4b], a las *cross section* las denotaremos como  $t_x^{A,B}$ : tasa de diferencia de la productividad de A respecto a la de B, para el año 'x' (o, más brevemente, 'diferencial de productividad  $A \leftarrow B$ '). Y, paralelamente, denotaremos la tasas de variación temporal (*cross time*) para la empresa A como  $t_x^A$ ; etc.

### Análisis bidimensional

Nos encontramos entonces con que existe una relación entre ambos tipos de tasas,  $(t_x^A, t_x^B)$  y  $(t_x^{A,B})$ , que resulta metodológicamente útil (análisis bidimensional, *cross time*  $\rightarrow$  / *cross section*  $\downarrow$ ). Veamos tal relación: Supongamos que el periodo tomado para la comparación comprende cuatro años. Esto nos da la posibilidad de calcular las siguientes tasas:

|                                                 | Año 0       | Año 1       | Año 2       | Año 3       |
|-------------------------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Empresa A $\rightarrow$                         |             | $t_1^A$     | $t_2^A$     | $t_3^A$     |
| Empresa B $\rightarrow$                         |             | $t_1^B$     | $t_2^B$     | $t_3^B$     |
| Comparación A respecto B $\downarrow\downarrow$ | $t_0^{A,B}$ | $t_1^{A,B}$ | $t_2^{A,B}$ | $t_3^{A,B}$ |

Y puede demostrarse<sup>34</sup> que entre estas tasas existe la siguiente relación bilateral:

$$t_1^A - t_1^B \equiv t_1^{A,B} - t_0^{A,B} ; \text{ y así para los demás años} \quad [11]$$

Es decir, que la diferencia entre las respectivas tasas de variación anual de ambas empresas en un determinado año tiene un significado concreto: es igual a la variación que ha experimentado ese año el diferencial de productividad entre ambas empresas. Y, además, [11] permite, a partir simplemente del diferencial de un año ( $t_0^{A,B}$ , por ejemplo) y de las dos series temporales de la variación anual de la productividad de cada empresa,  $t_x^A$ ,  $t_x^B$ , calcular los diferenciales para el resto de los años del periodo en estudio:

$$t_1^{A,B} = t_0^{A,B} + (t_1^A - t_1^B) ; \text{ y así para los demás años} \quad [11a]$$

A título de ejemplo, si hemos calculado los valores que aparecen en la tabla siguiente:

| Año $\rightarrow$               | 00 | 01   | 02   | 03   |
|---------------------------------|----|------|------|------|
| Empresa 'A': $t_x^A$            |    | +4 % | +2 % | +1 % |
| Empresa 'B': $t_x^B$            |    | +6 % | +5 % | +6 % |
| Comparación 'A' respecto a 'B': |    |      |      |      |

<sup>34</sup>  $t_1^A - t_1^B \equiv \ln\left(\frac{\Pi_x^A}{\Pi_{x-1}^A}\right) - \ln\left(\frac{\Pi_x^B}{\Pi_{x-1}^B}\right) \equiv \ln\left(\frac{\Pi_x^A}{\Pi_x^B}\right) - \ln\left(\frac{\Pi_{x-1}^A}{\Pi_{x-1}^B}\right) \equiv \ln\left(\frac{\left(\frac{\Pi^A}{\Pi^B}\right)_x}{\left(\frac{\Pi^A}{\Pi^B}\right)_{x-1}}\right) = t_x^{A,B} - t_{x-1}^{A,B}$

|             |       |  |  |  |
|-------------|-------|--|--|--|
| $t_x^{A,B}$ | +12 % |  |  |  |
|-------------|-------|--|--|--|

Podemos entonces determinar fácilmente que el diferencial de eficiencia entre ambas paso del 12 % en el año 00 al 10 % en el 01, al +7 % en el 02, y al +2 % en el año 03. Lo que nos indicaría que unos incrementos de productividad relativamente elevados de la empresa 'B' durante los años 01 al 03 han hecho que el diferencial de productividad a favor de la 'A' se reduzca de 12 % a un simple 2 %.

#### *Cálculos por aproximación, en la comparación de productividad entre empresas*

Es frecuente, al tratar de calcular  $t_x^{A,B}$  no disponer de toda la información necesaria (la requerida por 3c,d o por 4c,d), por motivos idénticos a los comentados reiteradamente para las comparaciones temporales. En la mayor parte de trabajos publicados de este tipo los investigadores no han dispuesto de información completa sobre cantidades de productos y de factores ni sobre los precios de cada uno de ellos; ni tampoco –frecuentemente– han dispuesto de valores monetarios desglosados  $IE_i$  y  $CE_j$ , sino que han dispuesto de la simple información financiera global que suele encontrarse en las cuentas de resultados habitualmente publicadas por las empresas. Como consecuencia, los investigadores optan por aproximar los cocientes de cantidades en [4b,c]; exactamente como hemos visto antes, lo que lleva a una aproximación tipo I-A tipo II, paralelas a las que hemos visto en los apartados 3.6, 3.7. Aunque nos topamos con un problema adicional al tratarse ahora de comparación entre empresas; concretamente respecto a la estimación de los índices de precios (para obtener valores monetarios a-precios-constantes), puesto que no se trata ahora de índices de precios en el sentido temporal usual sino de índices relativos al *diferencial de precios empresa A / empresa B*. Y, desde luego, para estimar estos no tenemos el recurso de tomar como 'proxis' índices de precios externos procedentes de anuarios estadísticos. No tendría ningún sentido hacerlo.

Estimar, para un año determinado, el cociente  $(q^A/q^B)_i$  substituyendo las unidades físicas por los respectivos valores monetarios de los ingresos de la línea de productos 'i' de cada empresa, *re-calculados a un mismo precio* requiere conocer el diferencial de precio entre ambas empresas para dicho producto 'i' <sup>35</sup>. O, dicho de otra manera, que la estimación a efectuar es sobre este diferencial de precios entre ambas empresas,  $(IP^{A,B})_i$ , a fin de traducir los ingresos de una empresa a los mismos precios que la otra: " $IE^A_i$  al mismo precio que la empresa B" =  $IE^A_i \cdot (1/IP^{A,B}_i)$ . Y un razonamiento paralelo es aplicable a los factores: " $CE^A_j$  al mismo precio que la empresa B" =  $CE^A_j \cdot (1/IK^{A,B}_j)$ .

En resumen, que la principal dificultad práctica en la comparación de productividades entre empresas reside en que al tratar de estimar los correspondientes índices de diferencia de precios  $IP^{A,B}_i$  y  $IK^{A,B}_j$  no cabe el recurso a índices de precios externos de tipo sectorial o nacional, puesto que no se trata de estimar un diferencial de precios en el tiempo para una empresa, sino un diferencial de precios entre empresas.

Como 'demostración inversa', supongamos que no tenemos en cuenta este hecho y que calculamos  $\Pi^A$  para los años 1999-2008, efectuando estimaciones basadas en índices de precios externos tanto para los productos (numeradores) como para los factores (denominadores). Y que calculamos de la misma manera –aplicando por tanto los mismos índices de precios– la serie temporal 1999-2008 para  $\Pi^B$ . Si comparamos ambas series e interpretamos que sus cocientes anuales nos muestran el diferencial de productividad entre

<sup>35</sup> 
$$\left(\frac{q^A}{q^B}\right)_i \equiv \left(\frac{q^A \cdot P^B}{q^B \cdot P^A}\right)_i \equiv \left(\frac{q^A \cdot P^A \cdot \left(\frac{P^B}{P^A}\right)}{q^B \cdot P^B}\right)_i \equiv \left(\frac{IE^A_i \cdot \left(\frac{1}{IP^{A,B}_i}\right)}{q^B \cdot P^B}\right)_i$$
 [12]

ambas empresas, estaríamos cometiendo un error: En realidad unos cálculos así efectuados para los valores anuales de  $\Pi^A$  y  $\Pi^B$  equivalen a haber multiplicado por unos mismos parámetros (unos determinados índices de precios externos) los cocientes IE/CE de cada empresa, para cada año. Comparar esas dos series temporales equivale en realidad a comparar las dos series temporales de los simples cocientes IE/CE de ambas empresas.

Sí que tendría sentido comparar las dos series temporales de las respectivas tasas de variación anual de la productividad para cada empresa ( $t_x^A$  y  $t_x^B$ ); pero, lógicamente, comparar tasas de variación no nos permite concluir si la empresa A tiene una productividad (eficiencia) mayor o menor que la B, si no solo si la productividad de la A ha crecido más o menos que la de la B en el periodo de estudio. Otra cosa es que tengamos la posibilidad de (los datos suficientes para) calcular el diferencial de productividad empresa A/ empresa B,  $t^{A,B}$  para uno de los años; y entonces apliquemos para el resto de los años el análisis bidimensional expuesto antes (ver cuadro con ejemplo numérico).

## 5 INDICADORES DE PRODUCTIVIDAD PARCIAL

### 5.1 Productividad Parcial aparente

Un indicador de productividad parcial, IPP, es el que se calcula tomando todo el output y uno solo de los factores. En la mayor parte de los casos, el factor trabajo. He aquí algunos ejemplos frecuentes:

$$\frac{\text{Pasajeros - km.}}{\text{Nº de Trabajadores}}; \quad \frac{\text{KWH producidos}}{\text{Horas de Mano de Obra Directa}}; \quad \frac{\text{Ingresos(Ventas)}}{\text{Nº de Trabajadores}}; \quad \frac{\text{Valor añadido}}{\text{Nº de Trabajadores}}$$

Y, cambiando de factor:

$$\frac{\text{KWH producidos}}{\text{Toneladas de Petróleo (combustible)}}; \quad \frac{\text{Pasajeros - km.}}{\text{nº de aeronave - asientos ofrecidos}}$$

En definitiva, la expresión genérica para el IPP de cualquier factor, es, en el caso de una empresa uni-producto:

$$IPP(j) = \frac{q}{F_j};$$

y en general:

$$IPP(j), \Pi_j^x = \frac{\text{Producto total}^*}{\text{Unidades del factor 'j'}}; \quad [13]$$

(\*) expresado mediante una variable 'proxi'. La más coherente con los apartados anteriores sería, por supuesto, el mismo numerador que el del IPG:  $\sum_i q_i^x \cdot P_i^0$ .

donde  $x$  denota el año (o periodo para el que se calcula el índice), y  $j$  uno cualquiera de los factores. Como puede verse por los ejemplos, para un mismo factor (como Trabajo) pueden usarse diferentes definiciones para el correspondiente IPP, dependiendo de: 1)

cómo se exprese el producto total, y 2) qué se tome como unidades del factor <sup>36</sup>. En cada caso la opción de los investigadores suele venir condicionada por los datos de que se dispone; especialmente en lo que atañe a las unidades del factor.

*Limitaciones: Reflejan productividad aparente:*

El atractivo (la utilidad) principal de utilizar un determinado IPP reside en su facilidad de cálculo, pues normalmente no exige hacer supuestos, ni re-expresar valores monetarios a precios constantes, etc. Pero la contrapartida de su sencillez es que cualquier IPP está sujeto a serias limitaciones a la hora de derivar conclusiones sobre eficiencia, debido precisamente a que su cálculo implica atribuir todo el producto de la empresa a uno solo de los factores.

Consideremos esto respecto al más utilizado de los IPP: el índice de productividad parcial del trabajo (IPPT). En primer lugar, por ser precisamente ‘parcial’ nada garantiza que si aumenta ello signifique que la productividad global de la empresa haya mejorado. Eso dependerá de qué haya ocurrido en cuanto al consumo de los demás factores, pues es la productividad global (‘total factor productivity’) lo relevante en una evaluación de eficiencia comparativa de la empresa. Y, en segundo lugar, la tendencia en el mundo empresarial a sustituir factor trabajo por factor ‘equipos’ (o, mas exactamente, por equipos-más-energía: mecanización/ automatización de los procesos), o por factor ‘subcontratación externa’ desvirtúan el propio significado que usualmente se le quiere otorgar al IPPT. Por ejemplo, cuando una empresa lleva a cabo una fuerte inversión modernizadora en maquinaria e instalaciones que le permite producir bastante más con el mismo personal (o producir lo mismo con bastante menos personal), este simple hecho hará que el indicador de productividad del trabajo presente un incremento, aunque el personal siga trabajando con la misma dedicación y eficacia que antes. Y, al contrario, probablemente el indicador de productividad parcial del capital (maquinaria e instalaciones) presentará paradójicamente una disminución. O. sea, que la información cuantitativa favorable o desfavorable que indica la evolución del IPPT es solo aparente. Y el mismo problema afecta a cualquier otro IPP. De ahí la necesidad de hablar más bien de productividad *aparente*: del factor trabajo, IPAT, del factor capital, etc.

Resumiendo: La variación en la productividad parcial *aparente* de un factor [13] solo es también *real* en el caso de que las cantidades del resto de los factores no hayan cambiado de un periodo al otro. Una situación ciertamente improbable.

La limitación comentada queda de manifiesto en el sencillo ejemplo numérico ilustrativo que sigue:

**Inversión en nuevos equipos, acompañada de reducción de personal.**

En el periodo anterior (x-1) los costes fueron los siguientes:

|                                           |           |
|-------------------------------------------|-----------|
| * Personal directo , 320 personas x 200 = | 64.000 €  |
| * Costes de Equipo (amortizaciones) =     | 18.000 “  |
| * Materiales, 19.000 uu x 4 € =           | 76.000 “  |
|                                           | 158.000 “ |

Mientras que las ventas fueron de 2.000 unidades, a un precio medio de 102,5. O sea, 205.000 u. m. A principios del periodo siguiente, con el fin de reducir costes de producción, se llevó a cabo un proyecto de modernización de la producción adquiriendo equipos automatizados que permitieron reducir la plantilla de personal en 20 personas, al mismo tiempo que incrementar la producción en un 20 %. Como resultado, las ventas han sido de 2.400 unidades a un precio medio de 104,96 (251.904 u.m. en total) y los costes de este año (periodo x) han sido los siguientes:

<sup>36</sup> A título de ejemplos a añadir a los primeros:  $\frac{\sum_i q^x \cdot P^0}{n^{\circ} \text{ horas - persona}}$  ;  $\frac{\sum_i q^x \cdot P^0}{(F^x \cdot K^0)_{\text{trabajo}}}$  ;

|                                        |               |   |
|----------------------------------------|---------------|---|
| * Personal directo , 300 x 210 =       | 63.000        | € |
| * Costes de Equipo , 18.000 + 11.000 = | 29.000        | " |
| * Materiales, 22.400 uu x 4,25 €       | <u>95.200</u> | " |
|                                        | 187.200       | " |

lo que equivale a haber reducido el coste medio de 79 € a 78 €.

El incremento de 11.000 en los costes de amortización corresponde, lógicamente, a la depreciación de los nuevos equipos. Se estima que si la inversión se hubiese efectuado (con los precios de adquisición de) el año anterior, este incremento hubiese sido de 10.000 en lugar de 11.000. De acuerdo con todo lo anterior, las ventas y costes a precios constantes han sido:

|                                             |          |
|---------------------------------------------|----------|
| q.P° = 2.400 x 102,5 =                      | 246.000  |
| F.K° <sub>(personal)</sub> = 300 x 200      | = 60.000 |
| F.K° <sub>(equipos)</sub> = 18000+10000     | = 28.000 |
| F.K° <sub>(materiales)</sub> = 22.400 x 4 € | = 89.600 |

Por lo que resultaran unos indicadores de productividad aparente contradictorios: aumento para Personal y disminución para Equipos, cuando de hecho la hipótesis de que la productividad 'real' del trabajo no haya variado no la podemos descartar:

|                                        | IPAT (trabajo)             | IPAE <sub>equipos</sub>                | IPG                                |
|----------------------------------------|----------------------------|----------------------------------------|------------------------------------|
| Año base (x-1): $\Pi^0$                | $\frac{2.000}{320} = 6,25$ | $\frac{2.000}{18.000} = 0,11^{\wedge}$ | $\frac{205.000}{158.000} = 1,2975$ |
| Año en estudio (x): $\Pi$              | $\frac{2.400}{300} = 8$    | $\frac{2.400}{28.000} = 0,0857$        | $\frac{246.000}{177.600} = 1,385$  |
| * Índices de cambio, $\pi \Rightarrow$ | 8 / 6,25 = 1,28            | 0,0857 / 0,111 = 0,77                  | 1,385 / 1,2975 = 1,0675            |
| * Tasas de variación $t' \Rightarrow$  | + 28 %                     | - 23 %                                 | + 6,75 %                           |
| * Tasa de var. Cont (t) $\Rightarrow$  | + 24,69 %                  | - 26 %                                 | + 6,53 %                           |

La facilidad de cálculo de los indicadores de productividad parcial los hace, sin embargo, instrumentos atractivos. Y esto sugiere el plantearse tratar de superar el serio inconveniente que presentan de discrepancia entre apariencia y realidad.

Una opción respecto precisamente a la productividad parcial del Trabajo es aplicar la siguiente definición: Productividad parcial Neta del Trabajo:

$$PPNT^x = \frac{IE^x - \sum CE^x_j}{CE^x_{trab}}, \forall j \neq trab.$$

donde el numerador se corresponde con una cierta versión del Valor Añadido. Aplicado al ejemplo anterior resultaría:  $PPNT_{(año\ x-1)} = (205.000-94.000)/64000=1,734$ ;  $PPNT_{(año\ x)} = (251.904-124.200)/63.000=2,027$ ; es decir, un incremento, en este caso algo más moderado, del 16,95%. También en esta opción una variación positiva caso positiva, debido a que el indicador atribuye implícitamente todo el incremento del excedente al factor trabajo.

## 5.2 Relación entre los indicadores de Productividad Parcial y el de Productividad total (IPG, TFP)

Otra opción para superar el inconveniente de los IPP, desde una perspectiva ahora general, es plantearse: ¿puede establecerse una relación entre la productividad global de una empresa (el IPG,  $\Pi$ ) para un periodo determinado y los diferentes índices de productividad parcial aparente ( $\Pi_j$ )? Existe efectivamente una relación, aunque no entre esos indicadores propiamente dichos (o no de una forma clara u operativa entre estos) si no entre sus tasas de variación. Concretamente:

La tasa de variación nominal de la productividad global ( $t'$ ) resulta ser igual a una media ponderada de las tasas de variación de las productividades parciales calculadas para cada

factor  $(t'_j)$ , siendo los pesos de la ponderación la importancia relativa del factor correspondiente en el coste total del año en estudio, si bien previamente recalculados los costes a-precios-del-año-base,  $(a_j)^{x,0}$ .

$$(t')^x = \sum (t'_j)^x \cdot (a_j)^{x,0}, \quad [14]$$

$$\text{donde } (t')^x = \Pi^x / \Pi^{x-1} - 1; \quad t'_j = \Pi_j^x / \Pi_j^{x-1} - 1; \quad \text{y} \quad (a_j)^{x,0} = (F^x \cdot K^0)_j / \sum (F \cdot K^0)_j$$

(La demostración de esta proposición puede verse en el primer apartado del anexo I. Puede verificarse que en el ejemplo numérico anterior se cumple, efectivamente, esta igualdad).

Esta interesante propiedad resulta, sin embargo, escasamente útil para aplicaciones prácticas debido a que normalmente no es en realidad posible calcular los  $IPP_j$  para otros factores diferentes que el trabajo o el consumo de energía debido a que no solo es difícil obtener si no también definir cuales son las *unidades físicas* para esos otros factores.

Este decisivo inconveniente es especialmente relevante en el caso del factor ‘capital’. En el ejemplo numérico estilizado anterior el problema se ha resuelto con un supuesto: que el incremento en los costes de amortización hubiese sido de 10.000 € en lugar de 11.000 € si los nuevos equipos adquiridos lo hubiesen sido a precios del año anterior, lo que equivale a una estimación de  $(F^x \cdot K^0)_j$  para el factor capital. Pero en un caso no estilizado si no real, la dificultad de hablar de unidades y precios del factor ‘bienes de capital’ o de ‘costes del (uso del) inmovilizado a precios constantes’ resulta evidente<sup>37</sup>. Principalmente porque el precio  $(K^0)$  no se refiere, por supuesto, a un tipo de interés –como en ciertos trabajos sobre el tema se presupone– si no al precio de adquisición de los equipos que se están utilizando (o, más precisamente, a la repercusión, en términos de costes de amortización, de dichos precios)<sup>38</sup>.

Y para factores (costes) como ‘servicios exteriores’ los problemas que encontramos al tratar de calcular el correspondiente  $IPPA_j$  son de naturaleza similar. Claro que en un determinado estudio podemos ir haciendo supuestos (sobre cantidades y sobre precios, para los costes de capital, los servicios exteriores, el resto de los costes, etc.) y así obtener unos determinados valores para aplicar en [14]; pero tal ejercicio de cálculo no sería si no una manera innecesariamente indirecta y mucho más complicada de reproducir lo que, de una forma más clara, se hace al calcular el IPG por aproximación, en el sentido que hemos visto antes en 3.6 y 3.7.

En resumen, calcular un  $IPPA_j$  tiene sentido (resulta útil) -con las reservas que hemos visto en cuanto a su interpretación- cuando se puede calcular directa y fácilmente porque se dispone de las unidades físicas del factor sin ambigüedad alguna. En caso contrario, no aporta nada (adicional a lo que nos dice el IPG) el llevar a cabo, a pesar de todo, el cálculo a base de encadenar suposiciones (y, por tanto, acumular errores) sobre unidades y sobre precios de los diferentes factores.

<sup>37</sup> Sobre el grado y el porqué de esta dificultad puede verse el apartado segundo del Anexo I.

<sup>38</sup> Volvamos por un momento al ejemplo estilizado: Si la única máquina utilizada, comprada en el año 0 por 6000€ con una vida útil de 6 años, generó unos costes de amortización de 1000€ en ese año, y en el año 1 se adquiere una segunda máquina idéntica pero, debido a la inflación, a un precio de 7200€, esta segunda generará unos costes de amortización de 1200€. En total, pues, los costes ‘de capital’ durante el año 1 serán 2.200€, pero ‘a precios constantes (del año 0)’ dichos costes serán de 2000€. ¿Cuál sería en este caso las ‘unidades del factor-capital’? ¿El valor nominal (de compra) de la inversión en las máquinas? (6000+7200=13.200), ¿El valor neto de la inversión al final del año 1? (6000-1000-1000+7200-1200=10000)? ¿sencillamente 2 (máquinas)? Ahora trasládese mentalmente este tipo de cuestiones a una situación no estilizada si no real. .... Ver sobre esta cuestión el segundo apartado del Anexo I.

## 6 RECAPTULACIÓN: RELACIÓN ENTRE LOS INDICADORES DE PRODUCTIVIDAD, COSTE MEDIO Y RENTABILIDAD.

Las diferentes variables o indicadores usualmente utilizados para medir la eficiencia empresarial están de hecho relacionados entre sí. Y, al mismo tiempo, cada uno mide facetas distintas de la eficiencia. Veamos esas relaciones en un sentido ‘jerárquico’, de mayor a menor proximidad respecto a la idea estándar de eficiencia implícita en el clásico axioma de la Economía: (ser más eficiente es) “Producir lo mismo, utilizando menos factores (o menos de uno de ellos). O, producir más (o más de uno de los productos) con un determinado consumo de factores”.

i) El indicador ‘ideal’ –en el sentido anterior- para medir la eficiencia empresarial para un determinado periodo es el índice de productividad global (IPG, ó  $\Pi$ ). Concretamente, el cambio observado de un periodo a otro en  $\Pi$  es, en una primera instancia, la resultante de dos causas: el cambio experimentado por la *eficiencia productiva*, y el cambio en la *composición (monetaria) del ‘output’ total*, (*‘mix comercial’*:  $v_i$ ). Esta segunda componente será relevante en la medida en que los distintos productos de la empresa tengan una relación Ingresos/Costes específicos significativamente diferente<sup>39</sup>.

Por las mismas razones, la diferencia que se observe en el  $\Pi$  de dos empresas tendrá dos posibles causas: la diferencia en cuanto a eficiencia productiva, y la diferencia en cuanto a la respectiva composición del output total.

A su vez, un cambio en la *eficiencia productiva* será la resultante de un cambio en la Productividad en sentido estricto (*‘productividad técnica’* o eficiencia de gestión), y el efecto de las posibles economías de escala que se hayan producido (eficiencia de escala).

ii) El *coste medio (CM)* depende (en sentido inverso) de la productividad global,  $\Pi$ , y del precio de coste de los factores. Su cambio de un periodo a otro tendrá, pues, dos componentes: la repercusión del cambio en la productividad, y la repercusión del cambio experimentado por los precios de compra/contratación de los factores.

En consecuencia, el coste medio (cuando es posible calcularlo: empresa uni-producto) es un indicador tan bueno (preciso) como  $\Pi$  para evaluar el cambio en la eficiencia global de la empresa de un periodo a otro, *si es que los precios de coste de los factores son los mismos en ambos periodos* (o para las dos empresas que se comparan).

iii) La tasa de *Margen (m)* nos habla (depende) de la *Productividad global* y también – como hemos visto al final del apartado 4.4- de la evolución relativa de los precios de venta respecto a los de coste: *efecto precios*. El cambio que se observe en la tasa de margen será, pues, la resultante de los cambios en ambas variables ‘componentes’.

Así, en el ejemplo numérico de la página 16

|                                                                                                    |                                                                                                                                                                                 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $m = \frac{BE}{IE} \equiv 1 - \frac{CE}{IE} \equiv$ $\equiv 1 - \frac{1}{\Pi} \cdot \frac{IK}{IP}$ | $m = 0,2647 \equiv \frac{4.071,06}{15.381,6} \equiv 1 - \frac{11.310}{15.381,6}$ $\Pi = \frac{13.572}{10.430} = 1,3 \quad ; \quad IK = 13/12 = 1,08333$ $IP = 3,4/3 = 1,133333$ |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

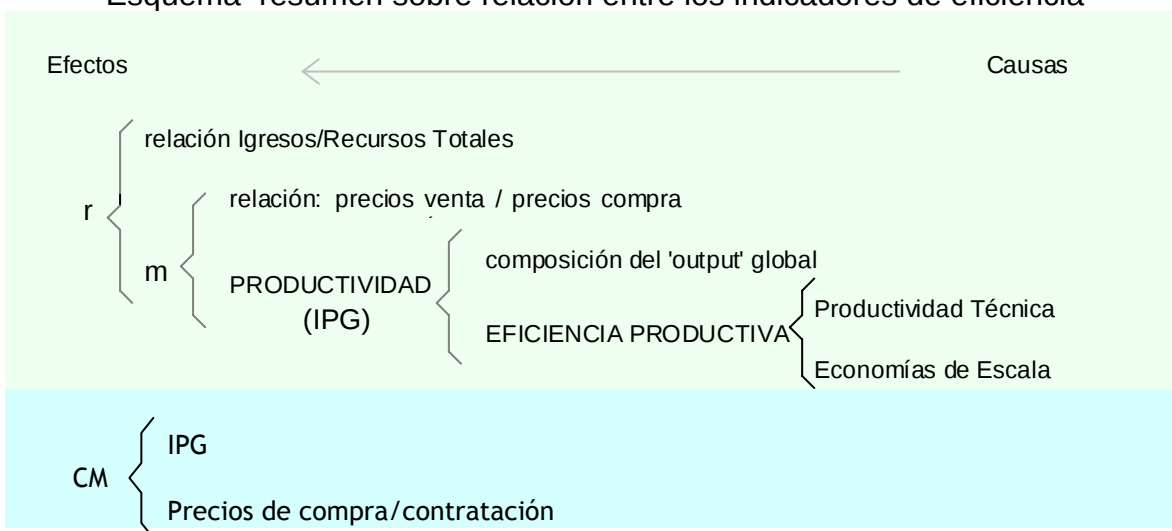
<sup>39</sup> Ver página 17.

$$\text{Luego: } m = 0,2647 = 1 - \frac{1}{1,3} \cdot \frac{1,08333}{1,13333} ;$$

iv) Y, a su vez, la (tasa de) *Rentabilidad sobre la inversión total* ( $r$ ) formulada al principio (pág. 10) es una variable que depende de la *tasa de Margen* [ $m$ ], y de otras dos variables de carácter financiero: el Ingreso-por-unidad-monetaria de (la inversión en) Activos (opera-tivos), y la ratio Activos respecto a Recursos totales<sup>40</sup>. De ahí que el cambio que se observe en dicha Rentabilidad al efectuar una comparación temporal será la resultante de los cambios en las tres variables ‘componentes’. Así, utilizando el mismo ejemplo numérico:

| Rentabilidad (operativa) s/ Recursos Totales,<br>$r = \frac{BE}{RT} \equiv \frac{BE}{IE} \cdot \frac{IE}{AE} \cdot \frac{AE}{RT} \equiv m \cdot \frac{IE}{AE} \cdot \frac{AE}{RT}$ | ejemplo numérico anterior |                       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|-----------------------|
|                                                                                                                                                                                    | <u>año base</u>           | <u>año en estudio</u> |
| $r =$                                                                                                                                                                              | 40%                       | 58,2%                 |
| $m = BE/IE$                                                                                                                                                                        | 20%                       | 26,47%                |
| $IE/AE$                                                                                                                                                                            | 1,27                      | 1,18                  |
| $AE/RT$                                                                                                                                                                            | 1,66                      | 1,86                  |

#### Esquema resumen sobre relación entre los indicadores de eficiencia



vi) Conclusiones:

\* La *tasa de margen* será un indicador aceptable para hablar del cambio en la eficiencia productiva cuando pueda admitirse que la composición -en valor monetario- del output global de la empresa no ha variado substancialmente, y que la variación relativa de los precios de venta que ha aplicado ha sido prácticamente idéntica a la experimentada por los precios de compra/contratación de los factores que utiliza. Si se dan esas circunstancias,  $m$  será, pues, una buena variable ‘proxi’ de la productividad global.

<sup>40</sup> La primera es tipo ‘índice de rotación’ (en la terminología del análisis de estados contables) aunque también puede interpretarse como una cierta medida del *rendimiento comercial de la inversión representada por el Activo*. Si bien es una variable (ratio) que viene muy influenciada por decisiones estratégicas de la empresa sobre comprar/alquilar y producir/subcontratar. Por el contrario, la segunda ratio, nos habla puramente de la estructura financiera de la empresa: es tanto mayor como mayor es la parte del activo de la explotación que no está financiada con RT, es decir, aquella que lo está con crédito comercial de proveedores (que no tiene coste financiero).

- \* La *tasa de rentabilidad* será un indicador aceptable para hablar del cambio en la eficiencia solo cuando, además de las circunstancias anteriores, pueda comprobarse que el ‘ingreso operativo’ por unidad monetaria de capital invertido (IE/RT) no ha variado substancialmente. Es, en cierto sentido pues, el ‘menos bueno’ de los indicadores para medir la eficiencia, dado que depende de diversas variables, además de la productividad.
  - \* Todas las expresiones anteriores referidas a ‘cambio registrado de un periodo a otro’ son automáticamente trasladables a la comparación entre una empresa y otra. Si bien resultará entonces más apropiado hablar, en lugar de ‘cambio’, de ‘*diferencia*’ (en la eficiencia, en el coste medio, en los precios, en la composición del output, ...etc.) entre las empresas comparadas.
- vii) ¿Y si al decir ‘eficiencia’ en realidad no nos referimos a la eficiencia productiva sino a otra cosa?
- \* Si lo que en realidad queremos medir es la *competitividad* de una empresa, en comparación con otras del mismo sector, el mejor indicador no será  $\Pi$  sino el coste medio: Para ser competitiva una empresa necesita tener un coste ‘competitivo’ es decir, más bajo si es posible que el de las empresas competidoras. Que ese menor coste medio se consiga incrementando la productividad u obteniendo reducciones en los precios de compra/contratación de los factores, no es algo relevante desde la perspectiva de la competitividad.
  - \* Y si lo que en realidad queremos es medir, como inversores o analistas externos, es la *capacidad de la empresa de recuperar el capital invertido (RT)* entonces el mejor indicador será la tasa de rentabilidad sobre recursos totales ( $r$ ). De la misma manera que si de lo que se trata es de medir el comportamiento económico de la empresa desde la perspectiva de accionistas, el mejor indicador será la *tasa de rentabilidad neta sobre los recursos propios*, que depende de la anterior y del efecto apalancamiento (así como también de los resultados atípicos y extraordinarios).
  - \* Probablemente, la relación entre indicadores más más relevante sea la iii): entre tasa de margen y productividad total de los factores:

#### *Efecto Productividad y Efecto Precios*

En términos más generales que los del ejemplo anterior, la relación entre ambas variables – como hemos visto antes en 4.2- puede establecerse como:

$$[9] \quad m^x = 1 - \frac{1}{\Pi^x} \cdot \frac{IK^x}{IP^x} ; \text{ o, lo que es equivalente, } \left( \frac{IE}{CE} \right)^x = \Pi^x \cdot \frac{IP^x}{IK^x}$$

Donde los indicadores de variación promedia de precios están definidos, respectivamente, como:

$$[7] \quad \sum_i \frac{1}{IP_i^x} \cdot v_i^x \equiv \frac{1}{IP^x} ; \quad [8] \quad \sum_j \frac{1}{IK_j^x} \cdot a_j^x \equiv \frac{1}{IK^x}$$

Esta relación no solo permite efectuar una descomposición factorial que explique el cambio de un año a otro (la diferencia entre una empresa y otra) en los resultados económicos (variable  $m$ , o  $IE/CE$ ) en términos del efecto productividad y del efecto precios –como hemos visto antes en 4.2- sino que puede utilizarse como útil elemento de proyección. Por ejemplo, supongamos que para el año ‘x’ los valores observados dan:

$$[9] \quad \frac{26,1}{100} = 1 - \frac{1}{1,52} \cdot \frac{1,55}{1,38}$$

y que queremos extrapolar cual será la tasa de margen en el periodo siguiente, según diferentes escenarios en cuanto a productividad y en cuanto a variaciones de precios:

$$\frac{?m}{100} = 1 - \frac{1}{1,52 \cdot (1+a)} \cdot \frac{1,55 \cdot (1+b)}{1,38 \cdot (1+c)},$$

donde  $a$  es el incremento esperado para la productividad;  $b$  es el incremento medio esperado para los salarios y demás precios de adquisición de los factores, y  $c$  es el incremento medio esperado para los precios de facturación de la empresa (los tres en tantos por uno). El resultado podría ser del siguiente tipo:

| Escenarios | Variables (x 100) |     |     | proyección |
|------------|-------------------|-----|-----|------------|
|            | a                 | b   | c   | m (x 100)  |
| I          | +3%               | +2% | +2% | 28,3 %     |
| II         | +3%               | +2% | 0   | 26,8 %     |
| III        | +2%               | +2% | 0   | 26,1 %     |
| IV         | +4%               | +4% | +2% | 27,5 %     |
| V          | 0                 | +3% | +3% | 26,1 %     |
| VI         | -2 %              | +3% | 1%  | 24,1 %     |
| :          |                   |     |     |            |

A título de ejemplo: el escenario I contemplaría un aumento de la productividad, y conseguir aumentar en promedio los precios de venta igual a lo que aumenten los de coste/contratación; y el resultado sería que la tasa de margen de la empresa aumentaría en algo más de 2 puntos. El escenario III se correspondería con un incremento de los salarios (y del resto de los precios de factores) igual al incremento en la productividad (como a veces leemos en las propuestas de negociación sindical), y un mantenimiento de los precios de facturación; lo que llevaría a que la eficiencia económica de la empresa – medida por la tasa de margen- simplemente se mantendría. El IV sería igual, pero con un cierto incremento en los precios de facturación, por lo que la tasa de margen aumentaría. Y el más pesimista de los del cuadro sería el escenario VI.

Cambiamos ahora de perspectiva: No estamos aplicando la relación [9] a comparar un año con otro, sino a datos de dos empresas (del mismo sector, y para el mismo año). Podemos entonces explicar qué parte de su diferencial de eficiencia económica ( $m^A - m^B$ ) viene explicado por diferencias de productividad, y cual por diferencias en sus precios relativos. El cambio de perspectiva implica que IP corresponde ahora al índice de diferencia entre los precios de facturación de una empresa respecto a la otra; y IK al índice de diferencia de los salarios y demás precios de los factores que paga una respecto de los que paga otra. Así,  $IP_{A \leftarrow B} = 1,50$  significa que los precios de facturación de la empresa A vienen siendo en promedio un 50% superiores a los de la empresa B; y  $IK = 1,40$  que los salarios y demás precios que paga por los factores son en promedio un 40% superiores. De entrada esto sugeriría el cuadro de una empresa, A, con productos de más selecta calidad, y que utiliza factores en general más caros (probablemente también de mayor calidad) que los de B.

Cuando se pretende no sólo medir la eficiencia comparativa sino también tratar de explicar porqué ésta cambia de un periodo a otro en una empresa determinada, o porqué es diferente en la empresa A que en la empresa B, los analistas tienden a utilizar —como complemento del indicador de eficiencia que hayan escogido (sea  $CM$ ,  $m$ ,  $r$ ,  $\Pi$ ,  $t$ , o  $IPAT$ , etc.)— otros indicadores que miden aspectos concretos del funcionamiento de una empresa, los cuales son utilizados como posibles variables explicativas de los cambios de eficiencia observados. Por ejemplo:

- *tasa de variación del ‘output’ global* (de los ingresos a precios constantes, por ejemplo), que ilustra sobre el dinamismo de la empresa en su mercado;
- *tasa de ocupación* (*output* global / *output* global posible según la capacidad instalada), en tanto que puede explicar cambios en la eficiencia productiva;
- *cuota de mercado* alcanzada por la empresa;
- *nivel de endeudamiento*;
- *importancia relativa de las exportaciones*, en el conjunto de los ingresos por facturación
- *inversión neta anual*; o inversión acumulada; o inversión por trabajador; etc.

Las posibilidades son en este punto muy amplias dependiendo del tipo de empresa analizada y de los objetivos de la investigación <sup>41</sup>.

---

<sup>41</sup> Como ejemplo de uso de indicadores complementarios, puede verse el trabajo de Cabeza, Laura y Gómez, Silvia “The Spanish privatisation process: Implications on the performance of divested firms”, *International Review of Financial analysis*, n. 16 (2007) pp. 390-409, tabla 2 (pág. 400).

## 7 TÉCNICAS O MODELOS DE ANÁLISIS DE LA EFICIENCIA COMPARATIVA

Se exponen a continuación las siguientes técnicas o modelos de análisis:

- Análisis longitudinal (comparación en el tiempo, ‘cross time’)
- Análisis horizontal simple: comparación de dos empresas (‘cross section’ simple)
- Comparación de eficiencia, empresas tipo ‘A’ vs. empresas tipo ‘B’
- Modelos frontera; ranking de ineficiencia comparativa de un ‘pool’ de empresas
- Análisis o regresión con datos de panel (cross section & cross time)

Y se incluye un apartado sobre: Fiabilidad y relevancia de los resultados: el problema de los errores no cuantificables.

### 7.1 Análisis longitudinal o temporal (‘cross time’)

#### Evaluación de los cambios en la eficiencia de una empresa (de un periodo a otros)

*Simple comparación temporal de los valores de los indicadores.*

Considérese la siguiente información sobre dos indicadores económicos de una empresa:

| Años                       | 1997   | 1998   | 1999   | 2000   | 2001   | 2002   | 2003   | 2004   | media |
|----------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|
| <b>m (%)</b>               | 4,5    | 1,–    | –3,8   | –2,5   | 3,5    | 8,–    | 6,8    | 5,2    | 2,84  |
| <b>IE</b>                  | 36.000 | 36.000 | 35.200 | 36.500 | 38.940 | 42.517 | 41.718 | 43.400 |       |
| tasa de $\Delta$ de los IE |        | 0      | –2,2 % | +3,7 % | +6,7 % | +9,2 % | –1,9 % | +4 %   |       |

La simple “lectura” de los valores de la tasa de margen para cada año nos permite decir si la eficiencia económica –medida con esa variable- ha mejorado o empeorado de un año a otro. Así, en el ejemplo anterior si nos limitamos al subperíodo 2002-2004 la conclusión al respecto es clara: ha disminuido la eficiencia medida en términos de tasa de margen. Pero si consideramos todo el periodo 1997-2004, vemos que la serie temporal no presenta una tendencia homogénea, lo que nos impide formular una conclusión inmediata a partir de una simple lectura. Este inconveniente, bastante general, puede intentarse salvar parcialmente calculando el promedio de la variable para dicho periodo: +2,84% en este ejemplo. Aunque tal valor tiene la limitación de todas las medias: un significado demasiado global respecto de la realidad que se está midiendo. Además de que no permite hablar de la evolución de la eficiencia de la empresa estudiada (si ha mejorado, y en qué medida). En cualquier caso, la utilización del valor medio viene condicionada por el grado de fiabilidad estadística del mismo. Así, en el caso del ejemplo, la desviación estándar es 4,26 y el intervalo de confianza  $\pm 3,56$ , por lo que dicho valor medio no puede considerarse estadísticamente significativo.

*Regresión temporal.*

Existe, no obstante, una alternativa algo más explicativa: medir, mediante una *regresión temporal*, si el indicador presenta una tendencia significativa. Efectuada ésta para el ejemplo, resulta un coeficiente anual de + 0,8964, lo que en principio indicaría que la tasa de margen ha venido subiendo a razón de 0,896 puntos de % por año. Pero tal coeficiente tiene asociado un estadístico *t* que señala un grado de confianza solo del 80%, por lo que no puede decirse que la tendencia señalada por dicho coeficiente la podamos considerar razonablemente fiable. Es decir, que el test estadístico nos lleva a descartar la hipótesis de el porcentaje de margen de dicha empresa venga presentando en esos años una clara

tendencia. Obsérvese que si, contrariamente al ejemplo, la media del indicador hubiese resultado estadísticamente significativa (dispersión mínima en los valores anuales del porcentaje de margen), una regresión temporal como la referida daría como constante un valor próximo al valor de dicha media y como coeficiente un valor próximo a 0; es decir, que nos diría que no se observa en el indicador tendencia apreciable alguna sino lo contrario: estabilidad en su valor a lo largo del tiempo.

#### *Comparación de los valores medios de subperíodos,*

Se trata de una opción para cuando en la serie de años en estudio tenemos dos (o más) subperíodos que se corresponden con situaciones distintas de la empresa: antes y después de un cambio estratégico. Por ejemplo, los años antes y los de después de un cambio radical del equipo directivo; o de los accionistas de referencia; o un cambio organizativo importante en la empresa (su privatización, por ejemplo); o de un cambio substancial en la situación de mercado de la empresa (pasar a enfrentarse a nueva competencia, o a un nuevo marco regulatorio, por ejemplo). La comparación de los valores medios de los indicadores para cada subperíodo ‘antes – después’ resulta una técnica adecuada en estos casos. Así, siguiendo con la simplificación de utilizar solo el indicador  $m$ :

$$\bar{m}_{despues} - \bar{m}_{antes} = \Delta m$$

El grado de fiabilidad de las conclusiones dependerá, entre otras cosas, del grado de confianza estadística de la diferencia entre las dos medias. Así, si en el ejemplo numérico anterior suponemos que hubo un cambio substancial en la empresa a finales del año 2000 (lo que definiría dos subperiodos) y comparamos las respectivas medias de la tasa de margen, su diferencia es de +6,07 puntos de porcentaje. Y el correspondiente test  $t$  para diferencia entre medias en muestras no pareadas da un valor de 2,884, que está asociado a un nivel de error inferior al 3% (bilateral, a dos colas). La conclusión razonable en este caso sería, pues, que la eficiencia de la empresa medida por la tasa de margen aumentó en promedio de un periodo a otro en 6,07 puntos.<sup>42</sup>

#### *Tasas de variación del nivel de actividad*

El indicador ‘Ingresos de la Explotación’ (IE) se acepta en muchos casos como medida del nivel global de *output* (o *nivel de actividad*) de la empresa. Y también en ocasiones el indicador de ‘Valor Añadido’. La secuencia de sus valores anuales nos permite observar la no, desde luego, la eficiencia sino la *dinámica* de la empresa: si crece, o lo contrario, o se mantiene estable. Pero al ser -tanto un indicador como otro- una variable en valores monetarios de cada año, sus variaciones anuales muestran inevitablemente una mezcla de la variación real más el simple efecto del incremento de los precios de facturación, debido a la inflación. En consecuencia, los porcentajes de variación anual de los IE (véase la última línea de la tabla anterior) no son en realidad un buen indicador para evaluar la dinámica económica de la empresa. Si lo es el indicador ‘*ingresos de la explotación, a precios constantes*’<sup>43</sup>. La serie temporal de este indicador sí que mostrará exclusivamente la dinámica de la actividad global de la empresa. Así, en el ejemplo numérico anterior, si el índice de precios del sector es 2002 = 125.7, 2003 = 131.2, y basamos en esto la

<sup>42</sup> Pueden verse, como ejemplo de aplicación de esta técnica de análisis –frecuente en estudios comparando la eficiencia de las empresas antes y después de su privatización: Megginson, William L. / Netter, Jeffrey M. (2001), “From State to Market: A survey of Empirical Studies on Privatization”, *Journal of Economic Literature*, June 2001, vol. 39 n. 2: 321-389.

<sup>43</sup> En el sentido indicado en el apartado 2.1 anterior. Cuando falta información sobre la variación anual de los diferentes precios de venta de la empresa un último recurso que queda es tomar, como estimador para deflactar, el índice de precios del sector, que puede encontrarse en los Anuarios del Instituto Nacional de Estadística.

estimación de la variación de precios que presumiblemente aplicó la empresa de 2002 a 2003, resultará  $IE_{(de\ 2003,\ en\ \text{€ de } 2002)} = 39.970$ <sup>44</sup>; lo que nos permite decir que la tasa de variación *real* de la actividad, de 2002 a 2003, fue negativa del orden del -6% (y no del -1,9% que es lo que resulta de los valores monetarios sin corregir).

## 7.2 Eficiencia comparativa: empresa "A" <---> empresa "B" (cross section simple)

### *Simple comparación de las dos series temporales*

Sigamos suponiendo que el indicador de eficiencia que estamos utilizando es la tasa de margen operativo. Y que hemos obtenido el siguiente cuadro de datos:

|             |         | 1997 | 1998 | 1989 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | media<br>1997-04 |
|-------------|---------|------|------|------|------|------|------|------|------|------------------|
| empresa "A" | $m$ (%) | 4,5  | 1,-  | -3,8 | -2,5 | 3,5  | 8,-  | 6,8  | 5,2  | 2,84             |
| empresa "B" | $m$ (%) | 1,6  | -4,- | 2,2  | 1,-  | 6,-  | 3,-  | 1,2  | 5,6  | 2,08             |

Por simple comparación de las dos series anteriores puede afirmarse que durante 2002 y 2003 la empresa A fue más eficiente que la B. Pero no puede afirmarse para todo el periodo 1997-2004, porque hay años en que la comparación muestra lo contrario. Veamos las alternativas para poder sacar alguna conclusión al respecto en una situación (por otra parte frecuente) como ésta:

### *Comparación de los respectivos valores medios de cada serie (análisis de la varianza).*

Los respectivos valores medios para ambas empresas nos permiten decir en estos casos que, para el periodo 1997-2004, la empresa A ha sido, *en promedio*, más eficiente que la B. No obstante, siempre que se utiliza el promedio de una serie se pierde toda la información que representan los datos individuales (las tasas de cada año, en nuestro ejemplo). Además de que la comparación de promedios es una técnica tanto menos precisa cuanto más dispersas sean las series temporales que comparamos. Así, en el ejemplo anterior, como puede verificarse, también la media  $m_B=2,08$  presenta una fuerte dispersión (su desviación estándar es 3,1, y el intervalo de confianza –al nivel del 95%– es de  $\pm 2,6$ ); y como consecuencia, para la diferencia entre esas medias ( $m_A - m_B$ ) se obtiene un estadístico (de nuevo: test para diferencia entre medias de muestras no pareadas)  $t=0,4088$ , lo que indica que la diferencia observada de 0,76 puntos de porcentaje entre las medias de tasa de margen de ambas empresas no es estadísticamente significativa a un nivel de confianza aceptable. Un caso en el que, por tanto, no podríamos rechazar la hipótesis nula: Que no se observa diferencia significativa entre la tasa de margen de una empresa y la otra.

### *Comparación de tasas de variación del indicador de eficiencia.*

Es frecuente encontrar trabajos en los que se comparan las respectivas *tasas de variación de la productividad global* anuales de ambas empresas ( $t_x^A, t_x^B$ ) a lo largo de un número de años determinado ( $x=1,2,\dots$ ). En estos casos lo importante es no olvidar que no se está comparando la productividad (IPG,  $=\Pi$ ) de una empresa, en cada año de la serie, con la productividad de la otra, sino que lo que se está comparando es la variación que experimentó la productividad de una empresa con la variación que experimentó ese mismo año la productividad de la otra empresa. No es ciertamente lo mismo comparar niveles de productividad que tasas de variación de las respectivas productividades. Supongamos que en 1999 la productividad (IPG) de la empresa A era notablemente superior a la de la empresa B; y que posteriormente en esta última se tomaron medidas efectivas para tratar de eliminar las ineficiencias existentes, con tan buenos resultados que en 2004 los niveles

<sup>44</sup>  $41.718 \times 125,7 / 131,2 = 39.970$ .

de productividad de B alcanzaron prácticamente a los de A. En tal caso si optamos por calcular exclusivamente las respectivas tasas de variación de la productividad encontraremos que la empresa ‘atrasada’ B presentará en los años 90 unas tasas de variación de la productividad superiores a las tasas de la A. Pero de tal información no podemos deducir -como hacen algunos autores- que la empresa B haya sido más eficiente que la A durante esos años <sup>45</sup>.

#### *Comparación de la dinámica de ambas empresas en el mercado.*

A diferencia de lo anterior, en este caso lo que calculamos para cada empresa son las tasas anuales de variación de su output total (primer término de [4a,b]), como un indicador complementario a los de eficiencia. Cada una de las dos series temporales resultantes nos hablará simplemente de la dinámica comercial de la empresa en cuestión. Y la comparación de ambas series de tasas nos permite comparar la dinámica relativa de ambas en el mercado.

Una alternativa para llegar al mismo objetivo es calcular la tasa de variación anual de los ingresos a-precios-constantes de cada empresa, en la línea de lo expuesto antes en 3.4. Si, por el contrario, utilizásemos simplemente los ingresos nominales, las tasas de variación anuales que obtendríamos para cada empresa englobarían dos efectos: la dinámica real y el efecto de la inflación de precios. No obstante, dado que suponemos que se trata de comparar la dinámica de dos empresas de una misma economía en la práctica es indiferente hacerlo comparando las tasas de variación de los ingresos *reales* (a precios constantes) que las de los ingresos nominales; especialmente si, como es habitual, el pasar de ingresos nominales a reales se hace aplicando los mismos índices de precios externos a los ingresos de ambas empresas: En tal caso, la diferencia entre las respectivas tasas anuales será la misma en un procedimiento y en el otro. Y son esas diferencias lo que de hecho se quiere determinar para así ver en qué sentido y medida la dinámica de ambas empresas fue diferente durante los años en estudio.

|               |                    |                    |                    |                    |                    |                    |                    |                    |
|---------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| Empresa A:    | tv <sub>A,97</sub> | tv <sub>A,98</sub> | tv <sub>A,99</sub> | tv <sub>A,00</sub> | tv <sub>A,01</sub> | tv <sub>A,02</sub> | tv <sub>A,03</sub> | tv <sub>A,04</sub> |
| Empresa B:    | tv <sub>B,97</sub> | tv <sub>B,98</sub> | tv <sub>B,99</sub> | tv <sub>B,00</sub> | tv <sub>B,01</sub> | tv <sub>B,02</sub> | tv <sub>B,03</sub> | tv <sub>B,04</sub> |
| Diferencia => | ---                | ---                | ---                | ---                | ---                | ---                | ---                | ---                |

Una alternativa a la simple comparación de las dos series temporales es la de centrar la comparación en las respectivas tasas medias acumulativas anuales:  $tva^A \Leftrightarrow tva^B$ ; siendo  $tva$  aquella tasa que cumple:  $IE_{04} = IE_{97} \cdot (1 + tva)^7$ , en uno y otro caso. (En este ejemplo son siete los periodos que separan temporalmente el primer valor del último)

#### *Regresión lineal entre las dos series temporales*

Supongamos que –por tratarse de empresas uni-producto o situación asimilable- utilizamos como indicador de la eficiencia productiva el *coste medio* de cada empresa. Y que, obtenidas las dos series temporales de tal indicador llevamos a cabo el análisis comparativo (la técnica comentada ahora es, sin embargo, aplicable cualquiera que sea el indicador; por ejemplo el de *productividad*).

<sup>45</sup> A menos que obtengamos, además, la comparación de la productividad de ambas empresas para al menos uno de los años de la serie:  $t^{A,B}_0$ . De ser así, el análisis bilateral de tasas que hemos visto antes en 3.6 sí que permitiría utilizar las dos series temporales de cada empresa ( $t^A_x, t^B_x$ ) para deducir la serie completa del diferencial de productividad entre ambas empresas,  $t^{A,B}_x$  para cada año del periodo en estudio.

| Años → :                | 2000     | 2001     | 2002     | 2003     | 2004     | 2005     |
|-------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Empresa A, coste medio: | $Y_{00}$ | $Y_{01}$ | $Y_{02}$ | $Y_{03}$ | $Y_{04}$ | $Y_{05}$ |
| Empresa B, coste medio: | $X_{00}$ | $X_{01}$ | $X_{02}$ | $X_{03}$ | $X_{04}$ | $X_{05}$ |

Realizar una regresión lineal entre estas dos series temporales significa: 1) presuponer que hay una relación lineal determinada entre las dos series:  $Y = a + b \cdot X$ , y 2) determinar los valores de  $a$  i  $b$  que hacen que la recta correspondiente se ajuste lo mejor posible a la nube de puntos resultante de representar gráficamente los pares de valores de la tabla anterior.<sup>46</sup> La conclusión sobre la eficiencia comparativa dependerá del valor obtenido para estos parámetros. Veamos tres ejemplos:

| <i>Supongamos que el valor de los parámetros ha sido:</i> | <i>Eso nos permite decir que, a lo largo del periodo 1990-1995:</i>                                                                               |
|-----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $Y = 6 + 1 \cdot X$                                       | El coste medio (de cada año) de la empresa A ha sido sistemáticamente 6 unidades monetarias (u.m.) más alto (en promedio) que el de la empresa B. |
| $Y = 0 + 0,85 \cdot X$                                    | Los costes medios de la empresa A han sido sistemáticamente un 15% más bajos (en promedio) que los de la empresa B.                               |
| $Y = 3 + 0,75 \cdot X$                                    | Los costes medios de la empresa A vienen siendo (en promedio) iguales al 75% de los de la empresa B, más 3 u. m.                                  |
| $Y = -2000 + 3,2 \cdot X$                                 | Los datos no permiten establecer una relación cuantitativa fiable entre $Y$ y $X$                                                                 |

Los dos primeros ejemplos serían unos casos claros en que esta metodología permitiría afirmar que la eficiencia productiva de una empresa es igual o mejor que la de la otra. En el tercer ejemplo, la conclusión dependerá de cuál sea el valor absoluto de  $X$ ; ya que, en última instancia, lo que se trata de verificar siempre es si se da que  $Y <, =, > X$  de forma sistemática o no. Hay que tener en cuenta que, como sucede en toda regresión lineal, la validez de las conclusiones anteriores estará sujeta a que los valores de los *estadísticos* de la regresión —intervalos de confianza para los parámetros  $a$  y  $b$  estimados, sus correspondientes test  $t$ , y el coeficiente de determinación,  $r^2$ — permitan hablar de que los parámetros en cuestión tienen un grado de significación y confianza satisfactorios. Así, en el cuarto ejemplo probablemente encontraríamos que el intervalo de confianza para ambos parámetros es demasiado amplio y que sus estadísticos  $t$  presentan valores muy bajos; y que, por tanto, los parámetros en cuestión no son fiables; no son estadísticamente significativos<sup>47</sup>.

### 7.3 Eficiencia comparativa: varias empresas A <-----> varias empresas B

La base de partida en este tipo de estudios consiste normalmente en una matriz con los datos del indicador de eficiencia escogido, para cada una de las empresas tipo 'A' y cada una de las de tipo 'B', para cada año del periodo tomado para el estudio. Y matrices adicionales para cada otro indicador que se quiera aplicar. Esquemáticamente:

Valores del indicador **m**

<sup>46</sup> Conviene tener en cuenta que, en una aplicación como ésta, efectuar una regresión lineal equivale en cierta manera a realizar una *comparación dinámica de promedios*; es decir, a calcular la relación (cociente) entre el par de valores de cada periodo y después establecer un tipo de promedio ponderado de estas relaciones. Por ejemplo, si sistemáticamente el cociente entre los respectivos valores  $Y$  y  $X$  de cada año fuera igual a  $Y / X = 1,3$ , entonces la regresión lineal nos dará:  $Y = 0 + 1,3 X$ ; lo que nos indicaría que los valores de la empresa A son sistemáticamente un 30% superiores a los correspondientes valores de la empresa B.

<sup>47</sup> De hecho, se trata de un resultado 'extraño' de los que pueden salir de una regresión cuando las dos series de datos tienen valores muy similares y estables en el tiempo, lo que se traduce en que su representación gráfica resulta en una nube de puntos de forma aproximadamente circular.

| Valores del indicador <b>II</b> |                                  |    |    |     |       |       |       |    |  |
|---------------------------------|----------------------------------|----|----|-----|-------|-------|-------|----|--|
| ↓Empresas                       | Valores del indicador: <b>CM</b> |    |    |     |       |       |       |    |  |
| Años →                          | 1                                | 2  | 3  | ... | ..... | ..... | ..... | X  |  |
| <u>Tipo 'A'</u>                 |                                  |    |    |     |       |       |       |    |  |
| A1                              |                                  |    |    |     |       |       |       |    |  |
| A2                              |                                  |    |    |     |       |       |       |    |  |
| A3                              |                                  |    |    |     |       |       |       |    |  |
| A4                              |                                  |    |    |     |       |       |       |    |  |
| :                               |                                  |    |    |     |       |       |       |    |  |
| :                               |                                  |    |    |     |       |       |       |    |  |
| media                           | $CM_A$                           | .. | .. |     |       |       |       | .. |  |
| <u>Tipo 'B'</u>                 |                                  |    |    |     |       |       |       |    |  |
| B1                              |                                  |    |    |     |       |       |       |    |  |
| B2                              |                                  |    |    |     |       |       |       |    |  |
| B3                              |                                  |    |    |     |       |       |       |    |  |
| :                               |                                  |    |    |     |       |       |       |    |  |
| :                               |                                  |    |    |     |       |       |       |    |  |
| media                           | $CM_B$                           | .. | .. |     |       |       |       | .. |  |

Las opciones metodológicas en estos casos son, principalmente:

### Comparación de medias (análisis de la varianza)

Es decir, reducción al caso simple anterior, a base de calcular la *media* del indicador de eficiencia para cada grupo de empresas; y comparar después estos valores medios. Puede hacerse para más de un indicador de eficiencia simultáneamente. Y se pueden tomar los datos de cada grupo de empresas referidos solo a un año determinado, o bien los correspondientes a varios años; aunque, desde luego, esto último dará conclusiones más significativas. Esta operación de comparar los valores medios, es decir, calcular la diferencia entre ambas medias para el indicador que estemos utilizando ( $CM_A - CM_B$ , en el ejemplo), hace que el análisis de la varianza sea la parte más substancial de esta opción, pues es fundamental medir el grado de significación o confianza de la diferencia entre las respectivas medias obtenidas para cada grupo de empresas.<sup>48</sup> Un análisis más completo replicaría el proceso de diferencia de medias con otros indicadores de eficiencia. Y, por supuesto, los grupos de empresas a comparar pueden ser más de dos.

### Utilizar una función polinómica (lineal),

Consiste en definir una función cuyas variables independientes pueda considerarse que explican las causas por las cuales varía -de una observación a otra- el indicador de eficiencia que se esté utilizando. Considerando que una de esas causas es la de ser empresas con diferente estructura de propiedad (públicas unas, privadas las otras, por ejemplo). Así, por ejemplo:

<sup>48</sup> Como ejemplo de aplicación de esta técnica de análisis -que es de las más utilizadas en estudios comparativos- puede verse: Dewenter, Kathryn / Malatesta, Paul H. (2001) "State-Owned and Private-Owned Firms: An Empirical Analysis of Profitability, Leverage, and Labour Intensity", *American Economic Review*, 91 (1): 320-334.

$$CM = a_0 + a_1 \cdot IPAT + a_2 \cdot W + a_3 \cdot Q + a_4 \cdot D + \varepsilon \quad [15]$$

donde: CM = coste medio; IPAT = Índice de productividad aparente del trabajo; W = coste por hora del trabajo; Q = volumen de output total; D = variable ficticia binaria, D=1 si empresa tipo 'A' y D=0 si empresa tipo 'B'; y  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  y  $a_4$  son los coeficientes a determinar a través de una regresión lineal múltiple.

Definir una función como ésta supone estar efectuando ciertas hipótesis de causalidad (que pueden demostrarse luego más o menos acertadas). Así, en este caso, se está presuponiendo que el coste medio puede ser distinto según el tipo de empresa (variable D) pero también, e independientemente de lo anterior, de la productividad aparente del trabajo de cada empresa, de los costes laborales medios ídem, y del volumen de actividad de la empresa (esto último indicaría diferencias debidas a economías de escala). Los datos necesarios para aplicar una función como la del ejemplo, responderían al siguiente esquema:

| Datos del año x-1 |                 |      |   |   |   |
|-------------------|-----------------|------|---|---|---|
| ↓Empresas         | Datos del año x |      |   |   |   |
| variables →       | CM              | IPAT | W | Q | D |
| <u>Tipo 'A'</u>   |                 |      |   |   |   |
| A1                |                 |      |   |   | 1 |
| A2                |                 |      |   |   | 1 |
| A3                |                 |      |   |   | 1 |
| A4                |                 |      |   |   | 1 |
| :                 |                 |      |   |   | : |
| A68               |                 |      |   |   | 1 |
| <u>Tipo 'B'</u>   |                 |      |   |   |   |
| B1                |                 |      |   |   | 0 |
| B2                |                 |      |   |   | 0 |
| B3                |                 |      |   |   | 0 |
| :                 |                 |      |   |   | : |
| B86               |                 |      |   |   | 0 |

Obtenidos, a partir de los datos anteriores los coeficientes de la función (y suponiendo que los estadísticos correspondientes ( $t$ ,  $p$ -value) indicasen que dichos coeficientes son estadísticamente significativos, fiables), el  $a_4$  es el que propiamente nos permitirá sacar conclusiones sobre la eficiencia comparativa entre un tipo de empresas y el otro. Así, si hubiese resultado  $a_4 = -26$  significaría que el CM tiende a ser 26 € menor en las empresas tipo 'A' que en las del tipo 'B', independientemente de si producen más o menos, de si pagan salarios más o menos altos, y de si la productividad aparente del trabajo es mayor o menor. Y, si, por ejemplo, hubiésemos obtenido  $a_3 = -0,04$ , su signo negativo nos indicaría que efectivamente existen ciertas economías de escala en el sector, pues el CM se reduce algo a medida que el volumen de output de una empresa es mayor, independientemente de que la empresa sea del tipo 'A' o 'B'. La pregunta siguiente sería si esas economías de escala son importantes o más bien insignificantes -en cuanto su efecto sobre el coste medio-, lo cual dependerá del valor absoluto del coeficiente (0,04), y del orden de magnitud de las variables implicadas. Supongamos que el CM se mueve alrededor de los 62 €, y la variable Q alrededor de las 1as 1.500 Tn. Podremos decir entonces que incrementar el volumen de output en 100 Tn está asociado a una reducción de 4 € en el coste medio; lo que, comparado con el orden de magnitud de éste (62 €) resulta un efecto

relativamente importante. Por el contrario, si el orden de magnitud del CM fuese de alrededor de 620 € concluiríamos que el efecto de las economías de escala detectadas es más bien insignificante. O, dicho de otro modo, que Q no es una variable muy relevante en la determinación del coste medio de las empresas estudiadas.

En algunos trabajos de investigación podemos encontrar que en el lugar de la variable dependiente está de hecho su logaritmo (*ln CM* el caso anterior). Entonces el significado de los coeficientes obtenidos de la regresión es diferente: si, por ejemplo, ha resultado que  $a_4 = -0,035$ , significa que el CM de las empresas tipo 'A' tiende a ser un 3,5% menor que el de las de tipo 'B'; etc.<sup>49</sup>

Utilizar una función –ésta o las siguientes- supone, como puede verse, un enfoque más amplio que el de la simple medida y comparación de la eficiencia de ambos grupos de empresas. Según el tipo de variables independientes que se introduzca –además de la relativa al tipo de empresa- el utilizar una función permite aislar diferencias de eficiencia que vienen explicadas por otras variables ajenas al tipo de empresa (con lo que el diferencial de eficiencia que aparece atribuible al tipo de empresa gana en significación). O bien permite, además de medir el diferencial de eficiencia, obtener explicaciones del porqué del mismo; por ejemplo: que es debido en parte a que las empresas tipo B utilizan mayor inversión fija por persona, en parte a economías de escala, en parte por pagar salarios distintos, ... etc.

**Términos de interacción.-** -En ciertos trabajos encontramos que en la definición de la función cuyos coeficientes se van a estimar mediante regresión múltiple se incluye como variable explicativa adicional el producto de dos (o más) de sus variables independientes (hablamos entonces de términos multiplicativos o de interacción). Tiene esto sentido si se presupone que el efecto de una de las variables independientes sobre la variable independiente (coeficiente) no es en realidad una constante sino que depende en cierta medida del valor que tome (la) otra variable independiente. Así, si nos parece razonable la hipótesis de que el efecto de la productividad parcial del trabajo (IPAT) sobre el coste medio de las empresas estudiadas (CM) no será un valor constante sino –por ejemplo- algo menor si la empresa tiene un volumen de producción mayor, podemos formular la función como:

$$CM = a_0 + a_1 \cdot IPAT + a_2 \cdot W + a_3 \cdot Q + a_4 \cdot D + a_5 \cdot (IPAT \cdot Q) + \varepsilon \quad [16]$$

La regresión según este *modelo interactivo* dará lugar a unos coeficientes distintos a los del ejemplo anterior (*modelo aditivo*); especialmente en cuanto a los coeficientes  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_3$ . El efecto de la variable IPAT sobre CM, su coeficiente, vendrá dado ahora por  $(a_1 + a_5 Q)$ ; un valor no constante sino variable, en función del valor que tome Q. Puede establecerse una comparación entre los resultados de ambos modelos: si calculamos  $(a_1 + a_5 Q)$  para un valor de Q igual a su media en la muestra utilizada, el resultado será aproximadamente igual al valor del coeficiente  $a_1$  del modelo aditivo (o de coeficientes fijos)<sup>50</sup>. Y, por supuesto un término de interacción puede ser entre una variable ordinaria (continua) y una variable

<sup>49</sup> Tal significado se deriva de tener en cuenta que un incremento (una reducción) en el logaritmo natural de una variable es una tasa de variación (o de diferencia) de dicha variable, expresada en tantos-por-uno:  $\Delta \ln(CM) \equiv \ln(CM_A / CM_B)$ .

<sup>50</sup> Y, paralelamente, también habremos de interpretar que el efecto del volumen de output, Q, (como variable proxy del tamaño de la empresa) sobre el CM viene ahora indicado por el coeficiente  $(a_3 + a_5 IPAT)$ .

Sobre la inclusión de términos de interacción y la interpretación de los coeficientes resultantes de la regresión es recomendable el especialmente claro trabajo seminal de Robert J. Friedrich "In Defense of Multiplicative Terms in Multiple Regression Equations", *American Journal of Political Science*, 26-4, 797-833. Especialmente el apartado *Interpreting regression coefficients in models with multiplicative terms* (pág. 804-809).

dicotómica (Dummy) -por ejemplo, relativa al tipo de empresa. Lo que resulta especialmente interesante para comparaciones de eficiencia entre empresas de dos (o más) categorías (públicas vs. privadas, ...).

**Términos cuadráticos.**- Hay autores que de forma simultánea o independientemente de lo anterior definen su modelo introduciendo también como variable independiente el cuadrado de una (o más) de las variables independientes ‘primarias’. Así, si siguiendo con nuestro ejemplo definimos el modelo como

$$CM = a_0 + a_1 \cdot IPAT + a_2 \cdot W + a_3 \cdot Q + a_4 \cdot D + a_5 \cdot Q^2 + \varepsilon, \quad [17]$$

ello significa que estimamos razonable presuponer que el efecto de la variable volumen de output, Q, sobre el coste medio, CM, no será siempre exactamente el mismo sino que dependerá de si el propio volumen de output es más alto o más bajo. Si efectivamente esto es así o no nos lo dirá el valor que después resulte para el coeficiente  $a_5$  y para su test estadístico. En definitiva, un término cuadrático es formalmente un término de interacción; en este caso de la variable en cuestión (Q) consigo misma. En consecuencia, el efecto de la variable Q sobre el CM (su coeficiente; o, si se prefiere: la pendiente de CM respecto a Q, manteniendo todas las demás constantes) vendrá dado ahora por el valor que tome  $(a_3 + a_5 Q)$  <sup>51</sup>.

### Funciones multiplicativas ('translog')

Se trata de definir una función, como en el caso anterior, presuponiendo unas relaciones de causalidad ente una variable dependiente y unas variables independientes; pero en este caso la forma funcional no es polinómica sino multiplicativa-exponencial. Por ejemplo:

$$CM = a \cdot q^{x_1} \cdot W^{x_2} \cdot K^{x_3} \cdot e^{x_4 \cdot D} \quad [18]$$

En el que supondremos que K= precio de compra del combustible (energía), y el resto de las variables tiene el significado que les hemos venido dando antes. D=1 si Empresa pública; D=0 si empresa privada.

Y donde: a,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$ , son los coeficientes a estimar.

Esta función multiplicativa es después linealizada tomando logaritmos naturales (transformación logarítmica o ‘función translog’), a fin de permitir una determinación de los coeficientes de la función a través de una regresión lineal múltiple. Así, siguiendo con el ejemplo:

$$\ln(CM) = \ln a + x_1 \cdot (\ln q) + x_2 \cdot (\ln W) + x_3 \cdot (\ln K) + x_4 \cdot D \quad [19]$$

Es decir, que definida la función translog (y calculada una nueva base de datos con los  $\ln$  de los valores de todas las observaciones de nuestra muestra), es aplicable todo lo dicho antes respecto a efectuar e interpretar una regresión con una función polinómica lineal. Incluida la posibilidad de introducir términos de interacción y términos cuadráticos en la función translog <sup>52</sup>. Con la diferencia, claro, de que al interpretar los coeficientes de la regresión habremos de tener en cuenta que se refieren no a las variables en sí sino a sus logaritmos naturales.

No siempre que un autor opta por un modelo de este tipo la variable dependiente es un indicador de eficiencia. Es frecuente en la literatura sobre el tema encontrar como tal el Coste total (C); (se habla entonces de *función de costes*). Y también el volumen de producción (q), en cuyo caso se habla de una *función de producción*. Como en el caso del

<sup>51</sup> Para una exposición más completa puede verse la referencia anterior, páginas 828-230.

<sup>52</sup> En la función original, exponencial, un término de interacción entre, por ejemplo, la variable W y la q aparecerá normalmente como un nuevo factor en la expresión, de la forma:  $W^{x_5 \cdot \ln q}$ , el cual en la función linealizada quedará como:  $+ x_5 \cdot \ln q \cdot \ln W$ .

modelo polinómico, en estas opciones metodológicas el objetivo no es directamente –o no es simplemente- comparar la eficiencia de un tipo de empresas respecto de la de otro (EP/empresa privada, por ejemplo), si no tratar de explicar qué parte de las diferencias observadas -en los costes medios, por ejemplo- entre las diferentes empresas viene explicada por la variable tipo de empresa (pública/privada), qué parte por el tamaño de la empresa (economías de escala), ...etc.

Una de las ventajas que ofrece este tipo de modelos translog es que una vez determinados los coeficientes estos tienen un significado en términos de tasas de variación, lo que puede resultar de comprensión más directa. Así, por ejemplo, si de la regresión de [19] obtenemos  $x_1 = -0.20$ , el signo negativo nos indica, como antes, que existen economías de escala favorables; y el valor del coeficiente significa que un incremento de (por ejemplo) un 10% en el volumen de output -manteniendo todas las demás variables independientes constantes- se traduce en una disminución de alrededor del 2% en el coste medio  $(-0.20 \cdot 10)$ ,<sup>53</sup> lo que pone de relieve directamente la importancia relativa de éstas, sin necesidad de introducir el orden de magnitud de las variables implicadas ( $CM$  y  $q$ ). Y si, por ejemplo,  $x_4$  resultase ser igual a  $+0.05$ , significaría que las EP presentan en general unos costes medios alrededor de un 5% superiores a los de las empresas privadas -si éstas pagasen los mismos precios y tuviesen un volumen de actividad similar. Es decir, que el coste medio tiende a ser un 5% mayor, independientemente de -o manteniendo constantes- las demás variables explicativas<sup>54</sup>. Por supuesto, la validez de estas conclusiones estará sujeta a que los estadísticos obtenidos en la regresión para cada coeficiente –test  $t$ , intervalos de confianza, cuestiones de colinealidad, etc.- y el coeficiente de determinación  $R^2$  permitan estimar para los valores de los coeficientes un grado de significación y confianza satisfactorios.

Es útil remarcar que, como puede verse por los ejemplos numéricos, los coeficientes de una regresión translog pueden interpretarse como *elasticidades* de la variable dependiente respecto a las respectivas variables independientes (o, dicho de otro modo, variables explicativas). Así,  $-0.20$  puede leerse también como que la elasticidad del coste medio respecto del volumen de producción es negativa, e igual a  $0.20$ :

$$\text{Elasticidad } (CM \leftarrow q) = \frac{\% \Delta CM}{\% \Delta q} \quad [20]$$

es por ello que en ciertos trabajos podemos encontrar que los autores se refieren al valor de las respectivas elasticidades, al hablar del significado de los coeficientes obtenidos para una función translogarítmica.

<sup>53</sup> Argumentación general: Siendo  $x_1 = -0.20$ , si  $\ln(q)$  aumenta en  $0.1$  ello hará aumentar  $\ln(CM)$  en  $-0.02$ , dado que un incremento -de un periodo a otro- en el  $\ln(\cdot)$  de una variable ( $q$ ,  $W$ ,  $CM$ , ...etc.) mide la tasa a que ha variado ésta. O, en términos más generales, mide un determinado incremento relativo de la variable en cuestión. Los coeficientes resultantes para la función translog nos dan, pues, directamente, la relación entre la variación relativa de la variable dependiente respecto a la variación relativa de tal o cual variable independiente; con lo que no es necesario conocer el orden de magnitud en que vienen expresadas las variables para saber si tal o cual variable incluida como independiente juega un papel relevante o no como variable explicativa de la variable dependiente.

En algunos trabajos de investigación podemos encontrar la función linealizada expresada en términos de primeras diferencias;  $\Delta \ln CM = \Delta \ln a + x_1 \Delta \ln q + \dots$ . No es ningún cambio substancial (la regresión efectuada ha sido la misma, y los coeficientes significan lo mismo; se trata de una variante de presentación que simplemente facilita interpretar el significado que, hemos visto, tienen los coeficientes.

<sup>54</sup> Pueden verse ejemplos concretos de aplicación de esta técnica analítica en Milward / Parker (1983), *Public and private enterprise; Comparative behaviour and comparative efficiency*, pàg. 229-233, y 243-244.

### Modelos tipo ‘función de producción’

Como se ha indicado, una variante usual de funciones multiplicativas en la literatura sobre el tema de la eficiencia comparativa EP/Empresa privada es la de la *función de producción*. Consiste en tomar como variable dependiente las unidades de producto,  $q$ , y como variables independientes las unidades de los factores, más, eventualmente, otras variables explicativas. La formulación suele ser en estos casos del tipo:

$$q = f(F_j, D)$$

donde:  $F_1$ = unidades del factor 1; ..., etc;  $D$  = variable binaria (dummy), para el tipo de empresa.

Así, como ejemplo simplificado:

$$q = a \cdot L^{x_1} \cdot C^{x_2} \cdot A^{x_3} \cdot e^{x_4 \cdot D}$$

(donde:  $L$ = número de trabajadores;  $C$ =Unidades de combustible;  $A$ =Activos fijos (€) ).

La condición para poder aplicar propiamente una función de producción es que estemos considerando empresas que producen un solo producto (p.e., eléctricas: KWH); o bien que, produciendo diferentes bienes, las cantidades de estos se puedan razonablemente expresar de forma agregada mediante una cierta variable o unidad de cuenta representativa del output global:  $Q=f(q_i)$ , (p.e., Km-vehículo, en el caso de empresas de transporte).

En cualquier caso, en esta opción metodológica no se utiliza de hecho un indicador de eficiencia como variable dependiente a explicar sino que, como puede verse, el análisis de eficiencia comparativa se efectúa de forma implícita: Si utilizando unas mismas cantidades de los tres factores las empresas tipo ‘A’ tienden a obtener un volumen de producción mayor que las del tipo ‘B’, concluiremos que las primeras son en general más eficientes que las segundas. Continuemos con un ejemplo menos simplificado que el anterior:

$$Q = a \cdot (L_1)^{x_1} \cdot (L_2)^{x_2} \cdot E^{x_3} \cdot M^{x_4} \cdot C^{x_5} \cdot R^{x_6} \cdot e^{x_7 \cdot D} \quad [21]$$

donde:

$Q$  = Unidades de output total

$L_1$ = unidades de trabajo, de tipo 1;

$L_2$ , ídem, tipo 2

$E$  = unidades de energía/combustible

$M$  = unidades de materia prima.

$C$  = unidades de capital (inversiones en bienes de equipo, ponderadas con la duración esperada de cada uno, por ejemplo).

$R$  = unidades de ‘Resto de los factores’

$D$  = 1 si la empresa es pública; = 0 si es privada

En una función como la anterior el grado de eficiencia está implícito en la propia función, en tanto que relaciona precisamente el nivel de output global con las cantidades de los inputs, y con la variable que representa si la empresa está bajo control público o privado. Así, por ejemplo, si de la regresión resultase que  $x_7=0,015$  (y esto fuese estadísticamente significativo), podría decirse que cuando la empresa es pública, consumiendo unas mismas cantidades de factores, produce un 1,5% más de unidades de output que si fuese privada.

Como se habrá podido deducir, es característico de esta metodología el simplificar la realidad analizada a base de considerar como factores ‘trabajo’, ‘capital’, ‘materia prima’, ... etc.. Lo que, más que factores (en el sentido que esto tiene en una *función de producción*), constituyen bloques de factores. El problema que esto conlleva es que dentro de cada uno de esos bloques hay en realidad factores diversos, con características y precios distintos; (cualquier empresa utiliza diversas clases de trabajo, diferentes materias primas, diferentes bienes de capital, diferentes servicios externos, etc.). Esto constituye una serie limitación pues las unidades físicas de factor dentro de esos bloques son

inevitablemente heterogéneas. Normalmente no se dispone de la información sobre esas cantidades para las empresas de la muestra, lo que hace que los autores que optan por esta metodología acaben tomando -a los efectos de aplicar la función- como ‘unidades de factor’ (‘trabajo’, ‘capital’, ..etc .) lo que de hecho son agregados monetarios: costes de personal, costes por consumos de materiales, amortizaciones, ... etc..

En todo caso conviene no olvidar que trabajar con variables agregadas en ese sentido siempre comporta introducir un determinado elemento de error. Una simplificación extrema, pero no por ello menos utilizada, de este tipo de planteamientos consiste en utilizar una típica función de producción neoclásica Cobb-Douglas, definida usualmente como una relación entre la cantidad de output y las cantidades de *dos* inputs: trabajo (L) y capital (C):  $q = a \cdot L^\alpha \cdot C^\beta$ .

### Modelos frontera (Funciones de producción frontera)

Una forma frecuente de aplicar el concepto de función de producción como técnica para medir la eficiencia relativa de un conjunto de empresas es prescindir de la variable explicativa ‘tipo de empresa’ (D). La idea entonces es determinar una función que describa la relación ideal, de máxima eficiencia, entre el producto y los factores. Una idea ciertamente ambiciosa, pues supone que es posible conocer y formalizar complejas relaciones entre un número elevado de variables –variables y relaciones que además están sujetas a cambios- de tal manera que quede plasmada la ‘fórmula’ de la gestión económicamente perfecta en una determinada actividad empresarial. Algo que nos lleva a pensar en la existencia de un observador omnisciente ... Pero dejemos esto de momento.

#### ... Paramétricos

La idea de función de producción así entendida, expresada, para simplificar y como es habitual, suponiendo que las  $n$  empresas a estudiar solo utilizasen dos factores, consiste en una función que describe el volumen teórico o ideal de producto ( $q'$ ) que debería haber obtenido una empresa con las cantidades de factores que realmente ha utilizado:

$$q' = a \cdot L^{x1} \cdot C^{x2} \quad ; \quad [22]$$

Y en general, para cualquier número de factores y demás variables explicativas:

$$q' = a \cdot \prod_j F_j^{xj}$$

Si realmente conocemos esta función (es decir, los coeficientes  $a$ ,  $x1$ ,  $x2$ , ..  $xj$  ...), aplicándola a las cantidades observadas de factores utilizados por una de las empresas,  $f$ , podemos determinar cual debería haber sido su producción si hubiese actuado de forma perfectamente eficiente:

$$(\text{predicción}): \quad q'_f = a \cdot (L^{x1} \cdot C^{x2} \cdot \dots)_f$$

Y comparando las unidades que realmente ha producido,  $q_f$ , con el anterior valor teórico podemos cuantificar su grado de (in)eficiencia:

$$\text{Índice de eficiencia, } INEF_f = \frac{q_f}{q'_f} \quad ; \quad INEF_f \leq 1; \quad (f=1,2,\dots,n) \quad [23]$$

Se habla entonces de [22] como función de producción frontera paramétrica; o, simplemente, *función frontera*. Una forma alternativa de expresar la misma idea de medir la (in)eficiencia de cada una de las empresas estudiadas es la siguiente:

$$q_f = a \cdot (L^{x1} \cdot C^{x2} \cdot \dots)_f - d_f \quad ; \quad d_f \geq 0 \quad [24]$$

donde la ineficiencia viene medida por la desviación de la cantidad real (observada) de producto, respecto a la cantidad predicha por la *función frontera*, o *término de error*:

$$(q' - q)_f = d_f$$

Ahora bien, suponer que somos capaces de determinar una función como [22], que describa las condiciones de máxima eficiencia en un tipo de actividad empresarial, es ciertamente utópico. No solo porque en cualquier aplicación real el número de variables (diferentes productos, diferentes factores) sería considerable (y, en consecuencia los requisitos de información enormes), sino porque tal nivel de eficiencia máximo es algo inobservable en la práctica, aparte de estar sujeto a continuos cambios (de gustos/demanda, tecnológicos, entorno económico, ... etc). No obstante, la metodología de los modelos frontera se ha reorientado a una meta algo más modesta: definir una función que describa simplemente cual es la máxima eficiencia *observada*, las *mejores prácticas* en las relaciones factores/producto en el propio conjunto de empresas cuya eficiencia se quiere evaluar, durante un periodo acotado. Esto no permite medir la eficiencia absoluta de cada empresa de la muestra, pero sí *comparar* la eficiencia relativa de cada una de las empresas del conjunto a estudiar, respecto a las ‘mejores’ de ellas. Y, por extensión, nos permite medir la eficiencia relativa (comparativa) de un subconjunto de esas empresas (por ejemplo, las públicas) con relación a la de otro subconjunto (privadas).

Determinar una *función frontera* así entendida (llamémosle ‘de mejores prácticas’) si es algo razonablemente abordable<sup>55</sup>; por ejemplo, y siguiendo con la simplificación [22]: Tomemos las  $n$  observaciones de datos  $(q, L, C)$  de las empresas a evaluar, para un determinado año; y, previa toma de logaritmos, estimemos los parámetros  $a$ ,  $x_1$ , y  $x_2$  mediante una regresión; y explicitemos los correspondientes términos de error,

$$q_f = a \cdot (L^{x_1} \cdot C^{x_2})_f + \varepsilon_f \quad [25]$$

Unos términos de error,  $\varepsilon_f$ , que tenderán a una distribución normal con media 0. Podemos ahora incrementar la constante  $a$  hasta un valor,  $a^*$ , de tal manera que justamente todos los términos de error positivos pasen a ser ahora negativos o nulos. La nueva función así resultante será una *función frontera* definida precisamente según las mejores relaciones producto/factores observadas en la propia muestra de empresas estudiadas:

$$q_f = a^* \cdot (L^{x_1} \cdot C^{x_2})_f - d_f \quad [26]$$

Donde  $d_f$  es el valor absoluto ( $\geq 0$ ) del nuevo término de error –ahora término de ineficiencia– para la empresa observada  $f$ ; términos que cuantifican la (in)eficiencia comparativa de cada una de las empresas estudiadas. O bien podemos cuantificarla mediante un índice de eficiencia como el anteriormente descrito: Tomando el volumen de output predicho por la función *frontera-de-mejores-prácticas* para la empresa  $f$ ,  $a^* \cdot (L^{x_1} \cdot C^{x_2})_f = q_f^*$ , y determinando  $q_f/q_f^* \leq 1$ . Lógicamente, para todas las empresas (observaciones) obtendremos un valor de este índice inferior a 1 excepto para la (o las) que precisamente ha servido para definir la frontera<sup>56</sup>.

El procedimiento descrito –modificación de la constante, para transformar todos los términos de error a no-positivos:  $\varepsilon_f \rightarrow d_f$  – para así definir la frontera de mejores prácticas (modelo *determinista*) no es el único utilizado en la literatura sobre el tema. De hecho es

<sup>55</sup> Sobre estas metodologías de evaluación puede verse: Prior, D. / Vergés, J. / Vilardell, I., *La evaluación de la eficiencia en los sectores privado y público*, Instituto de Estudios Fiscales, Madrid, 1993; capítulos 6, 7, 8 y 9; Prior, D. “Los modelos frontera en la evaluación de la productividad”, *Esic Market*, oct-dic 1992, pág. 113-131.

<sup>56</sup> Un ejemplo de aplicación puede verse en Perelman / Pestieau, (1988) “Technical performance in public enterprises”, *European Economic Review*, 32: 432-441..

más frecuente el denominado *estocástico*, consistente en suponer que los términos de error iniciales tienen dos componentes,

$$\varepsilon_f = u_f + v_f,$$

con distribución diferente: uno,  $v_f$  con distribución normal y media 0, y el otro,  $u_f$ , con distribución unilateral (generalmente se supone que truncada en 0 desde abajo), con valores siempre positivos, y que es el que mide el grado de ineficiencia (es decir, el equivalente al anterior  $d_f$ ). Se habla entonces de *función frontera paramétrica estocástica*<sup>57</sup>.

Una representación simplificada (con un solo factor)

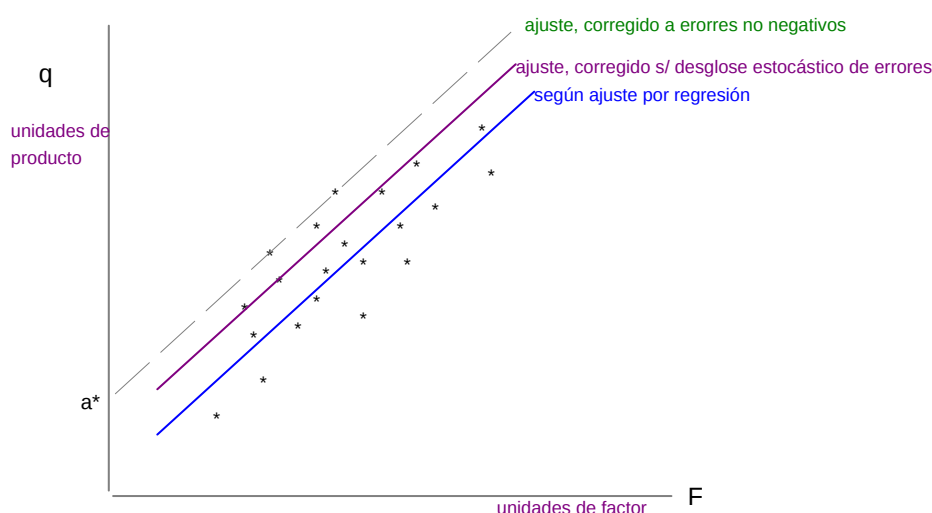


Figura 1

Lo anterior –que es generalizable a más de dos factores– es un ejemplo de lo que se denomina modelos (de función) frontera *paramétricos*, denominados así por basarse en definir una función determinada y –mediante una regresión y metodología complementaria– estimar los parámetros de dicha función –así como calcular los términos de error, o desviaciones de los datos observados para cada empresa respecto de los predichos por la función obtenida (frontera de mejores prácticas). En este contexto metodológico es frecuente que los autores distingan tres componentes en el diferencial de eficiencia ( $d_f$  ó  $v_f$ ) que obtienen para cada empresa: (in)eficiencia de escala (en el mismo sentido que se ha comentado antes); (in)eficiencia asignativa<sup>58</sup>; y al resto del diferencial no explicado por estos dos elementos se le reserva entonces la denominación de *ineficiencia técnica*.

<sup>57</sup> El referido desglose en dos componentes de los términos de error requiere, claro, efectuar algún supuesto arbitrario al respecto. Aunque que sea arbitrario no significa que no pueda basarse en alguna hipótesis más o menos razonable. Puede verse como ejemplo de esta metodología: Lynk (1993), “Privatisation, joint production and comparative efficiencies of private and public ownership: The UK water industry case”, *Fiscal Studies*, 14-2:98-116. O también, Kumbhakar / Hjalmarsson (1998), “Relative performance of public and private ownership under yardstick competition: electricity retail distribution”, *European Economic Review*, 42:97-122.

<sup>58</sup> Por (in)eficiencia asignativa en el contexto de la literatura sobre eficiencia comparativa que estamos considerando, se entiende que la relación marginal de sustitución entre dos factores en una empresa (no) sea igual a la relación entre los precios respectivos pagados por dicha empresa. Como ejemplo de aplicación de esta distinción puede verse: Atkinson / Halvorsen (1986), “The relative efficiency of public and private firms in a regulated environment: the case of US electric utilities”, *Journal of Public Economics*, 29: 281-294; o

El *índice de Malmquist* –inicialmente propuesto por este estadístico para comparar la productividad relativa entre dos países– es aplicable también a la comparación de la productividad entre dos (o más) empresas. Se basa, para ello, en definir una función de producción paramétrica del tipo descrito, pero en este caso para cada una de las dos empresas a comparar. Y a partir de tales funciones, construir un índice que mida la diferencia de productividad entre ambas. Como podrá deducirse, las exigencias de información y modelización que esta aproximación implica se multiplican respecto de lo que hemos visto hasta aquí. (Sobre tal aplicación del *índice de Malmquist* se remite al Anexo II).

### **Función de producción frontera, no paramétrica.- AED**

Los *modelos no-paramétricos*, por el contrario, no se basan en definir función alguna, sino en un enfoque más bien empírico-geométrico: la frontera se define precisamente tomando como referencia las observaciones que corresponden a las empresas que presentan unos mayores niveles de eficiencia relativa dentro del propio conjunto de observaciones disponibles.

La técnica equivale a definir la frontera a base de unir geoméricamente entre sí las observaciones ‘mejores’; entendiendo por tales las que quedan después de excluir las ‘peores’, siendo éstas las que (en el ejemplo simplificado anterior) no solo consumen más unidades de trabajo (o de combustible) por unidad de producto sino también más unidades de combustible (o de trabajo) que las ‘mejores’. Dicho a la inversa, entre las ‘mejores’ habrá una que consumirá más unidades de trabajo por unidad de producto que otra/s, pero menos unidades de combustible por unidad de producto que esas, por lo que –disponiendo tan solo de dicha información– de acuerdo con esta metodología no podemos decir a priori cual de ellas es más eficiente que cual. Y, es por ello que se define a todas estas como ‘mejores’; es decir, como de igual eficiencia. Esta es la aproximación en la que se basa el ‘análisis envolvente de datos’, AED (data envelopment analysis, DEA) <sup>59</sup>.

Como en todo modelo basado en presuponer una función de producción, las empresas a evaluar deben ser homogéneas, del mismo sector de actividad: producir el mismo tipo de output con los mismos tipos de inputs; lo contrario implica forzar más allá de su validez el concepto de función frontera. Dicha condición de homogeneidad es especialmente decisiva en esta metodología empirista. Esto lo enfatiza el modelo concreto DEA al hablar de ‘*unidades de decisión*’ (decision making units, DMU) más que de ‘empresas’. Un buen ejemplo de conjunto de DMU, en cuanto a la condición de homogeneidad de su actividad, serían las diferentes oficinas de una entidad bancaria; o las diferentes tiendas de una cadena.

Volvamos no obstante a nuestro anterior ejemplo simplificado de empresas que producen un solo output a partir de dos inputs, la ‘frontera’ no-paramétrica tipo AED se definiría, en un gráfico como el siguiente, como la unión geométrica de los puntos que

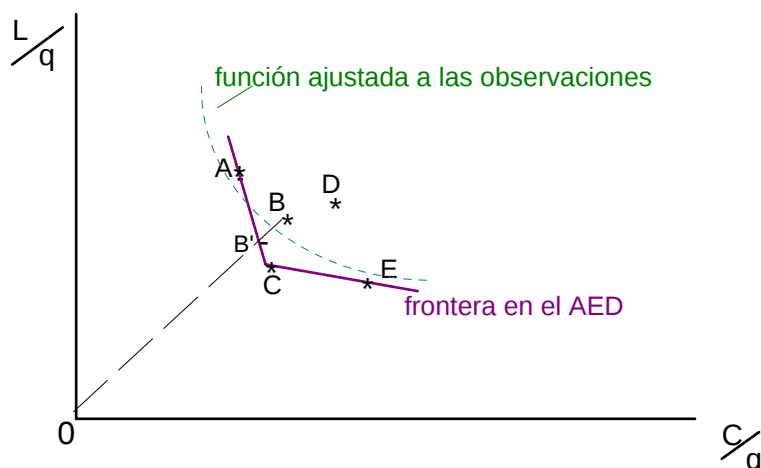
---

también Lynk (1993), op. cit.; ó: Britos /Tsionas (2004) “A consistent approach to cost efficiency measurement”, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 66, 1: 49-69.

<sup>59</sup> Una completa exposición sobre el AED puede verse en [Evaluación de la eficiencia mediante el análisis envolvente de datos](#), de Vicente Coll y Olga M<sup>a</sup> Blasco – *Eumed.net*. Como ejemplo de aplicaciones concretas a nuestro tema puede verse: “State versus Private Sector Provision of Water Services in Africa: An Empirical Analysis”, Colin Kirkpatrick, David Parker and Yin-Fang Zhang - *Centre on Regulation and Competition, Institute for Development Policy and Management, University of Manchester* (disponible en <http://www.competition-regulation.org.uk/conferences/southafrica04/kirkpatrick&parker&zhang.pdf> ). Una útil exposición gráfica de la metodología del AED puede verse en Prior, D. y Solá, M. “Planificación estratégica pública y eficiencia hospitalaria”, *Hacienda Pública Española*, n° 136, vol. 1/1996, pág. 93-108.

reflejan las combinaciones de coeficientes input/output ‘mejores’ en el sentido anteriormente definido:

Figura 2

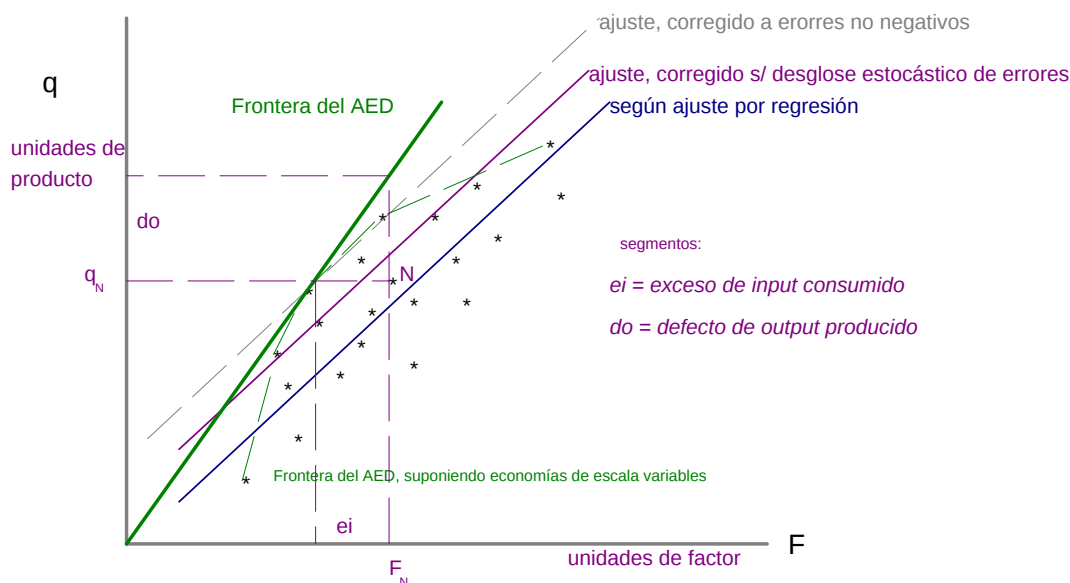


Los puntos A, B, C, D, y E del gráfico representan los valores observados para las ‘unidades de decisión’ a, b, c, d, y e. Y las observaciones ‘mejores’ son en este caso las A, C y E. Las tres obtendrán en esta metodología una medición de eficiencia igual a 1; y las unidades B y D un valor inferior. Concretamente, el indicador de eficiencia para la unidad de decisión B de la figura 1 se define como el cociente de distancias  $OB'/OB$ ; o bien, su grado de ineficiencia, como  $(OB-OB')/OB$ . Si el primer cociente resultase, por ejemplo, 0,80 –y, por tanto, el segundo igual a 0,20– interpretaremos que la unidad B está consumiendo un 20% de más de ambos factores, en comparación a las unidades que definen la frontera de mejores prácticas –en este caso, las unidades de decisión A y C.

#### *AED versus Función frontera paramétrica*

Efectuando una cierta comparación gráfica con la idea de la ‘función frontera paramétrica’, la línea curva discontinua punteada representa la función que se obtendría mediante una regresión cuadrática sobre los coeficientes input/output observados, y la poligonal representa la frontera no paramétrica según el AED. La comparación es solo sobre el tipo de aproximación –ya que la referida función ajustada no sería propiamente una función de producción. Efectuando la comparación en sentido inverso, insertando la idea base del AED en el esquema conceptual de ‘función de producción paramétrica’, el resultado –para un caso muy simplificado de un solo factor– sería del tipo descrito en el gráfico siguiente.

Figura 3



Desde esta perspectiva, el indicador de eficiencia sería igual a 1 para la unidad que está definiendo la frontera (la mejor relación producto/factor observada) y menor a 1 para todas las demás. Así, para la unidad N, por ejemplo, sería  $(F_N - ei)/F_N$ , (orientación al input); o bien  $q_N/(q_N + do)$ , (en a orientación al output)<sup>60</sup>.

Hay, sin embargo, una diferencia más de fondo entre ambas aproximaciones: una función de producción paramétrica no nos obliga pero presupone que la tecnología es substancialmente la misma para todas las empresas estudiadas y que, por tanto, hay un cierto valor ideal u óptimo de los diferentes coeficientes input-output tipo  $L/q$  y  $C/q$  en la figura 1; valores que se van a reflejar precisamente en (si bien no son conceptualmente iguales a) los coeficientes que la regresión nos da para una función tipo [25]. Sin embargo, en el AED como puede verse con el ejemplo simplificado de la figura 1, se presupone como normal que cada 'unidad de decisión' puede estar utilizando una tecnología diferente, en el sentido de utilizar en mayor proporción un factor (por ejemplo, equipos) que otro (por ejemplo, personal).

En cualquier caso, el atractivo principal de la técnica AED es que, utilizando el instrumento matemático de la programación lineal, es generalizable no solo a más de dos factores sino también a más de un producto<sup>61</sup>. En contrapartida, obliga a definir la frontera de eficiencia, como hemos visto, de forma poco exigente, pues solo exige para poder calificar a una empresa/unidad de decisión (observación) como eficiente (índice=1) que no pueda afirmarse en base a sus diferentes coeficientes input/output<sup>62</sup> observados, que hay

<sup>60</sup> Puede verse que bajo el supuesto de economías de escala constantes (línea de frontera de trazo grueso) ambas orientaciones dan la misma medida de ineficiencia.

<sup>61</sup> Las opciones en cuanto a qué ya como definir outputs e inputs (introducir indicadores de calidad como un output, por ejemplo) han llevado a un desarrollo notable de la literatura sobre DEA. A título de ejemplo puede verse Balaguer-Coll, Maria Teresa & Prior, Diego & Tortosa-Ausina, Emili, 2007. "On the determinants of local government performance: A two-stage nonparametric approach," *European Economic Review*, Elsevier, vol. 51(2), pages 425-451.

<sup>62</sup> Si el número de outputs es, por ejemplo, 3 y el número de inputs 4, el modelo trabajará con 12 coeficientes input/output.

otra empresa/UD (o combinación de dos) que los tenga todos ellos inferiores (mejores) o bien uno (o más) mejor y los demás iguales. Es así como las empresas/UD cuyas observaciones han servido para definir la frontera aparecen después con una ‘puntuación de eficiencia’ máxima (=1), y las restantes empresas aparecerán con puntuaciones inferiores a la unidad.

Es importante señalar que, como puede verse a partir de lo expuesto hasta aquí, esta metodología trabaja implícitamente con indicadores de productividad parcial, ya que los coeficientes input/output son las inversas de las respectivas productividades parciales para cada input (con respecto a cada output). Y, que el criterio para definir a una de las UD del estudio como ineficiente es, como habrá podido verse, muy restrictivo (de ‘baja resolución’ utilizando un término cartográfico); un criterio de tipo paretiano podríamos decir: si la UD (observación) ‘x’ presenta todos los indicadores de productividad parcial iguales que la ‘y’, excepto uno de ellos (al menos) más alto, entonces ‘x’ es considerada más eficiente que ‘y’. Una de las consecuencias de este criterio es que si, por el contrario, al hacer la comparación entre  $UD_x$  y  $UD_y$ , un indicador de productividad parcial es superior y otro inferior (por ejemplo, mayor productividad del trabajo y menor productividad del capital) esta metodología no permite discriminar qué es mejor que qué; no entra a comparar la eficiencia relativa de ambas empresas (observaciones), sino que considera que son observaciones a las que se les asigna el mismo índice de eficiencia (=1), solo que correspondientes a ‘tecnologías diferentes’. El problema aquí es que puede ocurrir perfectamente que una observación se corresponda con un coste medio <sup>63</sup> (o una productividad global) notablemente inferior (superior) a la de la otra. En términos más generales: diferentes observaciones que están en la frontera AED tendrán normalmente unos costes medios –o unos IPG- diferentes; o sea, que realmente corresponderán a niveles de eficiencia productiva (global) –o, si se prefiere, de competitividad- diferentes. Y, paralelamente, una observación catalogada de ‘ineficiente’ en el AED (índice inferior a 1) puede ocurrir perfectamente que se corresponda con un coste medio inferior (o a un IPG superior) que el de la observación de la frontera, con la cual se compara.

Junto a lo anterior conviene recordar que lo habitual para el investigador es no disponer de información completa sobre unidades de outputs y de inputs, por lo que al aplicar esta metodología se recurre también a aproximaciones y a variables proxy. Según sean las opciones al respecto (especificación/ cuantificación de outputs e inputs) los resultados del AED pueden ser notablemente distintos en cuanto a calificar a tal o cual empresa/UD de más/menos eficiente que otra/s <sup>64</sup>.

### **Análisis (o regresión) con Datos de Panel (RDP)**

Con una base de datos como la de la tabla de la página 45 (varias Empresas tipo A, varias Empresas tipo B,..., varios indicadores, varios años) la técnica de la *comparación de medias/ análisis de la varianza* utiliza los cuadros de datos de cada año (valores de los respectivos indicadores o variables, para cada empresa) conjuntamente, conformando un paquete de información único, con los datos de todos los años (*pool* de datos). Y lo mismo ocurre si aplicamos una función polinómica o una función multiplicativa-translog, o un modelo frontera: Al trabajar con el pool de datos, el número de observaciones tenidas en cuenta puede ser relativamente elevado, con lo que, desde luego, las conclusiones pueden ser estadísticamente más robustas que si se utilizase datos de un solo año. Así, por

---

<sup>63</sup> Coste medio de cada empresa, calculados a los mismos precios de los factores.

<sup>64</sup> Un ejemplo de la alta sensibilidad de los resultados a la especificación de las variables puede verse en Kerstens (1996), “Technical efficiency measurement and explanation of French urban transit companies”, *Transportation Research A*, 30-6: 431-452.

ejemplo, si un cuadro de datos anual contiene 25 EP y 40 empresas privadas, y, para cada una de ellas, los valores de 5 indicadores/variables, para cada indicador tenemos 65 observaciones (325 datos en total). Y si el número de años de la base de datos es de, p.e., 12, el número de observaciones para cada indicador es de 780 (3.900 datos en total).

Ahora bien, la posible tendencia en el tiempo para un subconjunto de empresas y para el otro –o el posible papel de la dinámica temporal en la explicación de las diferencias entre los dos o más grupos de empresas- no se explota con las técnicas anteriores. Cosa que si es posible con el *análisis (o regresión) con datos de panel*.

Esta técnica consiste en utilizar un modelo de regresiones que en nuestro caso nos permitiría obtener diferencias de eficiencia entre las  $n$  empresas estudiadas, independientemente de las diferencias que puedan ser atribuibles a la variable tiempo. Se trata en definitiva de un modelo de análisis compuesto: combina *cross-section* con análisis dinámico; es decir, análisis horizontal con análisis longitudinal. La ecuación básica cuyos coeficientes van a ser estimados se suele formular en los siguientes términos (siguiendo con el ejemplo de variables de la página 46):

$$IND_{it} = a_i + b_1 \cdot Q_{it} + b_2 \cdot W_{it} + b_3 \cdot K_{it} + e_{it} \quad [27]$$

Donde:

IND = Indicador de Eficiencia (variable dependiente, o a explicar)

$i$  = 'grupo'<sup>65</sup> o entidad observada (empresas, en nuestro caso:  $i$  = empresa 1, 2, ...  $n$ )

$t$  = año

$Q$  = Volumen total de output

$W$  = Salario medio; variable explicativa (variable independiente)

$K$  = Precio medio de coste del combustible/energía; variable explicativa.

$a_i$  = constante específica para cada entidad/empresa ('intercepts'), a obtener de la regresión.

$b_1$ , y  $b_2$ ,  $b_3$ , coeficientes a obtener de la regresión.

$e_{it}$  = términos de error, para cada observación.

Existen diferentes modelos de regresión con datos de panel.

|                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|--------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| - modelos de <i>efectos fijos</i> →                                                  | - constantes ( <i>intercepts</i> ) diferentes para cada entidad o empresa (ecuación anterior)                                                                                                                                                                                          |
|                                                                                      | - constantes diferentes para cada año.                                                                                                                                                                                                                                                 |
|                                                                                      | - constantes diferentes para cada entidad, más constantes diferentes para cada año.                                                                                                                                                                                                    |
| - modelos de <i>efectos aleatorios</i> (o modelos de <i>componentes de error</i> ) → | - las constantes para cada entidad, $a_i$ vienen aquí definidas como un valor aleatorio, con media $a_1$ : $a_i = a_1 + v_i$ . Siendo $v_i$ el 'error específico' (o diferencia) de la entidad ' $i$ '. (= <i>one-way random effect model</i> )                                        |
|                                                                                      | - (además de lo anterior) el término de error, $e_{it}$ , es definido como la suma de: una componente que varía según el año, $e_t$ , más el resto, que es el término de error para cada observación, $\eta_{it}$ ; $e_{it} = e_t + \eta_{it}$ ( <i>two-way random effects model</i> ) |

<sup>65</sup> Obsérvese que en la terminología de RDP 'grupo' no se refiere propiamente a un grupo de individuos (o de empresas), sino a cada entidad que entra en el estudio. Cada entidad será normalmente un individuo (o una empresa); o bien diferentes territorio, o colectivos demográficos, o conjuntos de empresas tipo 'A', tipo 'B', ... Pero en estos tres últimos casos (en que podemos hablar propiamente de 'grupos') los datos que entran en el modelo de RDP son al nivel de 'grupo', es decir, valores medios de los entes, individuos o empresas integrantes de cada 'grupo'.

En este último caso (*two-way random effects model*) tenemos tres términos de error o diferencias:  $v_i$ ,  $e_t$ ,  $\eta_{it}$ . O, visto de otra manera, la ecuación básica es en tal opción metodológica:

$$IND_{it} = a_1 + b_1 \cdot Q_{it} + b_2 W_{it} + b_3 K_{it} + v_i + e_t + \eta_{it} \quad [27b]$$

Donde los valores  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $v_i$  y  $e_t$ , vendrán dados por la regresión, y los valores  $\eta_{it}$  se deducen por diferencia con los valores reales u observados (datos) para  $IND_{it}$ . Como puede observarse, la diferencia de eficiencia entre una empresa y otra (independientemente de si son ‘públicas’ o ‘privadas’, por ejemplo) viene dado en los modelos de la RDP por la diferencia entre las respectivas constantes obtenidas para cada empresa,  $a_i$  (fixed effects models), o bien por la diferencia entre los términos de error específicos de cada empresa,  $v_i$  (random effects models).

(Por supuesto, el considerar en todo lo anterior concretamente dos variables explicativas (W y K) ha sido a título puramente ilustrativo/ de simplificación)<sup>66</sup>.

#### 7.4 La cuestión de la fiabilidad, y de la relevancia de los resultados cuantitativos

*Grado de confianza /nivel de error*

El grado de confianza de las conclusiones de una investigación cuantitativa como las anteriores depende –aparte de la fiabilidad de los datos de partida utilizados- de cuan correcta sea la interpretación que los autores hagan, 1) del significado de los indicadores de eficiencia utilizados, y 2) de los valores obtenidos para los coeficientes de las variables explicativas. Y respecto a esto último, la fiabilidad de que esos resultados cuantitativos representan una buena aproximación a la realidad depende, o puede medirse con, los valores de los habituales estadísticos asociados a esos resultados (t-Student, or p-value, por ejemplo). Pero hay algo más respecto a la fiabilidad de las conclusiones, que suele quedar olvidado:

- Utilizar valores agregados (bloques de factores, bloques de productos) como variables para llevar a cabo evaluaciones de productividad (algo como se ha venido señalando, muy frecuente en análisis de eficiencia -debido a que raramente se dispone de los datos necesarios al nivel de cada producto y de cada factor, sino solo de determinados agregados de estos), introduce un cierto grado de error en los resultados.
- Estimar el índice de precios de la empresa a lo largo de un periodo (que, como hemos visto -apartado 3.5-, es lo que exige una medición de productividad cuando los outputs son medidos en términos monetarios), tomando en su lugar –es decir, como estimación- un índice de precios externo (algo por cierto bastante frecuente en la literatura sobre el tema), introduce otro elemento de error.
- Tomar una variable ‘proxy’, por no tener información sobre determinada variable exigida por el modelo o metodología aplicada, comporta otro grado de error; ... etc.

Y estos errores –además de que pueden ser relevantes- son acumulativos.

<sup>66</sup> Sobre esta técnica de análisis/regresión con datos de panel se recomienda la lectura de “A Primer for Panel Data Analysis” que puede obtenerse en [http://www.nyu.edu/its/pubs/connect/fall03/yaffee\\_primer.html](http://www.nyu.edu/its/pubs/connect/fall03/yaffee_primer.html). También el esquema relativo al programa Stata que puede verse en <http://www.ats.ucla.edu/stat/stata/library>, en el apartado Panel Data Analysis. Resultará útil también una aplicación concreta como la que puede verse en el artículo “Privatisation around the World: evidence from panel data”, de Bortolotti, B, Fantini, M. y Siniscalco, D., en *Journal of Public Economics*, 88 (2003) pág. 305-332.

De lo anterior se derivan dos problemas que conviene señalar: El primero, que los diferentes elementos de error introducidos en el proceso mediante las habituales prácticas anteriores –trabajar con agregados, estimaciones o variables ‘proxy’ discutibles, ...- no son de hecho conocidos (cuantificados). El segundo, que los investigadores tienden, en general, a ignorar sencillamente la propia existencia de esos tipos de error al interpretar sus resultados, al tiempo que a ser muy exigentes y exhaustivos en cuanto a ‘tests’ estadísticos relativos a los cálculos efectuados. Resulta así entre paradójico y absurdo que los autores de un artículo dediquen suma atención a demostrarnos si los valores del estadístico *t* están asociados (en la regresión que han efectuado) a niveles de error del 0,5 o del 2 %, o a aplicar otros estadísticos altamente refinados, cuando en el proceso de elaboración de esos resultados han recurrido a agregaciones, estimaciones y variables proxy: Cualquiera de estas prácticas implica niveles de error que fácilmente pueden ser tan importantes (p.e. del 30%) que en el contexto estricto del análisis de los resultados de una regresión harían descartar un resultado por escasamente fiable.

#### *Relevancia de un resultado*

Supongamos que no existe el problema anterior (no se han utilizado agregados ni estimaciones ni variables Proxy), y que el valor encontrado para el coeficiente de una variable explicativa es estadísticamente significativo, con un alto grado de fiabilidad. El signo de dicho coeficiente nos indica el sentido de la relación con la variable a explicar. Pero si tal relación es *significativa o relevante* (cosa distinta de la *fiabilidad* estadística del coeficiente) dependerá del valor absoluto de dicho coeficiente, y de en qué unidades venga expresada su variable: si, por ejemplo, su valor es proporcionalmente muy bajo, y al aplicarlo al orden de magnitud (valor medio) de la variable explicativa el resultado es insignificante, quiere decir que tal variable explicativa influye, ciertamente, en la variable a explicar, pero de forma insignificante, inapreciable; por lo que, en definitiva, no es una variable explicativa relevante. Es decir, que la influencia de esa variable sobre la variable dependiente es in-significante.

## Anexo I

### Sobre Indicadores de Productividad Parcial

#### I.1) Relación entre el indicador de productividad global, $\Pi^x$ , y los indicadores de productividad parcial de cada factor, $\Pi_j^x$

Tomando los correspondientes índices de variación del periodo '0' al periodo 'x':

$$\pi = \frac{\Pi^x}{\Pi^0} ; \quad \pi_j = \frac{\Pi_j^x}{\Pi_j^0} ; \forall j \quad \text{puede escribirse:}$$

$$\pi = \frac{\sum_j F^0 \cdot K^0 / \sum_i q^0 \cdot P^0}{\sum_j F^x \cdot K^0 / \sum_i q^x \cdot P^0} \equiv \frac{F_1^0 \cdot K_1^0 / \sum_i q^0 \cdot P^0}{\sum_j F^x \cdot K_1^0 / \sum_i q^x \cdot P^0} + \frac{F_2^0 \cdot K_2^0 / \sum_i q^0 \cdot P^0}{\sum_j F^x \cdot K_2^0 / \sum_i q^x \cdot P^0} + \dots \quad [16a]$$

$$\equiv \frac{F_1^0 \cdot K_1^0 / \sum_i q^0 \cdot P^0}{F_1^x \cdot K_1^0 / \sum_i q^x \cdot P^0} \cdot \frac{F_1^x \cdot K_1^0}{\sum_j F^x \cdot K^0} + \frac{F_2^0 \cdot K_2^0 / \sum_i q^0 \cdot P^0}{F_2^x \cdot K_2^0 / \sum_i q^x \cdot P^0} \cdot \frac{F_2^x \cdot K_2^0}{\sum_j F^x \cdot K^0} + \dots \quad [16b]$$

El segundo factor de cada sumando mide la importancia relativa de cada factor en el coste total del año x, si bien calculados estos costes a precios del año base. Los designaremos como  $(a_j)^{x,0}$  ( $\sum (a_j)^{x,0} = 1$ ). Por tanto [16b] puede simplificarse así:

$$\pi^x \equiv \frac{\sum_i q^x \cdot P^0 / F_1^x}{\sum_i q^0 \cdot P^0 / F_1^0} \cdot a_1^{x,0} + \frac{\sum_i q^x \cdot P^0 / F_2^x}{\sum_i q^0 \cdot P^0 / F_2^0} \cdot a_2^{x,0} + \dots \equiv \pi^x \cdot a_1^{x,0} + \pi^x \cdot a_2^{x,0} + \dots \equiv \sum_j \pi^x \cdot a_j^{x,0}$$

con lo que queda demostrado que el índice de variación de la productividad global es una media ponderada de los índices de variación de las diferentes productividades parciales; siendo los pesos de la ponderación el peso relativo de cada factor en el coste total del año 'x' en estudio, calculado este coste total a precios constantes (los mismos que los del año con el que se compara).

Esta propiedad se da también respecto a las tasas nominales de variación:  $t' = \pi - 1$ . Veamos: Dado que  $\pi = \sum \pi_j \cdot a_j$ , podemos escribir:

$$\begin{aligned} \pi^x - 1 &= \sum (\pi_j)^x \cdot (a_j)^{x,0} - 1 \equiv \sum (\pi_j)^x \cdot (a_j)^{x,0} - \sum (a_j)^{x,0} \equiv \sum (\pi_j)^x \cdot (a_j)^{x,0} - (a_j)^{x,0} \equiv \sum (\pi_j)^x - 1 \cdot \sum (a_j)^{x,0} \\ &\equiv \sum (t'_j)^x \cdot (a_j)^{x,0} \end{aligned}$$

Es decir, que la tasa de variación nominal de la productividad global es una media ponderada de las tasas de variación de las productividades parciales de cada factor, siendo los pesos de la ponderación los mismos que anteriormente.

$$(t')^x = \sum (t'_j)^x \cdot (a_j)^{x,0}$$



## I.2) Productividad Parcial Aparente de los bienes de Capital (costes de amortizaciones), y Nivel de Ocupación

*¿Es realmente posible calcular IPP para el factor ‘capital’ (o para el factor ‘servicios de otras empresas’; o para ‘resto de factores’)?*

Los costes correspondientes a los factores tipo ‘Capital’ -entendiendo por ‘capital’ los equipos, maquinas, instalaciones, edificios, etc. ; es decir, el ‘Inmovilizado’ que utiliza como factor productivo una empresa- son básicamente los *costes de amortizaciones* más los correspondientes costes de reparaciones y mantenimiento. Se trata de un factor fijo o semi-fijo, por lo que al hablar – digamos, teóricamente- de su productividad (IPPA) conviene tener en cuenta que tiene dos componentes: *nivel de ocupación*, y *productividad técnica o productividad en sentido estricto*. Pero, como se ha apuntado en el texto, el cálculo de la productividad parcial del ‘Capital’ tropieza con escollos importantes.

Hagamos abstracción, para simplificar, de los costes de mantenimiento y de reparaciones, y centrémonos, así, en los costes de amortización como únicos costes del factor ‘capital’. El correspondiente índice de variación de la productividad parcial será en este caso:

$$\pi_c = \frac{\frac{\sum q \cdot P^o}{(F \cdot K^o)_c}}{\frac{\sum q^o \cdot P^o}{(F^o \cdot K^o)_c}} = \frac{\frac{\text{Ingresos}^{\text{año } x}, \text{ a precios constantes}}{\text{Costes por Amortizaciones}^{\text{año } x}, \text{ a precios constantes}}}{\frac{\text{Ingresos}^{\text{año base}} / \text{Costes por amortizaciones}^{\text{año base}}}{}}$$

Este índice de variación del periodo base al periodo ‘x’, dependerá por una parte del índice de variación de la *productividad técnica* (por hora trabajada ) de las máquinas o equipos ( $\pi_c^*$ ), y, por otra, de cómo haya variado su *nivel de utilización (ocupación)*<sup>67</sup>:

Índice de variación en el *Nivel de Ocupación* de los equipos (inmovilizado) =

$$\phi_c = \frac{\text{Nivel de ocupacion}^{\text{periodo 'x'}}}{\text{Nivel de ocupacion}^{\text{periodo base}}} = \frac{\left(\frac{HF}{HD}\right)^{\text{periodo 'x'}}}{\left(\frac{HF}{HD}\right)^{\text{periodo base}}}$$

HF = Horas efectivas de funcionamiento de los equipos

HD = Horas disponibles o técnicamente posibles ; HF ≤ HD

Si no ha habido variación ni en los equipos físicamente utilizados ni en la forma de utilizarlos, es decir, si no ha habido variación en la productividad técnica de estos equipos, el índice de variación que aparezca para el factor capital solo puede ser debido al cambio en el nivel de ocupación:  $\pi_c = \phi_c \cdot Y$ , viceversa: si los datos sobre utilización mostraran que no ha habido variación respecto al nivel de ocupación de los equipos, entonces el índice de variación que aparezca para el factor capital solo puede ser debido al cambio en su correspondiente productividad técnica:  $\pi_c = \pi_c^*$ . Y es fácil demostrar que, en general<sup>68</sup>:

$$\pi_c^* \cdot \phi_c = \pi_c \quad [28]$$

Este modelo explicativo resulta atractivo pensando en aplicaciones concretas (porque, además, conociendo dos de las variables la tercera viene dada según [17]). Pero el verdadero problema, para poder determinar  $\pi_c$ , o bien  $\pi_c^*$ , estriba en: qué es lo que

<sup>67</sup> Ambos concepto pueden aplicarse también al factor ‘trabajo’, o a cualquier otro si su comportamiento es de coste fijo o semi-fijo

<sup>68</sup>  $\pi = \frac{\sum q \cdot P^o / F \cdot K^o}{\sum q^o \cdot P^o / F^o \cdot K^o} = \frac{\sum q \cdot P^o / F}{\sum q^o \cdot P^o / F^o} = \frac{\sum q \cdot P^o / F \cdot H \cdot H^o}{\sum q^o \cdot P^o / F^o \cdot H \cdot H^o} = \frac{\sum q \cdot P^o / H}{\sum q^o \cdot P^o / H^o} \cdot \frac{F^o \cdot H}{F \cdot H^o} = \pi^* \cdot \frac{\theta}{\theta^o} = \pi^* \cdot \Phi$

debemos entender en nuestro análisis por  $(F \cdot K^0)_c$ , 'Costes de Amortización (o de Capital), a precios constantes'. Para determinar tal importe necesitaríamos conocer en cuanto han variado los '*precios* de esas amortizaciones'; o bien, conocer las correspondientes unidades (F) y precios ( $K^0$ ). Pero, ¿Cuáles son, hablando de costes de amortización, las *unidades* y cuáles los *precios*? Porque -a diferencia de los costes de personal, o de energía- se trata de un coste en el que las cantidades de factor vienen aparentemente expresadas en unidades monetarias, de tal suerte que 'cantidad' y 'coste del factor' aparecen a primera vista como la misma cosa.

De hecho no se trata de un problema que nos lo encontremos ahora al abordar específicamente la cuestión de la productividad parcial del 'capital' o 'inmovilizado'. El problema de qué se entiende por 'costes de amortización a precios constantes' lo tenemos en realidad (como en cualquier modelo de medición y análisis de la productividad) desde el principio, pero hasta ahora lo habíamos obviado. En efecto: Para determinar los 'costes (totales) a precios constantes' para el año 'x',  $(\sum F^x \cdot K^0)$ , y así llegar al índice de productividad global, es necesario recalculer los diferentes tipos de costes del periodo 'x' en estudio; los de amortizaciones entre ellos, por supuesto. Veamos pues el problema de 'los precios, (o la variación de éstos)' hablando de costes de amortización:

Para un factor que se compra periódicamente - como el Trabajo, las Materias Primas, las piezas o componentes adquiridos a otras empresas, la electricidad, los servicios de transporte, etc.- el precio para cada periodo (o bien la variación del precio; con esto nos es suficiente), es algo objetivamente determinable. Pero tal circunstancia no se da en principio respecto a los costes por amortizaciones del inmovilizado. O se da de forma harto diferente.

Supongamos, por ejemplo, que el único coste de amortización corresponde a una máquina que costó 48.000.000 pts. , la cual la empresa está amortizando de forma lineal, sobre la estimación de que su duración útil será de 8 años y que al final de los mismos su valor residual será nulo. Consecuentemente los costes de amortización que aparecen en la Cuenta de Resultados del último año son:  $48.000.000 \times 12,5/100 = 6.000.000$  . Dado este ejemplo, obsérvese que el coeficiente 12,5/100 no tiene ninguna connotación de 'precio del factor', sino de 'cantidad' ; y, más concretamente, de 'fracción de la cantidad total del factor, consumida durante ese año'. O, visto de otro modo: supongamos que la empresa revisase a la baja su estimación sobre la duración de la máquina , y al año siguiente amortizase a razón de un 20/100 ; no podríamos hablar de un incremento de precios, sino de un incremento de 'cantidad' del factor ; (de hecho lo que habría puesto de manifiesto es que las cantidades contabilizadas en los periodos anteriores estaban 'mal contadas': se habían subestimado)

Dado un equipo comprado en un periodo determinado, los costes por amortización responden en definitiva a la estimación del consumo fraccionado de ese factor a lo largo de varios periodos. El 'precio' de compra, sea lo que sea lo que entendamos por tal, se mantendrá pues constante para todos estos periodos. Pero lo que encontramos usualmente en las cuentas de resultados de las empresas no es tan simple: Los costes de amortización corresponden usualmente a la suma de los costes de amortización contabilizados para los diferentes inmovilizados utilizados, cada uno de ellos comprado, probablemente, en un periodo pasado distinto, y cada uno con una vida útil distinta. Y, además, las nuevas compras de inmovilizado que puedan haber en el periodo en estudio pueden tener tanto (1) un carácter de pura *renovación* de equipos o máquinas que han agotado ya su vida útil, como (2) de un *incremento* en el uso (y por lo tanto en el consumo) de bienes de 'capital' en los procesos productivos; es decir, de un incremento en el grado de capitalización, con el correspondiente decremento relativo en el consumo de los otros factores (normalmente del factor trabajo).

Así, sustituir una prensa estampadora ya obsoleta, al final de su vida útil, por otra más cara pero más automatizada y/o de más capacidad, implica simultáneamente ambas cosas: una *renovación*, más un *incremento* en el volumen del factor (un incremento en el grado de mecanización del proceso). Probablemente la substitución implicará una tasa de coste (Amortización/Ventas) superior que la correspondiente del periodo anterior, pero no será fácil saber en qué medida, en tanto que *renovación*, hay un incremento de precio, y en qué medida hay un *incremento* relativo en la *cantidad consumida* de

factor y, por lo tanto, una disminución de la productividad aparente de este inmovilizado etiquetado como 'prensa estampadora'.

Solo en el caso concreto de que no hayan habido nuevas inversiones en el periodo en estudio respecto al periodo base se nos simplifica el problema, ya que entonces no habrá variación de precios alguna y todo posible cambio en la relación Costes de Amortización/Ingresos será atribuible a la variable productividad (dado que en tal caso  $F \cdot K \equiv F \cdot K^0$ ). Pero se trata éste de un supuesto poco realista (a menos que no estemos considerando periodos de cálculo pequeños; de un mes con el siguiente, por ejemplo). De hecho lo más usual es que cada año una empresa lleve a cabo un determinado número de nuevas inversiones en inmovilizado –en parte de renovación y en parte de ampliación– junto a ciertas des-inversiones. Esquemáticamente, nos podemos encontrar con las siguientes posibilidades:

- 1) *No hay inversiones* durante el periodo en estudio (en comparación con el periodo base) .-  $\implies$  el cambio en los precios de los bienes de equipo utilizados es por lo tanto nulo. La productividad técnica o por hora trabajada tenderá además a ser constante (índice de variación  $\pi_c^* \approx 1$ ) o bien algo decreciente si es que se acusa el posible envejecimiento de los equipos. La productividad bruta (cuyo cambio viene reflejado por el índice  $\pi_c$ ) variará solo si es que cambia el nivel de ocupación de esos equipos,  $\phi_c$ , ya que  $\pi_c = \pi_c^* \cdot \phi_c$ .
- 2) Hay inversiones durante el periodo en estudio, pero consisten en una *pura renovación* (compra de un camión nuevo de las mismas características que el retirado por obsoleto) .-  $\implies$  habrá un determinado incremento de precio; y la productividad técnica (por hora trabajada) tenderá a ser la misma. Aunque si hay cambios en el nivel de ocupación, la productividad bruta cambiará en el mismo sentido y medida.
- 3) Hay una inversión en el periodo en estudio, consistente en una *ampliación pura*, en el sentido de que no se trata de una máquina que venga a substituir alguna de las que se vienen utilizando sino que representa un cambio cualitativo en el proceso productivo, aumentando el grado de mecanización/automatización.-  $\implies$  Hay un cambio cualitativo del factor 'capital' en sí: ese factor concreto no se compraba/consumía antes; no ha lugar, por tanto, a hablar de cambio de precios. En cualquier caso, tal ampliación pura incidirá negativamente en la productividad aparente del conjunto de los bienes de capital.
- 4) Hay inversiones en el periodo en estudio, las cuales *son al mismo tiempo renovación y ampliación* (el ejemplo de la prensa estampadora anterior; o la substitución de una máquina de escribir por un equipo compuesto de ordenador, programas, impresora a color y módem para conexión a Internet).
- 5) Hay inversiones en el periodo en estudio, tanto del tipo 2), 3) como 4) anteriores.

Admitamos que la situación más corriente que nos encontremos al analizar la productividad de una empresa a partir de sus cuentas será del tipo 4) o 5). O que, dados los datos que nos facilita su memoria anual, no podamos suponer lo contrario. Entonces el problema, como se ve, estribaría en decidir qué variación de precios debemos estimar para los costes de amortizaciones; tanto a los efectos del cálculo del denominador de IPG como, eventualmente, de un cálculo de IPPA para el factor 'capital-equipos'.

No se trata de un problema simple ni lo hemos resuelto aquí (solo ha quedado planteado). En cualquier caso sí puede decirse que no es una solución aceptable la consistente en: tomar como 'unidades' del factor 'capital' las inversiones brutas en Inmovilizado según los balances de la empresa estudiada y aplicar sobre esa cifra un determinado coeficiente de consumo anual estimado; un procedimiento que, sin embargo, puede encontrarse en ciertos trabajos publicados sobre evaluación de productividad. No hay razón alguna para pensar que un cálculo así efectuado (por un investigador ajeno a la empresa) va a ser más exacto, como valor del consumo del factor capital, que la cifra de costes de amortización que

aparezca en la cuenta de resultados de la empresa. Una cifra que resulta de un cálculo pormenorizado –por parte de los responsables de elaborar las cuentas de la empresa- para los diferentes ‘bienes de capital’ en función de sus respectivas vidas útiles. Pensar que desde la mesa de trabajo de un investigador externo a la empresa puede calcularse mejor los ‘verdaderos costes del capital’ que por parte de quienes calculan las amortizaciones anuales de la misma, constituye una mezcla de arrogancia académica y de desconocimiento de la realidad investigada. Añadir a esos ‘cálculos de laboratorio’ un determinado tipo de interés sobre los valores anuales del inmovilizado según los balances, no mejora la situación, sino al contrario: añadir al cálculo teórico de ‘costes de capital’ que se haya efectuado, un porcentaje por interés, igual en cada año, equivale a multiplicar numerador y denominador de los índices de variación de la productividad por un mismo valor; por lo que resulta una operación inútil. Y aplicar tipos de interés diferentes, equivale a añadir una nueva distorsión, pues la variación de los tipos de interés anuales no tiene gran cosa que ver con los costes-a-precios-constantés derivados de utilizar equipos por parte de una determinada empresa. Llegados a esos extremos, conviene regresar al punto de partida y no olvidar que en evaluaciones de productividad –y por lo que respecta a los factores- lo que se necesita calcular en el fondo es, simplemente, costes del factor ‘j’ para cada periodo ‘x’, recalculados a unos mismos precios para cada periodo ‘x’.

## Anexo II

### El índice de Malmquist aplicado a la comparación de productividad entre empresas

El *índice de Malmquist*, aplicado a mediciones de productividad<sup>69</sup>, puede considerarse como una definición alternativa a la estándar (IPG) para comparar la productividad entre dos o mas empresas. Se basa en definir una función de producción para cada una de las dos (o más) empresas a comparar:  $q^A = f_A(F_j^A)$ ; y  $q^B = f_B(F_j^B)$ . ‘A’ y ‘B’ designan a las dos empresas;  $q^A$  són las unidades de producto obtenidas por A;  $F_j^A$  representan las cantidades de cada factor  $j$  consumido por la empresa A para obtener la producción anterior. Y así para los valores de B. Se supone, por tanto, que las empresas son uni-producto; o que si producen diferentes productos ( $q_i^A$ ) existe una fórmula aceptable para construir un solo valor que pueda considerarse como representativo –a efectos de calcular productividades relativas- de la producción global de la empresa (producción agregada:  $q^A = \phi(q_i^A)$ ). Y se presupone implícitamente que las respectivas funciones de producción describen el producto que viene obteniendo cada empresa, consumiendo unas determinadas cantidades de factores.

El *índice de Malmquist* se define entonces como la media geométrica entre los cocientes:

$q^A / f_B(F_j^A)$ , y  $f_A(F_j^B) / q^B$ . Es decir,

$$IM = \sqrt{\frac{q^A}{f_B(F_j^A)} \cdot \frac{f_A(F_j^B)}{q^B}}$$

donde los dos términos cruzados se obtienen aplicando las cantidades de factores utilizadas por la empresa A en la función de producción de la empresa B, y viceversa. Como puede verse ambos cocientes miden el mismo concepto: relación entre la producción que obtendría la empresa A y la que obtendría la B, utilizando en ambos casos una misma cantidad de factores. Para ambos términos podemos pues postular que si su valor es superior a 1 A es más eficiente que B; y lo contrario si el valor inferior a 1. Es la escala del consumo de factores lo que es, o puede ser, diferente en ambos términos; e incluso muy diferente. Puede darse, por ejemplo, que la empresa A opere con unos niveles de producción del orden del doble que B. Al hacer la media geométrica entre ambas versiones del ‘índice de diferencia de productividad de B respecto a A’ se está de hecho suavizando así el posible efecto de la diferencia de escala (economías de escala).

Los requisitos de información para el cálculo de los IM son los ya indicados antes para una función de producción paramétrica; con el añadido en este caso de que serían (al menos) dos las funciones de producción a determinar. O sea que sería necesario disponer de datos de las unidades físicas de los diferentes factores (inputs) utilizadas por cada empresa, y de las unidades físicas de los diferentes productos (outputs). Y todo ello para varios años, a fin de poder determinar –mediante sendas regresiones múltiples- las

<sup>69</sup> El estadístico sueco Seve Malmquist desarrolló su enfoque sobre números índice inicialmente para el análisis comparativo de precios y niveles de consumo entre dos o más países, en su trabajo seminal “Index Numbers and Indifference Surfaces” en *Trabajos de Estadística*, vol. 4 n° 1, 1953, pp. 209-242. Y posteriormente lo extendió a índices de variación de productividad entre países. Esta aplicación para mediciones de productividad fue luego desarrollada principalmente por Caves, D. W., Christensen, L. R. & Diewert, W.E. en “The Economic Theory of Index Numbers and Measurement of Input, Output and Productivity”, *Econometrica*, vol. 50 n. 6, pp. 1393-1414, 1982; y por Färe, R., Grosskopf, S., Lindaren, B. & Proos, P. “Productivity Development in Swedish Hospitals: A Malmquist Output Index Approach”, *Discussion Paper 89(3)*, Sothern Illinois Uiversity Carbondale, Department of Economics.

funciones de producción para cada empresa. Determinación que exige, mediante algún supuesto, resolver la cuestión de la agregación de los diferentes productos para obtener un solo valor global de output para cada empresa:  $q^A$  y  $q^B$ .

Es habitual que los investigadores no hayan dispuesto de toda esa masa de datos, sino simplemente de los habituales agregados monetarios que aparecen en las memorias publicadas por las empresas. Aplicar, a pesar de ello, IM lleva entonces a recurrir a la introducción de un conjunto de supuestos. Por ejemplo: tomar un determinado agregado monetario en el lugar de unas determinadas unidades físicas requeridas por la expresión IM; etc. En la línea de lo expuesto en 7.4, esta acumulación de supuestos en el cálculo y el uso de variables ‘proxy’, con los inevitables elementos de error que ello conlleva, puede hacer que los valores IM obtenidos resulten de difícil o dudosa interpretación y validez.

Independientemente de esto, al igual que ocurre con las aplicaciones de los índices de productividad estándares, lo más frecuente es que en la literatura sobre el tema encontremos no tanto el IM propiamente sino su equivalente en términos de tasa de diferencia (es decir, su  $\ln$ ): Así, tasa de diferencia de la productividad de la empresa B respecto de la de la empresa A,

$$\ln IM = \frac{1}{2} \left( \ln \frac{q^A}{f_B(F_j^A)} + \ln \frac{f_A(F_j^B)}{q^B} \right)$$

Y es también frecuente en la literatura sobre IM el definir una descomposición del mismo, en los siguientes términos:

$$IM \equiv \frac{q^A}{f_B(F_j^A)} \cdot \sqrt{\frac{f_B(F_j^A)}{q^A} \cdot \frac{f_A(F_j^B)}{q^B}};$$

El primer término es entonces interpretado como la componente de *eficiencia técnica*, y el segundo término como *cambio técnico*. Como puede verse, el primer término es uno de los dos términos de la media geométrica inicial; concretamente es el índice de diferencia de eficiencia de A respecto a B, tomando como referencia la escala de actividad de A. Tomando tal referencia, el otro componente (la raíz) es lógico interpretarlo como que refleja precisamente el ‘índice de diferencia en la productividad de A respecto a la de B que viene explicado por la escala de actividad’ (economías de escala, tanto las debidas a ciertos factores que son fijos para ambos niveles de actividad, como las derivadas de la posibilidad de aplicar tecnologías mas económicas a medida que la escala aumenta). De nuevo, lo más habitual en los trabajos que apliquen esta técnica de evaluación será encontrar el desglose anterior pero no en términos de índice sino más bien en términos de tasa de diferencia entre ambas empresas:

$$\ln IM = \ln \frac{q^A}{f_B(F_j^A)} + \frac{1}{2} \left( \ln \frac{f_B(F_j^A)}{q^A} + \ln \frac{f_A(F_j^B)}{q^B} \right)$$

Desgloses más complejos (así como generalizaciones a más de dos unidades económicas) han sido expuestos en las referencias citadas y otros trabajos posteriores<sup>70</sup>. Una de estas extensiones consiste en aplicar el esquema anterior a comparaciones no *cross section* sino *cross time*: cómo cambia la productividad de una empresa entre dos periodos<sup>71</sup>.

<sup>70</sup> Puede verse, por ejemplo, Grifell-Tatjé, E. & Novell, C.A.K., 1997 “The sources of Productivity Changes in Spanish Banking”, *European Journal of Operational Research*, 98, pp. 364-380.

<sup>71</sup> Puede verse, además de la referencia anterior, Johnes, Jill (2006), “Efficiency and Productivity change in the English higher education sector from 1996/97 to 2002/03”, *Working Paper 2006/017 Lancaster University Management School*; <http://www.lums.lancs.ac.uk/publications/>