

UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LA MATEMÀTICA I LES
CIÈNCIES EXPERIMENTALS

Modelització Matemàtica en tasques estadístiques a Secundària:
Episodis clau en la generació de models

TESI DOCTORAL

María Ángeles Aymerich Restoy

Bellaterra, 15 de Juliol de 2024



**Universitat Autònoma
de Barcelona**

Índex

1	Introducció	1
1.1	Antecedents i motivació personal	2
1.2	Objectius de la recerca	3
1.3	Importància de la recerca	4
1.3.1	Àmbit Social i Educatiu	4
1.3.2	Àmbit de la Recerca	5
1.4	Estructura de la memòria	5
2	Marc teòric	7
2.1	Modelització Matemàtica	7
2.1.1	Models matemàtics	11
2.1.2	Cicle de Modelització	15
2.1.3	Competències de modelització matemàtica	17
2.1.4	Dificultats en el procés de modelització	18
2.1.5	Activitats Promotores de Models (MEA's)	20
2.2	Modelització Estadística	25
2.3	Les idees clau en l'Educació Estadística	26
2.3.1	Evolució Històrica en l'Ensenyament de l'Estadística	27
2.3.2	Conceptes clau en Educació Estadística	28
2.3.3	Alfabetització Estadística en adults	30
2.3.4	Competència Estadística	33
2.3.5	Raonament estadístic	35
2.3.6	Pensament estadístic	38
3	Primer estudi: Complexitat de l'activitat de modelització (pilot)	46

ÍNDEX

3.1	Metodologia	47
3.2	Resultats finals del procés d'anàlisi	57
3.3	Síntesi de resultats de l'estudi pilot	58
4	Segon estudi: caracteritzant l'activitat modelitzadora en termes del Diagrama d'Activitat Modelitzadora	60
4.1	Introducció	60
4.2	Participants i dades recollides	61
4.3	Activitat proposada a l'alumnat	65
4.3.1	Justificació de l'activitat	67
4.3.2	Justificació del canvi d'activitat	70
4.4	Anàlisi: Diagrames d'Activitat Modelitzadora	70
4.5	Resultats: activitats de modelització representades als DAMs	78
4.5.1	Grup 1 (Primera Recollida)	78
4.5.2	Grup 2 (Primera Recollida)	80
4.5.3	Grup 3 (Primera Recollida)	81
4.5.4	Grup 4 (Primera Recollida)	83
4.5.5	Team 01 (Segona recollida)	85
4.5.6	Team 02 (Segona recollida)	86
4.5.7	Team 03 (Segona Recollida)	87
4.5.8	Team 04 (Segona Recollida)	88
4.5.9	Team 09 (Segona Recollida)	90
4.5.10	Team 10 (Segona Recollida)	91
4.5.11	Taula de resum	91
4.6	Síntesi de resultats del segon estudi	94
5	Tercer estudi: Gràfics Explicatius dels Models (GEMs)	95
5.1	Introducció	95
5.2	Elaboració dels Gràfics Explicatius dels Models (GEMs)	96
5.3	Resultats: Models desenvolupats per cada grup	100
5.3.1	Grup 1 (Primera Recollida)	100
5.3.2	Grup 2 (Primera Recollida)	104
5.3.3	Grup 3 (Primera Recollida)	106

ÍNDIX

5.3.4	Grup 4 (Primera Recollida)	109
5.3.5	Team 01 (Segona Recollida)	113
5.3.6	Team 02 (Segona Recollida)	128
5.3.7	Team 03 (Segona Recollida)	134
5.3.8	Team04 (Segona Recollida)	136
5.3.9	Team05 (Segona Recollida)	138
5.3.10	Team09 (Segona Recollida)	149
5.3.11	Team 10 (Segona Recollida)	154
5.4	Resultats del tercer estudi	156
5.5	Síntesi de resultats del tercer estudi	159
6	Quart estudi: Combinació de MADs i de GEMs)	161
6.1	Estudi de combinacions de MAD i GEM	163
6.1.1	Grup 1 (Primera Recollida)	163
6.1.2	Grup 2 (Primera Recollida)	165
6.1.3	Grup3 (Primera Recollida)	167
6.1.4	Grup 4 (Primera Recollida)	169
6.1.5	Team 01 (Segona Recollida)	171
6.1.6	Team 02 (Segona Recollida)	174
6.1.7	Team 03 (Segona Recollida)	175
6.1.8	Team 04 (Segona Recollida)	176
6.1.9	Team 05 (Segona Recollida)	179
6.1.10	Team 09 (Segona Recollida)	181
6.1.11	Team 10 (Segona Recollida)	183
6.2	Comparativa de les combinacions de MADs i GEMs creades	185
6.3	Síntesi de resultats de la Combinació de MADs i de GEMs	189
6.3.1	Estudi dels episodis clau del Grup 1 (Primera recollida)	189
6.3.2	Estudi dels episodis clau del Grup 2 (Primera recollida)	193
6.3.3	Estudi dels episodis clau del Grup 3 (Primera recollida)	197
6.3.4	Estudi dels episodis clau del Grup 4 (Primera recollida)	201
6.3.5	Estudi dels episodis clau del Team 1 (Segona recollida)	205
6.3.6	Estudi dels episodis claus del Team 2 (Segona recollida)	214
6.3.7	Estudi dels episodis clau del Team 3 (Segona recollida)	218

ÍNDIX

6.3.8	Estudi dels episodis clau del Team 4 (Segona recollida)	223
6.3.9	Estudi dels episodis claus del Team 5 (Segona recollida)	231
6.3.10	Estudi dels episodis clau del Team 9 (Segona recollida)	245
6.3.11	Estudi dels episodis clau del Team 10 (Segona recollida)	255
6.4	Síntesi de resultats de la Combinació de MADs i de GEMs	258
7	Conclusions	262
7.1	Resposta al primer objectiu de recerca	262
7.2	Resposta al segon objectiu	265
7.3	Resposta al tercer objectiu	267
7.4	Resposta al quart objectiu	268
7.5	Implicacions didàctiques	271
7.6	Prospectiva	272
8	Bibliografia	275

Índex de figures

2.1	Cicle de modelització perspectiva cognitiva	16
2.2	Taula comparativa de les característiques de les tasques habituals dutes a l'aula i les característiques de les MEAs	24
2.3	Cicle d'investigació PPDAC (Wild & Pfannkuch, 1999)	39
2.4	Tipus de Pensament (Wild & Pfannkuch, 1999)	40
2.5	Modelling (Wild & Pfannkuch, 1999)	41
2.6	Tècniques (Wild & Pfannkuch, 1999)	41
2.7	Cicle d'Interrogació (Wild & Pfannkuch, 1999)	43
2.8	Disposicions (Wild & Pfannkuch, 1999)	45
3.1	Un extracte del treball escrit pels alumnes del grup G1g05	50
3.2	Primera aproximació gràfica a l'anàlisi. Es mostra un graf que representa el procés de modelització dels alumnes	53
3.3	Segona aproximació gràfica per a l'anàlisi	54
3.4	Procés de modelització analitzat definitiu.	58
4.1	Taula proporcionada per l'article dins del material per l'alumnat.	66
4.2	Exemple d'un DAM descrivint una activitat de modelització (Ärlebäck, 2009).	71
4.3	DAM Grup 1 (Primera Recollida)	78
4.4	DAM Grup 2 (Primera Recollida)	80
4.5	DAM Grup 3 (Primera Recollida)	81
4.6	DAM Grup 4 (Primera Recollida)	83
4.7	DAM Team 01 (Segona Recollida)	85
4.8	DAM Team 02 (Segona Recollida)	86
4.9	DAM Team 03 (Segona Recollida)	87
4.10	DAM Team 04 (Segona Recollida)	88

ÍNDIX DE FIGURES

4.11	DAM Team 05 (Segona Recollida)	89
4.12	DAM Team 09 (Segona Recollida)	90
4.13	DAM Team 10 (Segona Recollida)	91
5.1	Primera versió dels GEM a Albarracín, Aymerich i Gorgorió (2017)	97
5.2	GEM1 Grup 4 (Primera Recollida)	99
5.3	GEM2 Grup 4 (Primera Recollida)	99
5.4	GEM1 Grup 1 (Primera Recollida)	100
5.5	GEM2 Grup 1 (Primera Recollida)	101
5.6	GEM3 Grup 1 (Primera Recollida)	101
5.7	GEM4 Grup 1 (Primera Recollida)	101
5.8	GEM2 Grup 2 (Primera Recollida)	104
5.9	GEM3 Grup 2 (Primera Recollida)	104
5.10	GEM5 Grup 2 (Primera Recollida)	104
5.11	GEM7 Grup 2 (Primera Recollida)	105
5.12	GEM2 Grup 3 (Primera Recollida)	107
5.13	Part de la producció escrita pel Team 01 (Segona Recollida)	115
5.14	Pàgina 1 de la producció del Team 01 (Segona Recollida)	121
5.15	Pàgina 2 de la producció del Team 01 (Segona Recollida)	122
5.16	Pàgina 3 de la producció del Team 01 (Segona Recollida)	123
5.17	Pàgina 4 de la producció del Team 01 (Segona Recollida)	124
5.18	Pàgina 5 de la producció del Team 01 (Segona Recollida)	125
5.19	Pàgina 6 de la producció del Team 01 (Segona Recollida)	126
5.20	Pàgina 7 de la producció del Team 01 (Segona Recollida)	127
5.21	Fragment Full de Càlcul Team 02	133
5.22	Fragment Full de Càlcul Team 05	148
6.1	MAD i GEM Grup 1 (Primera Recollida)	163
6.2	MAD i GEM Grup 2 (Primera Recollida)	165
6.3	MAD i GEM Grup 3 (Primera Recollida)	167
6.4	MAD i GEM Grup 4 (Primera Recollida)	169
6.5	MAD i GEM Team01 (Segona Recollida)	171
6.6	Fragment de la producció de l'equip Team 01	172

ÍNDIX DE FIGURES

6.7	Model Final de l'equip Team 01	173
6.8	MAD i GEM Team02 (Segona Recollida)	174
6.9	MAD i GEM Team03 (Segona Recollida)	175
6.10	MAD i GEM Team04 (Segona Recollida)	176
6.11	MAD i GEM Team05 (Segona Recollida)	179
6.12	MAD i GEM Team09 (Segona Recollida)	181
6.13	MAD i GEM Team10 (Segona Recollida)	183

Lluís Albarracín Gordo, Doctor en Educació Matemàtica per la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB) i Professor Agregat Serra Húnter al Departament de Didàctica de la Matemàtica i les Ciències Experimentals de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB).

FAIG CONSTAR QUE:

La investigació realitzada sota la meua direcció per María Ángeles Aymerich Restoy, amb el títol “**Modelització Matemàtica en tasques estadístiques a Secundària: Episodis clau en la generació de models**”, compleix amb tots els requeriments científics, metodològics i formals exigits per la legislació vigent per a la seva lectura pública davant de la comissió d’avaluació corresponent per a l’obtenció del Grau de Doctora en Educació per la Universitat Autònoma de Barcelona.

Per tant, considero procedent autoritzar la seva presentació.

Lluís Albarracín Gordo, a Bellaterra el 15 de Juliol de 2024.

Agraïments

Pel meu pensament passen, en arribar a la fi d'aquesta tesi doctoral, totes les persones que han estat al meu costat i han fet possible aconseguir aquesta fita. A tots ells i elles vull demostrar el meu profund agraïment reconeixent la seva estima i acompanyament.

La primera menció és al meu tutor i director de tesi, el Dr. Lluís Albarracín Gordo. A ell li expresso el meu més profund respecte i gratitud per ser guia i mestre de la meva tesi. El seu saber mostrat amb tota naturalitat et cala com gotes de pluja després de temps de sequera. El seu coneixement sobre l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques és extens i profund, però la seva personalitat, energia i caràcter són exemples de professionalitat i persona. La seva confiança en mi i les meves capacitats ha estat la força que m'ha impulsat en moments de feblesa a superar els obstacles i arribar al final del procés. Si el meu objectiu era aprendre per a millorar el meu dia a dia a l'aula, puc dir que no podia tenir un millor mentor i guia per aconseguir-ho.

A més de la guia inestimable del meu tutor he tingut la sort que la Universitat Autònoma de Barcelona, en concret en el Departament Didàctica de les Matemàtiques i de les Ciències Experimentals en la facultat de Ciències de l'Educació, es troben uns professionals avalats per anys d'experiència en el sector i amb una dedicació inestimable. Vull agrair a tots els especialistes que m'han guiat durant les Jornades de Doctorand, perquè les seves observacions i crítiques constructives han estat clau en el procés d'elaboració d'aquesta tesi. A les doctores Núria Gorgorió, Núria Planas, Edelmira Badillo, Mequè Edo i als doctors Jordi Deulofeu i Josep María Fortuny els agraeixo infinitament el seu temps, dedicació i valuoses observacions. El seu rigor i la seva visió han contribuït a la millora de la meva tasca.

Durant els anys que he realitzat la tesi molts han estat els altres doctorands que s'han creuat al meu camí. Tots han estat vitals perquè han estat exemple de dedicació, esforç i constància. Especialment, la doctora Francisca Manríquez Ubilla i el Juan Gabriel Rave han estat una font d'ajuda inestimable. He sentit el seu suport incondicional et tot allò que necessitava i la seva col·laboració ha marcat un abans i un després en aquesta tesi.

La meva família no és gaire extensa, podria posar tots els noms i no s'allargaria massa, però encara que petita formem una pinya compacta en què confiem i ens ajudem sempre que ens necessitem. Ells han hagut de patir nervis i inseguretats en el procés i m'han transmès calma i confiança. Els meus pares, Miquel i Carme, i el meu germà Miquel que han sacrificat tant a la seva vida per mi, que m'han estimat incondicionalment i han tingut fe en les meves capacitats, tenen un lloc destacat. Els meus fills, Carles, Anna i Marta que són la llum que il·lumina la meva vida, espero que sàpiguen superar tots els moments difícils junts i units, que s'ajudin els uns als altres a aconseguir els seus somnis. Finalment, la família política, el meu home i la seva família que ha estat batallant perquè tirem endavant.

Els meus companys i excompanys de feina, així com companys de professió que han estat font d'inspiració en el procés i han hagut d'ajudar-me en els moments en què no arribava a tot. Especialment a l'Esther Flecha i al Roberto Morales, als quals no puc estar més agraïda per la seva amistat, suport i alè constant.

No vull deixar-me a tots aquells amics que recorren amb mi el camí de la vida. Els agraeixo de tot cor les abraçades i l'amistat sincera. Cadascú ha deixat empremta en el meu cor i ha contribuït al meu creixement personal i professional.

I, finalment, gràcies a l'escola on treballo, Col·legi Pureza de María, per creure en mi quan era una nena acabada de sortir de la facultat i fer-me créixer en l'àmbit personal, espiritual i professional.

Així doncs, gràcies a totes aquelles persones que han format part d'aquest viatge. El seu suport, confiança i alè han superat totes les meves expectatives i he pogut assolir aquest desafiament que m'havia proposat com a fita professional.

Capítol 1

Introducció

La nostra societat viu l'auge de l'Estadística. Entendre informacions estadístiques ofereix als ciutadans eines per entendre el món: des de les informacions rebudes dels mitjans d'informació fins al funcionament dels grans motors de cerca per Internet. A més, l'aparició de noves professions relacionades amb l'anàlisi de dades ha suscitat un augment important en l'estadística com a ciència i professió de futur, com destaca l'informe GAISE II (Bargagliotti et al., 2020). En conseqüència, els currículums de diverses parts del món (Burrill & Biehler, 2011) han posat èmfasi en aquesta matèria, amb recomanacions per a la seva implementació i per al seu treball a l'aula (Gal, 2004). Però la preocupació per l'ensenyament i l'aprenentatge de l'estadística es fa evident des de fa anys en les diverses línies d'investigació en recerca educativa relacionades amb aquest àmbit, ja que no sempre s'aconsegueix que els estudiants siguin competents en l'ús de l'estadística: “Typically people learn methods, but not how to apply them or how to interpret the results” (Pfannkuch & Wild, 2004).

Documents d'abast internacional com el *Principles and Standards for School Mathematics* (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000) i el *Common Core State Standards for Mathematics* (CCSSI, 2010) justifiquen de manera convincent per què l'Estadística és important pels futurs ciutadans i expliciten el contingut que hauria d'haver en els currículums escolars. És necessari que els estudiants adquireixin competència en l'ús i la interpretació de dades i en el raonament estadístic per esdevenir ciutadans crítics i per donar suport al progrés en altres camps i disciplines (Franklin et al., 2005; Burrill & Biehler, 2011).

En paral·lel, la modelització matemàtica destaca en els currículums educatius d'un temps ençà (NCTM, 2000) com una eina poderosa per a ensenyar matemàtiques, ja que impulsa el pensament crític i reflexiu, perquè els estudiants han d'analitzar, interpretar i

avaluar els seus models en funció de la realitat que representen. L'habilitat de modelitzar no només enforteix la comprensió dels conceptes matemàtics, sinó que també prepara als estudiants per a enfrontar situacions del món real i desenvolupar habilitats essencials per al seu futur acadèmic i professional.

Des de la perspectiva d'aprofitar el potencial docent de la matematització de l'entorn i la modelització matemàtica, s'ha identificat una necessitat clara en l'àmbit internacional de vincular els coneixements matemàtics dels estudiants amb la realitat (Vorhölter, Kaiser & Borromeo Ferri, 2014). Recentment, Blum (2015) va reafirmar que l'ensenyament de les aplicacions i la modelització matemàtica té una funció doble: d'una banda, el coneixement de les matemàtiques i les seves aplicacions és vital per relacionar-se amb el món real, principalment pel que fa a la resolució de problemes reals i al desenvolupament de projectes complexos; i, d'altra banda, el món real i la manera com integra el coneixement matemàtic són summament importants com a vehicle per donar sentit a l'aprenentatge dels conceptes matemàtics i, en general, a les matemàtiques com a disciplina. Els focus d'atenció de la recerca en modelització matemàtica les darreres dècades s'ha centrat a estudiar la forma en què els alumnes s'enfronten a l'activitat de modelització, a definir teòricament el procés de modelització i a identificar les competències necessàries i que es desenvolupen durant la modelització matemàtica (Schukajlow, Kaiser & Stillman, 2018). Ja en els darrers anys s'ha començat a treballar per identificar els aspectes clau que permeten introduir amb èxit les activitats de modelització matemàtica a les aules (Borromeo Ferri, 2021).

1.1 Antecedents i motivació personal

Situar aquesta recerca en l'àmbit de la didàctica de les matemàtiques o de la didàctica de l'estadística ha estat complex. Inicialment, estava molt lligada a la didàctica de la matemàtica, ja que l'estadística a secundària tradicionalment s'imparteix en les classes de matemàtiques. Però, a poc a poc, s'ha anat observant que l'activitat proposada tenia trets que la diferenciaven de les activitats de modelització matemàtica. Aquest fet es deu que l'activitat proposada volia promoure la construcció de conceptes estadístics. Això ens va fer decantar la recerca cap a l'àmbit de l'Educació Estadística. Però amb el temps vam tornar a tenir com a eix vertebrador: la modelització matemàtica. Ja que els nostres referents teòrics contrastats amb les produccions i les eines d'anàlisi emprades ho van fer necessari. No obstant això, cal tenir en compte els trets diferenciadors que ens marca la tasca estadística que realitza l'alumnat.

Aquest treball té com a punt de partida el meu Treball de Fi de Màster: "Modelització

Estadística a l'aula de secundària. Un estudi exploratori". Les motivacions personals que em van dur a fer aquell treball eren dues. Una d'elles era la necessitat personal de millorar la meua acció educativa a l'aula. De fet, fer va ser el motiu per fer el màster en Didàctica de les Matemàtiques. A l'aula havia provat propostes derivades de diferents formacions a què havia assistit, però necessitava eines per jutjar amb eficiència quan les propostes s'ajustaven als meus objectius didàctics.

Però en el moment d'escollir el tema del treball em venia al cap dues dificultats que identificava en el meu alumnat en concret. La primera dificultat relacionada amb l'estadística: associaven l'estadística a fer càlculs desconnectats del fenomen estudiat, com ara calcular mitjanes, sense entendre les limitacions de les conclusions extrems. La segona dificultat era en la resolució de problemes contextualitzats en el món real. Cada curs algun/a alumne/a em preguntava per què servien les matemàtiques, però ells i elles eren reticents a treballar la resolució de problemes en context real, ja que, suposava, per ells una gran dificultat implementar el procés de resolució de problemes. Volia utilitzar la recerca per esbrinar si aquestes observacions es podien generalitzar dins de l'àmbit educatiu, i encara més, si podia entendre per què era així i quines recomanacions proposava la recerca en educació sobre aquests temes.

1.2 Objectius de la recerca

Arran de les meves inquietuds personals dins de la meua acció educativa i de la literatura existent (Ben-Zvi, 2004; Makar & Confrey, 2005; Gould, 2004) vam posar el focus d'atenció en la importància de quantificar la variabilitat de les distribucions de dades estadístiques.

L'estudi proposat es fonamenta en la modelització matemàtica i l'aprenentatge de l'Estadística, però requereix el desenvolupament i millora de les eines d'anàlisi ja utilitzades anteriorment. En concret, els conceptes estadístics de dispersió tenen un fort component conceptual, però al mateix temps tenen una formulació molt tècnica, que requereix un domini algebraic que els alumnes de l'etapa superior de l'ESO no han desenvolupat completament. Aquest fet ens porta a tractar a l'aula els conceptes de dispersió d'una forma superficial, centrada en els procediments de càlcul i la seva interpretació, però no es treballa la creació dels conceptes.

La modelització matemàtica es presenta com una opció per aprofundir en la conceptualització dels conceptes de dispersió a partir del propi treball dels alumnes en tasques obertes en les quals ells han de desenvolupar i concretar els conceptes necessaris. Identificar els episodis que permeten als alumnes generar les seves pròpies idees i connectar

la seva intuïció amb els coneixements formals representa un avanç a treballar en aquesta direcció. D'aquesta forma l'objectiu d'aquesta tesi doctoral és descriure de forma precisa els models matemàtics que desenvolupen els alumnes d'Educació Secundària Obligatòria quan treballen amb una activitat estadística que presenta una gran quantitat de dades realistes i identificar els episodis clau per a la generació dels conceptes que sustenten els models. Aquesta recerca es concreta en els següents objectius específics:

- **OBJ1.** Caracteritzar l'activitat de resolució del treball d'estudiants de secundària en una activitat estadística contextualitzada en termes de modelització matemàtica.
- **OBJ2.** Caracteritzar l'activitat modelitzadora dels alumnes al treballar en activitats estadístiques contextualitzades.
- **OBJ3.** Caracteritzar els models matemàtics que desenvolupen els alumnes.
- **OBJ4.** Identificar els elements d'activitat clau per promoure els models matemàtics generats.

D'aquesta forma, la recerca ha de seguir les següents fases que han de permetre assolir l'anterior objectiu de recerca:

- Desenvolupar teòricament l'eina d'anàlisi de creació de grafs de representació de models per poder caracteritzar les produccions de l'alumnat.
- Utilitzar els grafs de representació de models per caracteritzar les produccions dels alumnes d'Educació Secundària.
- Analitzar els processos de modelització matemàtica que desenvolupen els alumnes quan treballen en problemes estadístics
- Identificar els elements clau de l'activitat per promoure la generació de models matemàtics.

1.3 Importància de la recerca

1.3.1 Àmbit Social i Educatiu

L'increment de la necessitat social de l'anàlisi de grans volums de dades i d'interpretació d'anàlisi estadística, ha propiciat un augment de les necessitats en comprensió i utilització

d'eines i conceptes estadístics. I de fet, les recomanacions curriculars inciten a un canvi metodològic en general i a la introducció amb força de l'estadística i la probabilitat en particular.

1.3.2 Àmbit de la Recerca

Aquest treball és la continuació de l'estudi iniciat en el meu màster d'educació secundària. En el qual es posava èmfasi a descriure els models matemàtics que l'alumnat utilitzen en activitats estadístiques. Partint d'aquí, volem estudiar com l'alumnat descobreix els models matemàtics que donaran forma a les tècniques estadístiques adequades.

La recerca anterior mostrava les possibilitats per fer aportacions al coneixement sobre els processos de modelització de l'alumnat d'Educació Secundària Obligatòria quan s'enfronta a activitats estadístiques. L'experiència acumulada ha de permetre identificar els aspectes teòrics rellevants i les eines metodològiques adequades per desenvolupar un estudi que permeti fer una passa endavant en aquest coneixement, que, d'altra banda, connecta dos àmbits de la recerca en Educació Matemàtica que d'uns anys ençà està prenent una forta embranzida. No només per la incorporació en els currículums de diversos països sinó per la importància de la modelització pels estudiants.

Blum & Borromeo-Ferri (2009) proporcionen arguments per justificar la rellevància de la modelització matemàtica. Entre aquests arguments inclouen el fet que la modelització matemàtica permet als alumnes connectar els seus coneixements matemàtics amb la realitat i els ajuda a entendre millor el món. També consideren que dona suport a l'aprenentatge de les matemàtiques (motivació, formació de conceptes, comprensió, retenció) i que contribueix a desenvolupar diverses competències matemàtiques i actituds envers les matemàtiques adequades.

1.4 Estructura de la memòria

L'estructura d'aquesta tesi difereix d'altres i, per tant, és necessari fer un incís per aclarir com s'estructura i el perquè. El primer capítol presenta una introducció explicant la rellevància d'aquest treball tant en el món de la investigació, com en àmbit personal. Aquest primer capítol presenta els objectius de la recerca i el posicionament teòric fonamental que sustenta la tesi.

Així el segon capítol ofereix els fonaments teòrics utilitzats en aquest estudi que pertanyen a dos grans àmbits de l'Educació Matemàtica: la modelització matemàtica i

l'aprenentatge de l'Estadística.

A partir d'aquí trobem quatre capítols diferenciats (capítols 3, 4, 5 i 6) orientats a abordar cadascun un dels quatre objectius de recerca proposats a la introducció. Cadascun d'aquests capítols conté la seva pròpia introducció, justificació, concreció teòrica, metodologia i anàlisi, arribant a resultats que permeten respondre a cada objectiu de recerca. Els capítols 3, 4 i 5 es complementen i s'enllacen donant un sentit ple al capítol 6 on es proporcionen els resultats sobre els episodis clau que permeten promoure la creació i refinament de models matemàtics a partir d'activitats estadístiques. En aquest darrer capítol fusionem les eines d'anàlisi utilitzades en els capítols 4 i 5 per poder respondre el darrer objectiu (**OBJ4**) i identificar els aspectes clau que promouen la modelització matemàtica de la tasca estudiada.

Finalment, és clar, en el darrer capítol exposem les conclusions de la recerca, oferint una visió integrada de tots els resultats obtinguts durant la investigació. Donem resposta als quatre objectius de recerca i apuntem cap a noves vies d'aprofundir en aquesta recerca i les implicacions didàctiques del que hem après.

Capítol 2

Marc teòric

En aquest capítol es detallen els blocs de coneixement teòric que fonamenten aquesta recerca. Aquest conjunt de referents permeten definir el problema de recerca, ubicar l'estudi dins de l'àrea de l'Educació Matemàtica i establir les connexions necessàries amb l'aprenentatge de l'Estadística.

En un primer gran bloc es presenten els elements que defineixen la Modelització Matemàtica com a activitat matemàtica, es descriu la naturalesa dels models matemàtics, el cicle de modelització per descriure els processos de modelització i la noció de competència de modelització matemàtica. S'inclouen també dos apartats sobre dificultats dels estudiants en el procés de modelització i la concreció de les *Modelling-eliciting activities* (MEAs) que permet suportar el disseny de les activitats que utilitzarem als estudis empírics.

En un segon gran bloc es presenten els elements propis de l'aprenentatge de l'Estadística. Es defineix la Modelització Estadística i les seves implicacions per a les etapes d'Educació Secundària, que ens permet posteriorment justificar l'enfoc adoptat basat en la modelització matemàtica. Es detallen també les idees clau que han estat proposades per a promoure l'ensenyament de l'Estadística sota la forma de l'afabetització estadística, el raonament estadístic i el pensament estadístic.

2.1 Modelització Matemàtica

La modelització matemàtica com a àrea de recerca en el camp de l'educació matemàtica va començar amb el treball de Pollak (1969), que va introduir la discussió sobre la relació entre les aplicacions de les matemàtiques i els processos d'ensenyament/aprenentatge. Posteriorment, Pollak (1979) va presentar un primer marc teòric en què interpretava

els processos de modelització matemàtica com un procés que navega entre dos dominis diferenciats: el domini matemàtic, per una banda, i la resta del món, de l'altra. Aquesta separació ens porta necessàriament al procés de matematització d'un fenomen, com un procés en el que es passa de la realitat al domini matemàtic, i a la interpretació dins del context real dels models generats durant el treball en el domini matemàtic, com a forma de validació del model matemàtic generat.

La modelització matemàtica és un procés de resolució d'un problema real en què intervenen conceptes, mètodes i resultats matemàtics de forma conjunta (Blum & Niss, 1991). Per això, els objectes, les dades i les relacions que es donen en realitat es traslladen al món de les matemàtiques en un procés conegut com a *matematització horitzontal*, obtenint així un model matemàtic. A continuació, s'apliquen els mètodes matemàtics que conformen aquest model per arribar a una solució pròpia del domini matemàtic, en un procés conegut com a *matematització vertical*. Aquesta solució ha de ser interpretada i validada al món real on s'emmarca el problema, donant lloc a una solució real (de nou, matematització horitzontal). La forma en què els estudiants elaboren models matemàtics en processos de resolució de problemes per descriure fenòmens o realitzar prediccions és objecte de discussió i hi ha diferents posicions teòriques al respecte (Borromeo Ferri, 2006). En general, a la literatura s'accepta que els processos de modelització matemàtica es van succeir en cicles en els quals es millora el model generat (Blum & Leiss, 2006).

A partir dels posicionaments inicials, la modelització matemàtica es va establir com un tema de recerca d'interès a l'educació matemàtica a finals del segle XX. La seva finalitat principal és estudiar activitats matemàtiques d'aula en les que es mostri la relació existent entre les matemàtiques i el món que envolta als estudiants (Blum, 2002). En les darreres dècades s'han desenvolupat una gran quantitat d'investigacions sobre la modelització matemàtica educativa i s'han diversificat notablement, tant pel que fa als objectius d'investigació com als enfocaments que prenen els investigadors (Abassian et al., 2020; Kaiser & Sriraman, 2006). Aquestes perspectives no són excloents i es retroalimenten. Els investigadors poden prendre elements diferenciadors de cadascuna d'elles i combinar-los per respondre a preguntes de recerca complexes que es generin en contextos determinats. La taula 2.1 mostra un resum sintètic d'aquestes perspectives.

Perspectiva	Objectius centrals	Antecedents
Modelització realista o aplicada	Objectius pragmàtics: resolució de problemes del món real, comprensió del món real, promoció de les competències de modelització	Pragmatisme britànic i Matemàtiques aplicades
Modelització contextual	Objectius psicològics i resolució de problemes verbals	Debat americà de resolució de problemes, pràctiques escolars quotidianes i experiments de Psicologia
Modelització educativa : diferenciada en a) modelització didàctica i b) modelització conceptual	Objectius pedagògics i relacionats amb els continguts: a) Estructuració dels processos d'aprenentatge i la seva promoció; b) Introducció i desenvolupament de conceptes	Teories didàctiques i teories de l'aprenentatge
Modelització sociocrítica	Objectius pedagògics com la comprensió crítica del món	Enfocaments sociocrítics en sociologia política
Modelització epistemològica o teòrica	Objectius orientats a la teoria, promoció del desenvolupament de la teoria	Epistemologia romana
La perspectiva següent es pot descriure com una mena de meta-perspectiva :		
Modelització cognitiva	Objectius de recerca: anàlisi dels processos cognitius que tenen lloc durant els processos de modelització i comprensió d'aquests processos cognitius Objectius psicològics: promoció dels processos de pensament matemàtic mitjançant l'ús de models com a imatges mentals o fins i tot imatges físiques o posant èmfasi en la modelització com a procés mental com ara l'abstracció o la generalització.	Psicologia cognitiva

Taula 2.1: Classificació de les perspectives actuals de modelització

Recentment, Blum (2015) va reafirmar que l'ensenyament de les aplicacions i la modelització té una doble funció. En primer lloc, el coneixement de les matemàtiques i la forma en la qual pot servir per explicar fenòmens reals és vital per al desenvolupament de la societat, principalment pel que fa a resoldre problemes reals i desenvolupar projectes de gran complexitat. A més, la manera com s'integra el coneixement matemàtic en el món real és un mitjà per donar sentit a l'aprenentatge profund dels conceptes matemàtics i, en

general, de les matemàtiques i l'activitat matemàtica com a disciplina. En el nostre treball considerem que una tasca és una activitat de modelització quan es demana als alumnes que generin o utilitzin models matemàtics per descriure o analitzar fets, comportaments o fenòmens reals.

La modelització matemàtica és un procés de resolució d'un problema real en què intervenen conceptes, mètodes i resultats matemàtics (Blum & Niss, 1991). Per això, els objectes, les dades i les relacions que es donen en realitat es traslladen al món de les matemàtiques, obtenint així un model matemàtic. A continuació, s'apliquen mètodes matemàtics a aquest model per arribar a una solució matemàtica, que ha de ser interpretada i validada al món real on s'emmarca el problema, donant lloc a una solució real. La forma en què els estudiants elaboren models matemàtics en processos de resolució de problemes per descriure fenòmens o realitzar prediccions és objecte de discussió i hi ha diferents posicions teòriques al respecte (Borromeo Ferri, 2006).

En general, s'accepta a la literatura que els processos de modelització tenen una naturalesa cíclica (Blum & Leiss, 2006; Carreira et al., 2011; Doerr & English, 2003; Galbraith & Stillman 2006; Greefrath, 2011; Kaiser & Stender, 2013). Tot i que hi ha diverses maneres de concretar l'estructura d'un procés de modelització, s'entén que es pot dividir en diferents fases que els alumnes recorren. El cicle de modelització, com a proposta per caracteritzar l'activitat de modelització matemàtica, s'ha utilitzat tant en estudis que incideixen en el comportament dels alumnes en activitats de modelització (Ramírez-Montes et al., 2021) com en el disseny d'activitats (Hernández-Sabaté et al., 2020).

Al mateix temps, atesa la complexitat del procés de modelització, diversos autors (Aymerich & Albarracín, 2016; Blum & Borromeo Ferri, 2009) coincideixen en la no-linealitat dels cicles de modelització, especialment en estudiants novells, amb la qual cosa es constata que és una activitat complexa i cognitivament demandant per als estudiants.

La modelització és de gran importància per a la vida actual i futura dels estudiants i representa una part important dels principis i estàndards del NCTM per a les matemàtiques escolars (NTCM, 2000) i del marc teòric que sustenta PISA (OECD, 2009), des dels quals ha permès els currículums de matemàtiques en l'àmbit internacional (Frejd & Geiger, 2017). Al capítol dedicat a les matemàtiques a les etapes obligatòries (López et al., 2020) del *Libro Blanco de las Matemáticas* coordinat per la Real Sociedad de Matemáticas Española (RSME), s'argumenta que l'Educació Matemàtica té el compromís d'apostar per models formatius que donin suport a un ensenyament matemàtic compatible amb la interdisciplinarietat, de forma que el coneixement matemàtic sorgeixi com a resposta a

problemes que es plantegen associats a les ciències, la tecnologia i l'enginyeria. En aquest sentit, la modelització és una destresa inherent a aquest tipus de models educatius, per la qual cosa s'ha de promocionar el treball amb tasques de modelització a les aules de l'ensenyament obligatori. Des de les propostes per introduir la perspectiva de gènere a les aules de matemàtiques, Macho et al. (2020), recullen diverses propostes compatibles amb la modelització matemàtica, com ara facilitar ambients d'ensenyament col·laboratius i no competitius i triar contextos rellevants socialment per als quals les noies mostren més interès.

Tot i això, les activitats de modelització matemàtica no s'han establert com a habituals a les aules per mostrar la potencialitat de les matemàtiques per descriure fenòmens complexos ni per promoure el pensament crític. Per això, alguns països, com Alemanya o Corea del Sud, han pres la decisió de fer-les obligatòries (Borromeo Ferri, 2021). Aquesta situació contrasta amb la maduresa assolida en la investigació sobre modelització matemàtica a les aules (Schukajlow, Kaiser i Stillman, 2018). Un dels factors clau per promoure la incorporació de la modelització matemàtica és aprendre a trobar i utilitzar contextos significatius que s'alineïn productivament amb els continguts curriculars i que promoguin adequadament les competències de modelització (Burkhardt, 2006; Blum, 2015). És en aquest sentit que en aquest treball de tesi doctoral utilitzem l'anàlisi de dades provinents de situacions reals com a activitat que promou la modelització matemàtica.

2.1.1 Models matemàtics

La recerca sobre Modelització Matemàtica s'ha diversificat d'una forma notable en els darrers anys proporcionant un gran nombre d'oportunitats per treure profit de les activitats de modelització (Garfunkel et al., 2021). En totes elles l'activitat matemàtica es desenvolupa a mitjançant el procés de creació, aplicació i avaluació d'un model matemàtic útil per construir coneixements sobre un sistema o fenomen real, i que contribueix al desenvolupament de les habilitats matemàtiques vinculades al procés. Per tant, un aspecte fonamental de la recerca passa per la capacitat de descriure amb precisió els models matemàtics que es generen o utilitzen durant les activitats.

Existeixen diversos motius que ens porten a considerar l'estudi dels models matemàtics generats pels alumnes com un element clau de la recerca en Educació Matemàtica (Montejo-Gámez, Fernández-Ahumada, & Adamuz-Povedano, 2021). Per una banda, l'anàlisi de produccions escrites dels alumnes permet procediments de recollida de dades més senzills d'implementar en comparació amb els estudis que impliquen registrar tot el procés de modelització. També és important considerar que l'estudi dels models matemàtics a partir

de produccions escrites obliga els investigadors a un menor nivell d'interpretació que els estudis que investiguen les accions dels estudiants durant el procés de modelització. D'altra banda, l'anàlisi dels models engloba la resposta completa dels estudiants a una tasca determinada, posant de manifest la diversitat de formes de representació possibles, els diferents tipus de raonament utilitzats i les variables que trien de manera autònoma per a generar el model.

La necessitat de descriure de forma precisa els models matemàtics es pot remuntar a Minsky (1965). Per a ell, un model és un ens que abstrau les propietats estructurals d'un sistema i sustenta la presa de decisions necessària davant una situació problemàtica. També destaca la necessitat de caracteritzar l'estructura conceptual que sustenta un model.

Minsky (1965) va formular una definició que es fonamenta en dos elements: un sistema conceptual i els procediments associats a aquest. Tots dos s'expressen amb diverses representacions i estan vinculats a una situació problemàtica. Així mateix, Lehrer i Schauble (2003) entenen els models com a sistemes conceptuais que s'expressen a través de sistemes de notació externs. En aquest supòsit, el sistema conceptual requereix operacions, relacions i normes que regulen les interaccions entre ells. Per a Hestenes (2013), un model representa l'estructura d'un sistema donat, en què el sistema és un conjunt d'objectes involucrats i l'estructura del sistema és un conjunt de relacions entre els objectes. Aquesta representació es basa en un conjunt de paraules, símbols o figures als que s'afegeix una sèrie de normes i convencions. En tots els casos es destaquen dos elements clau, per una banda, l'estructura matemàtica latent al sistema modelitzat i, per l'altra banda, les representacions emprades per expressar aquesta estructura.

Per la seva banda, Velten (2009) va definir un model matemàtic com el triplet (S, Q, M) , on S és un sistema, Q és una pregunta relacionada amb S i M és un conjunt d'enunciats matemàtics que es poden utilitzar per respondre Q . Blum & Niss (1991) van considerar que un model era el triplet (S, M, R) , on S és la situació del problema (real), M és una col·lecció d'entitats matemàtiques i R les relacions entre els elements de S i els de M . Posteriorment, Niss (2012) va prendre aquesta idea per definir un model matemàtic com un nou triplet (D, f, M) que inclou un domini extra-matemàtic D , un regne matemàtic M i una aplicació f (la matematització) que mapeja D en M . Aquests enfocaments desvinculen el model d'un problema concret i aporten la novetat d'introduir l'aplicació f per materialitzar la idea intuïtiva d'un model com a descripció matemàtica de la realitat. Les idees aportades per Velten (2009), Blum & Niss (1991) i Niss (2012) van ser recollides per Czocher (2017), que va definir un model matemàtic pel quartet (S, Q, M, R) , on S és un sistema, Q és una pregunta sobre S , M és un conjunt d'enunciats matemàtics que sorgeixen per donar una resposta a Q , i R és la relació entre els objectes de S i M .

Aquesta definició aportada per Czocher (2017) descriu els models matemàtics des de la perspectiva de l'activitat matemàtica professional i presenta dificultats per ser transferida de forma operativa als contextos educatius. Encara més, no permet desenvolupar eines d'anàlisi que caracteritzin els elements d'un model matemàtic generat per alumnes d'Educació Obligatoria. Per aquest motiu, en aquest treball adoptem la definició de model matemàtic de Lesh i Harel (2003) que hem fet servir en treballs anteriors (Gallart, et al., 2017). Aquesta definició prové de la perspectiva teòrica de la M&M per a ser utilitzada en recerques educatives. En aquest treball entenem els models com sistemes conceptuals que es poden expressar utilitzant diferents mitjans de representació que es combinen. El model es pot representar mitjançant llenguatge parlat, escriptura alfabètica o algebraica, gràfics digitals, diagrames o gràfics creats a mà o bé metàfores basades en l'experiència. El seu propòsit és construir, descriure o explicar un altre sistema o sistemes. Els models inclouen:

- un sistema conceptual per descriure o explicar els objectes matemàtics rellevants, relacions, accions, patrons i regularitats que són atribuïbles a la situació de resolució de problemes
- els procediments per acompanyar construccions útils, manipulacions o prediccions per aconseguir amb claredat els objectius proposats

Els models matemàtics es diferencien d'altres models perquè el focus està en les característiques estructurals subjacents dels sistemes que descriuen. Desenvolupar models implica quantificar, organitzar, sistematitzar, dotar de dimensionalitat, coordinar i matematitzar objectes, relacions, operacions, patrons o normes. I, per tant, per desenvolupar models útils es requereix una sèrie de cicles de modelització que són testats i revisats repetidament.

El procés de caracterització de models a partir de plans de resolució i de resolucions reportades en informes ha estat un dels aspectes en què el grup de recerca en el que m'integro ha centrat els seus esforços. En tots aquests treballs s'adopta com a base per a la caracterització de models la definició de model matemàtic proposada per Lesh & Harel (2003). En efecte, entenem que els models matemàtics inclouen diversos elements que els donen forma, entre el que hi ha conceptes matemàtics, diagrames o altres tipus de representacions simbòliques de la realitat, així com els procediments associats al seu ús, ja sigui en contextos d'aprenentatge de les matemàtiques o altres contextos. Aquesta definició presenta una dificultat als investigadors, i és que no és comú que els estudiants explicitin els conceptes matemàtics en què basen els seus models. D'altra banda, la definició de model se sustenta en dos elements que sí que es poden identificar en l'anàlisi de produccions dels

estudiants, com són els procediments que encadenen i els tipus de llenguatge utilitzats. A partir d'aquestes consideracions, és possible inferir els conceptes implícits que consideren els estudiants en proposar cadenes de procediments específics.

A Gallart et al. (2017) es presenta i valida una eina d'anàlisi dels models matemàtics desenvolupats en resoldre un problema de Fermi destinada a la caracterització de models a partir de la determinació qualitativa dels elements següents en els models creats pels alumnes:

- Conceptes (conceptes matemàtics, relacions entre ells, patrons, etc.)
- Procediments (de recollida de dades sobre el fenomen estudiat i sobre el treball matemàtic necessari per obtenir resultats)
- Llenguatges (simbòlic, escrit, numèric, diagramàtic, etc.)

Aquesta eina ha estat utilitzada en diversos estudis permetent sostenir resultats de recerca que ens han permès aprendre com els estudiants de diverses edats s'enfronten a la resolució de problemes de Fermi.

A Ferrando et al. (2017) es poden distingir aspectes diferenciadors entre els models produïts per alumnes sense experiència en activitats de modelització dels models produïts per alumnes amb experiència prèvia, especialment en els conceptes i llenguatges utilitzats per donar forma als models matemàtics construïts, però també en els elements afegits al model que proporcionen la complexitat necessària per adaptar-se a les característiques del context estudiat. A Albarracín i Gorgorió (2019) es caracteritzen els models generats per estudiants d'educació primària. S'observa que els alumnes de 5è i 6è curs de Primària poden produir solucions basades en models matemàtics a partir del seu coneixement del món real. En general, els models desenvolupats per aquests alumnes estan basats en conceptes relacionats amb altres continguts matemàtics treballats prèviament, com ara la iteració de la unitat, però alguns equips de treball basen els seus models en conceptes com la densitat de població, que no ha estat tractada prèviament. L'ús de l'eina d'anàlisi per a la caracterització de models (Gallart et al., 2017) i els estudis que se'n deriven (Álbarracín i Gorgorió, 2018; Albarracín, Ferrando i Gorgorió, 2021; Albarracín, Segura, Ferrando i Gorgorió, 2022; Segura, Ferrando i Albarracín, 2023) cristal·litzen en els resultats obtinguts a Ferrando i Albarracín (2021). Aquest darrer és un estudi en què es comparen els models desenvolupats per estudiants de diverses edats (des de 7 fins a 15 anys) en resoldre un mateix problema de Fermi, estimar el nombre de persones que caben al pati del centre escolar com a públic si s'organitza un concert, mostrant la potència de l'eina per

a establir comparacions entre produccions molt diverses. Però aquesta eina d'anàlisi per a la caracterització de models (Gallart et al., 2017) també ha permès caracteritzar models en activitats de modelització més enllà del context específic dels problemes de Fermi, com mostren els estudis que analitzen la creació de models enfocats a estudiar situacions socials rellevants de l'entorn dels alumnes (Albarracín, 2021; Albarracín i Gorgorió, 2020) amb el que suposa una eina analítica versàtil i testada per nombroses investigacions. Aquesta d'anàlisi serà la base per construir els esquemes que caracteritzen els models generats pels alumnes en les activitats proposades en aquesta tesi, especialment rellevant per a respondre al tercer objectiu de la tesi.

2.1.2 Cicle de Modelització

La Modelització Matemàtica s'entén com un procés de traducció entre el món real i les matemàtiques, en les dues direccions (Borromeo Ferri, 2009; Blum, 2015), essent posada en ús per a la pràctica de l'investigador i professor com a eina didàctica, metodològica o com a font de construcció de coneixement matemàtic. En aquest sentit, la Modelització Matemàtica és vista com un procés que epistemològicament connecta elements de naturalesa “no matemàtica” (en el sentit de Pollak, 1979) amb el coneixement matemàtic, descrit des del punt de vista cognitiu (Borromeo Ferri, 2009) en el cicle de modelització.

Borromeo Ferri (2018) en el segon capítol de *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education* fa una descripció dels diferents cicles de modelització que ens ofereix la literatura. Diversos autors han matisat el cicle per destacar aspectes de la modelització que són objecte d'interès. La diferència dels cicles radica en la perspectiva sobre modelització matemàtica en què ens situem. Però el comú denominador entre totes les propostes és que es tracta d'un procés iteratiu, no sempre lineal, amb diverses fases en què es passa una situació o sistema del món real, a un del món de les matemàtiques. La quantitat de fases i les iteracions dependran de la complexitat de la tasca. Per tant, entenem com a cicle de modelització el procés que duen a terme els estudiants quan s'enfronten a una activitat de modelització matemàtica.

Observem (figura 2.1) en la representació del cicle el dos mons, el món real i el matemàtic. En el món real trobem la situació real que un cop entesa ens porta a una representació mental de la situació. Un cop simplificada aquesta representació obtenim un model real el qual, gràcies a la matematització convertim en un model matemàtic. Amb ell podem treballar matemàticament per obtenir uns resultats que s'han d'interpretar d'acord amb el món real per obtenir uns resultats reals que es validin amb la representació mental que tenim de la situació real. Aquesta representació és ideal, concorda quan professionals

s'enfronten a una situació de modelització matemàtica real. Però la realitat a l'aula és una altra, ja que sovint els estudiants se salten fases o tornen enrere creant iteracions constants entre el món real i el matemàtic (Borromeo Ferri, 2006).

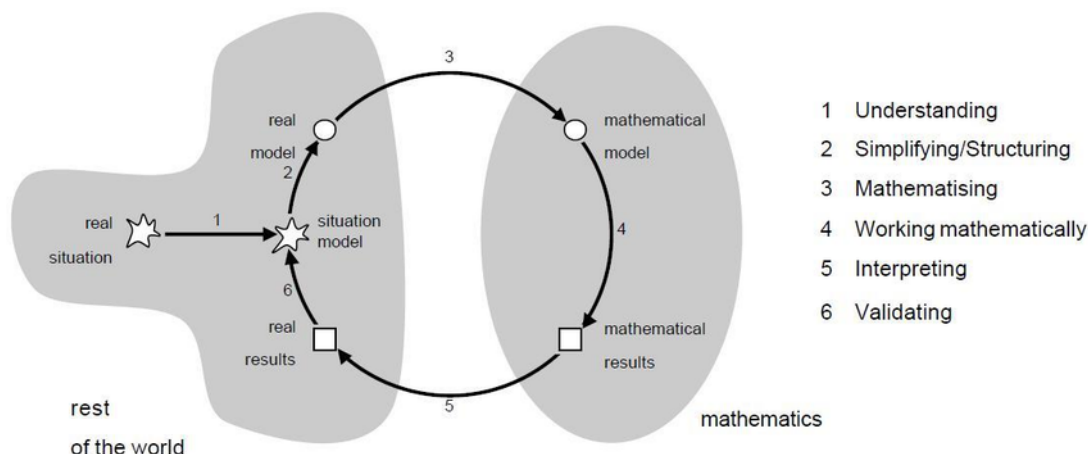


Figura 2.1: Cicle de modelització perspectiva cognitiva

En aquest procés de modelització, s'ha de matematitzar la realitat, això implica que les seves dades, conceptes, relacions, condicions i supòsits s'han de traduir a les matemàtiques (Blum & Niss, 1991) i, un cop matematitzat i resolt el problema, la solució s'ha d'interpretar, validar i comunicar. Durant aquest procés, els primers aprenents llegeixen el problema a modelar per entendre la situació de la tasca en el seu context real. En segon lloc, cal estructurar un primer model de la situació organitzant els objectes i trets rellevants del fenomen i reduint-los a les seves característiques rellevants per a la resolució. El següent pas és reduir el model de la situació utilitzant la informació rellevant i matematitzar aquest model mitjançant la traducció dels objectes i les relacions del món real en objectes i relacions matemàtiques. D'aquesta manera, es matematitza el fenomen objecte d'estudi i es pot aplicar coneixements i mètodes matemàtics per aconseguir un resultat matemàtic. Finalment, cal validar la solució obtinguda i el model matemàtic generat per obtenir-la. En aquest punt, es comprova si la solució és plausible i satisfactòria en el seu context real. Si no és així, els estudiants poden iniciar un segon bucle de modelització per canviar o refinar el model matemàtic generat. Per tant, la modelització matemàtica és una activitat complexa. Per desenvolupar amb èxit aquestes etapes, els estudiants han de recórrer a una sèrie d'habilitats i competències relacionades amb aspectes clau de l'educació matemàtica, com ara la metacognició, la motivació i les seves pròpies idees sobre la naturalesa de les matemàtiques (Maaß, 2006).

2.1.3 Competències de modelització matemàtica

En definir la competència en modelització matemàtica, s'entén que els estudiants han de ser capaços d'establir connexions i traduir entre els dominis real i matemàtic en ambdues direccions i poder treballar per enriquir el model matemàtic que creen i desenvolupen per ajustar-lo a les necessitats que proposa l'activitat. Niss et al. (2007) defineixen la competència de modelització de la següent manera:

“La competència de modelització matemàtica significa la capacitat d'identificar preguntes, variables, relacions o supòsits rellevants en una situació determinada del món real, traduir-les a matemàtiques i interpretar i validar la solució del problema matemàtic resultant en relació amb la situació donada, així com la capacitat d'analitzar o comparar models donats investigant els supòsits que es fan, comprovant les propietats i l'abast d'un model determinat.” (Niss et al., 2007, pàg. 12)

Aquesta definició de competència de modelització implica promoure la capacitat de processar problemes reals utilitzant i coordinant el coneixement matemàtic i ha de ser un objectiu central de l'ensenyament de la modelització a les aules de tots els nivells d'estudis obligatoris. La definició anterior descriu una anomenada competència de modelització global en la qual es poden identificar determinats subprocessos que cal saber combinar. Així, Blum (2015) entén la competència de modelització com la capacitat de construir, utilitzar o adaptar models matemàtics realitzant els passos del procés de manera adequada i adequada al problema, així com analitzant o comparant models donats. Per tant, la competència de modelització no és unidimensional, sinó que es pot interpretar com una combinació de diferents subcompetències que la componen. Després de diverses propostes presents a la literatura, Greefrath & Vorhölter (2016) recullen aquestes subcompetències que detallem a la taula 2.2.

Subcompetències de modelització		Descripció de la subcompetència
Comprensió		Els alumnes construeixen el seu propi model mental per a una situació problemàtica determinada i així entenen la pregunta
Simplificació		Els alumnes separen la informació important de la no important sobre una situació real
Matematització		Els alumnes tradueixen situacions reals adequadament simplifiades en models matemàtics, per exemple: terme, equació, figura, diagrama o funció
Treballar	ma-	Els estudiants apliquen estratègies de forma conjunta amb coneixements matemàtics per resoldre el problema matemàtic.
temàticament		
Interpretació		Els alumnes refereixen els resultats obtinguts en el model a la situació real i així aconseguixen resultats reals
Validació		Els alumnes comproven l'adequació dels resultats reals en el model de situació
Exposició		Els alumnes refereixen les respostes que es troben en el model de situació a la situació real i així responen a la pregunta

Taula 2.2: Subcompetències del modelització (Greefrath & Vorhölter, 2016, p. 19)

La capacitat d'executar aquests subprocessos es pot considerar com una subcompetència de la modelització per ella mateixa (Kaiser, 2007; Maaß, 2006; Niss, 2003). Aquestes subcompetències es poden caracteritzar d'acord amb el cicle de modelització de 7 passos de la figura 2.1, tal com es mostra a la taula 2.2. A més, es requereixen competències metacognitives per a una execució adequada dels processos de modelització (Stillman, 2011). És sabut que l'absència de metacognició, en concret la manca de control sobre el procés global de resolució (Kaiser, 2007) o la reflexió sobre l'adequació del treball realitzat (Blomhøj & Højgaard, 2003) poden provocar problemes difícils de superar durant el procés de modelització.

2.1.4 Dificultats en el procés de modelització

En la modelització, és aconsellable que es pugui treballar de forma autònoma en entorns d'aprenentatge cooperatiu (Maaß, 2005). A més, treballar en grups reduïts és una forma social adequada per a la resolució de les activitats de modelització (Clohessy i Johnson,

2017; Ikeda & Stephens, 2001), que semblen necessàries per al desenvolupament cognitiu dels estudiants. D'aquesta manera, a cada pas del procés de modelització dels estudiants representen una capacitat per a la comprensió cognitiva potencial (Galbraith & Stillman, 2006; Stillman, 2011). La Taula 2.2 mostra un recull d'alguns exemples habituals de dificultats i errors que els estudiants experimenten durant la modelització matemàtica:

- Molts estudiants tenen dificultats per comprendre la tasca encomanada. Això no només és degut a la manca d'habilitats de lectura (Plath & Leiss, 2018), sinó que els estudiants també poden endinsar-se en l'activitat de modelització sense llegir amb atenció l'enunciat i comprendre adequadament el context presentat (Blum, 2015).
- La forma en la que simplifiquen o estructurin el model real es pot considerar una font habitual d'error (Blum, 2015). Els estudiants no només experimenten dificultats identificar clarament els seus propis supòsits, sovint a causa dels errors que presenten en interpretar la pregunta (Schukajlow et al., 2012).
- Malgrat obtenir resultats matemàtic correctes i/o adequats al context, poden sorgir dificultats en la seva interpretació, entesa com el procés de traducció de les matemàtiques al món real. Així, els estudiants sovint obliden el que realment signifiquen els seus càlculs i decisions matemàtiques amb el que acaben tenint problemes per identificar els resultats matemàtics amb els seus homòlegs reals (Galbraith & Stillman, 2006).
- És clar que als estudiants els costa especialment validar els seus resultats (Galbraith & Stillman, 2006). Per exemple, alguns estudiants creuen que la validació sempre és la mateixa per totes les activitats de modelització en les que treballen, o bé consideren que la validació és només una valoració general dels resultats obtinguts. En qualsevol cas, la dificultat més comú és que els estudiants no perceben la necessitat de validar les seves solucions (Blum, 2015).

Existeixen diversos estudis sobre errors, bloquejos o dificultats en els processos de modelització, que va ser un potent focus d'atenció per a la recerca durant les passades dècades (Galbraith & Stillman, 2006; Galbraith et al., 2007; Maaß, 2005; Schaap et al., 2011; Stillman et al., 2013; Stohlmann & Albarracín, 2016). En aquest treball no ens centrarem en identificar els errors comesos o induïts pel professorat, que donen lloc a una altra via de recerca rellevant en l'àrea de coneixement (Font et al., 2024). S'ha observat que el procés de modelització també implica dificultats afectives, socials, metacognitives o de tipus organitzatiu. Per exemple, s'observa que sovint els estudiants perden la visió

general del propi treball, o bé demostren una manca de confiança en ells mateixos com a matemàtics, pateixen de formes de comunicació alterades en el grup de treball o una formulació poc clara tasca de modelització. El professorat necessita conèixer aquestes dificultats en els processos de modelització per poder reaccionar de manera efectiva en els processos de modelització. D'aquesta forma, la intervenció adequada en els processos de modelització continua sent clau en la investigació que s'està fent actualment.

2.1.5 Activitats Promotores de Models (MEA's)

Des de la perspectiva teòrica anomenada Models & Modelling (M&M) i des del punt de vista de l'activitat de creació i desenvolupament de models matemàtics, s'entén que els estudiants realitzen múltiples cicles d'interpretació, descripcions, conjectures, explicacions i justificacions que es redefeixen i reconstrueixen iterativament a mesura que interactuen amb altres estudiants en l'objectiu de construir models (Doerr & English, 2003). La construcció de models implica activitats purament matemàtiques com quantificar, dimensionar, coordinar, categoritzar, algebratitzar i sistematitzar diversos tipus d'objectes, relacions, accions, patrons i regularitats (Mousoulides et al., 2007). La perspectiva M&M també considera problemes de modelització sobre dades que se centren a organitzar i representar-les, construir patrons i buscar relacions que apareixen en el fenomen descrit per les dades analitzades (Lesh et al., 1997), així com implicar els estudiants en el raonament estadístic com ara presa de decisions, inferència i predicció.

Segons la literatura, una activitat de modelització matemàtica té les següents característiques principals: *(i)* ser oberta, *(ii)* estar basada en escenaris del món real, *(iii)* promoure la creació de models matemàtics, *(iv)* desenvolupar les competències de modelització dels estudiants, *(v)* fer hipòtesis coherents amb escenaris del món real, *(vi)* crear solucions diverses segons els supòsits, i *(vii)* oferir solucions que es puguin generalitzar (Blum & Niss, 1991; Kula Unver et al., 2018; Lesh & Doerr, 2003).

Els problemes que es plantegen als alumnes en el marc de M&M, contextualitzats en el món real i amb característiques i demandes que els fan modelitzar activitats, s'anomenen Activitats Promotores de Models, o en anglès "model-eliciting activities" (MEAs) (Doerr & English, 2003). L'enfocament M&M s'integra en la resolució de problemes perquè considera que una MEA en si mateixa constitueix el procés de modelització i obtenció d'un model. Així, l'enunciat del problema ha de permetre als estudiants establir criteris adequats que ajudin a decidir quina solució és la més adient entre un conjunt de diferents alternatives. També ha de permetre als estudiants jutjar per si mateixos si les respostes necessiten millorar, perfeccionar o ampliar per a un propòsit específic. L'organització de l'activitat és

en grups petits, entre 3 i 6 persones (Clohessy & Johnson, 2017; Zawojewski et al., 2003). Els estudiants s'enfronten a una situació problemàtica que els ha de resultar significativa i rellevant, perquè han de crear, ampliar i perfeccionar les seves pròpies construccions matemàtiques. Les aportacions dels diferents membres del grup són les que conformen el model construït entre tots ells (Brunet-Biarnes & Albarracín, 2024).

En les MEAs, s'anima els estudiants a generar productes que van més enllà de proporcionar respostes breus a preguntes restringides artificialment sobre situacions matematitzades i adaptades a l'àmbit escolar. Es tracta de possibilitar la creació de models per part de l'alumnat a partir dels seus coneixements previs, tant matemàtics com sobre el món real. El treball dels estudiants durant una activitat de modelització hauria de donar lloc a produccions que es puguin compartir amb altres i reutilitzar quan s'estudien situacions o problemes similars (Lesh & Lehrer, 2003). En funció de les necessitats del projecte, els estudiants poden generar models per proporcionar eines de presa de decisions (Mousoulides et al, 2007). Això inclou l'elaboració de plans d'acció específics per fer front a situacions problemàtiques i el disseny dels instruments d'avaluació necessaris per distingir diferents escenaris en situacions complexes on cal utilitzar models matemàtics específics.

Les MEAs es poden dissenyar segons diferents perspectives de disseny. Un exemple és el marc de disseny de Galbraith (2007) que proporciona una pauta per aconseguir que les activitats de modalització permetin transformar les idees dels alumnes en models (Galbraith, Stillman i Brown, 2010). Els principis proposats per Galbraith (2007) són *(i)* rellevància i motivació, *(ii)* accessibilitat, *(iii)* viabilitat de l'enfocament, *(iv)* viabilitat del resultat, *(v)* validesa i *(vi)* flexibilitat didàctica.

Per a Galbraith (2007), el primer principi requereix que l'activitat de modelització tingui una connexió clara amb el món real tal com el perceben els estudiants, on el context de les activitats de modelització hauria de formar part de les seves experiències diàries, tot i que també és possible treballar amb situacions que els hagin de ser rellevants encara que no hi hagin reflexionat (Albarracín i Gorgorió, 2020). D'acord amb el segon principi, l'activitat de modelització hauria de proporcionar als estudiants l'oportunitat d'identificar preguntes matemàticament abordables. El tercer principi estableix que els estudiants poden desenvolupar solucions a les activitats de modelització mitjançant *(a)* les matemàtiques que tenen a la seva disposició, *(b)* els supòsits necessaris per a descriure el fenomen, i *(c)* recopilant les dades requerides. Segons el quart principi, la solució d'un problema bàsic de matemàtiques hauria de ser possible per als estudiants amb l'ajuda de la interpretació. El cinquè principi indica que les solucions per a l'activitat de modelització es poden avaluar en termes de la seva precisió matemàtica i la seva rellevància per a l'entorn contextual. Segons el sisè principi, el principi de flexibilitat didàctica, el problema s'ha

d'estructurar en una sèrie de preguntes que puguin preservar la integritat de la situació real sense desnaturalitzar-la.

En el nostre treball utilitzem els principis de disseny per a MEAs de Lesh, Cramer et al. (2003). Aquest equip d'investigadors va desenvolupar i provar aquests principis amb l'ajuda de centenars de professors, pares i líders de la comunitat educativa matemàtica que van treballar amb els investigadors en un experiment d'ensenyament multietapa de 15 setmanes (Lesh, Cramer et al., 2000). En el seu treball, defineixen sis principis de disseny d'activitats de modelització, que detallem en els següents paràgrafs.

El *principi de construcció del model* indica que la solució del problema requereix la creació d'un model que ha de ser prou complex per a proporcionar una resposta adequada. El model ha d'incloure diversos elements, les relacions entre aquests elements i operacions necessàries. El procés de modelització comença quan els estudiants s'enfronten a la necessitat de construir aquest model que ha d'explicar, donar sentit o predir un altre sistema. A més, perquè el model tingui significat matemàtic, s'ha de concentrar en les característiques estructurals bàsiques del sistema descrit (Lesh et al., 2000).

El *principi de construcció del model* esdevé essencial quan els mètodes aritmètics sols són insuficients per resoldre el problema i cal desenvolupar estructures matemàtiques més complexes (English, 2006). El propòsit de les MEAs no és només aconseguir una solució per al problema, sinó desenvolupar les eines matemàtiques i les estructures adequades que es puguin necessitar.

El *principi de realitat* emfasitza la importància que els estudiants treballin per entendre una situació o fenomen a partir del seu propi coneixement i experiència prèvia al món real (Lesh et al., 2000). Requereix que la situació problemàtica reflecteixi o faci una referència clara a la vida real dels estudiants (Lesh et al., 2000; Lesh & Caylor, 2007). Aquest principi estableix també que les activitats s'han de dissenyar d'acord amb dades reals o realistes (Saka & Alkan, 2022). Segons el principi de realitat per al disseny de tasques, les preguntes que es fan als estudiants són preguntes reals, en contraposició a les preguntes habituals de la classe de matemàtiques (Zawojewski et al., 2003). Això permet als estudiants comprendre la situació a través dels seus coneixements i experiència. El *principi de realitat* requereix que, durant el procés de solució, se segueixin les idees i propostes generades pels mateixos estudiants i que no es vegin obligats a seguir els mètodes establerts pel professor o l'autor de l'activitat (Doruk, 2019). El caràcter realista de la situació problemàtica ha de permetre als alumnes trobar solucions creatives i comprendre el problema amb més facilitat perquè el coneixeran de primera mà (Chamberlin & Moon, 2005).

El *principi de generalització del model* requereix que el model promogut no només ha de ser útil i aplicable a una situació particular, sinó que també s'ha de poder reutilitzar i generalitzar per a altres situacions similars, i poder ser compartit amb altres persones (Chamberlin & Moon, 2005). Les activitats de modelització que compleixen aquest principi requereixen que els estudiants assegurin que desenvolupin models que siguin generalitzables en lloc de desenvolupar models personals o produir maneres de pensar amb un únic propòsit (Lesh & Caylor, 2007).

El *principi de prototipus simple* indica que el model desenvolupat ha de ser el més simple possible mentre encara és matemàticament correcte (Lesh i Caylor, 2007). Aquest principi requereix que el model creat pels estudiants pugui ser recordat pels estudiants fins i tot després de molt de temps (Chan, 2008). A més, el model construït hauria de ser fàcilment interpretable per altres (Chamberlin & Moon, 2005). A partir d'aquest principi, Doruk (2019) afirma que com que l'objectiu dels MEAs és centrar-se en el desenvolupament de conceptes matemàtics, la solució del problema no hauria d'incloure procediments complexos a un nivell que eclipsi l'objectiu principal dels estudiants.

El *principi de documentació del model* requereix documentació dels models matemàtics generats en el procés de resolució (Zawojewski et al., 2003). Aquest principi fa èmfasi en el fet que els estudiants han de ser capaços d'expressar els seus processos de pensament durant el treball en les MEAs. Aquest principi ajuda els professors a avaluar el pensament dels seus alumnes sobre operacions, relacions i patrons matemàtics. També és beneficiós per als estudiants, ja que facilita les seves visualitzacions i els permet reflexionar sobre els seus pensaments (Chamberlin & Moon, 2005). En les activitats de generació de models preparades d'acord amb aquest principi, s'espera que els estudiants escriguin un informe final que mostri clarament els seus propis pensaments sobre la situació del problema i les possibles solucions considerades durant l'activitat (Doruk, 2019).

El *principi d'autoavaluació* requereix que el propòsit del problema sigui clar i adequat al nivell dels estudiants (Chamberlin & Moon, 2005; Lesh et al., 2000). Segons aquest principi, els estudiants haurien de ser capaços d'avaluar l'adequació i la utilitat dels seus enfocaments de solució de manera independent, sense necessitat de suport o aprovació del professor (Chamberlin & Moon, 2005; Lesh et al., 2000). Així mateix, aquest principi permet als estudiants controlar l'exactitud de les seves pròpies interpretacions i conclusions en l'activitat i decidir per si mateixos el model que han creat que cal millorar o revisar (Doruk, 2019; Lesh et al., 2000).

Els sis principis de disseny de Lesh et al. (2003) recullen les característiques clau d'una bona activitat de modelització matemàtica en què els estudiants desenvolupen models

per ells mateixos. Estan pensats per garantir activitats que promouen que els estudiants comparteixin i reflexionin sobre el seu pensament matemàtic.

A diferència de les activitats habituals dels llibres de text, la naturalesa del problema plantejat en una MEA és diferent (Crites & Laurent, 2015), ja que els estudiants han de dotar de significat a una situació. No només cal donar respostes cal produir eines conceptuals que hauran de compartir amb altres, i reutilitzar i modificar per altres situacions.

En la web Pedagogy in Action: The SERC Portal for Educators es pot trobar una taula (Figura 2.2) resum que compara les característiques de les activitats habituals a l'aula amb les activitats promotores de models (MEAs).

Regular activities	MEAs
One or more may be used in each class session.	Only a few may be used throughout an entire course.
Are used to accomplish a particular learning goal, usually to illustrate a concept or procedure or to discover a statistics idea. (e.g., having students understand why random samples are better than judgmental ones, or what makes a correlation larger or smaller).	Are used to engage students in thinking and reasoning that will set the foundations for <i>future learning of a concept or procedure</i> . The goal is to develop a model to use in solving a problem, but students are not expected to develop what might be “the right” model.
Lead students to a desired solution or conclusion	Are designed to lead to many different conclusions or solutions that need to be explained and justified by students.
May or may not be used to promote classroom discourse	Promotes classroom discourse by having students discuss and critique various solutions
Students either produce or learn the “correct” solution to a problem or question.	Students’ solutions are compared, but no correct solution is given. However, an expert solution may be provided at a later time, for comparison.
It is often clear what steps students should follow in the activity (e.g., use this applet, take this sample of data)	The problem is open-ended and steps are not given for students to follow; however, the needs of the client and the data provided allow students to determine when their solution is complete.
The activity may or may not be related to a real problem or real data	The problem should be real and based on real data (or partially modified real data)
May be completed by students working alone	Students initially read the problem and respond to some questions alone, but then work together as a team to produce and explain their model
Reading and writing may or may not be a component of the activity	Reading background information and writing a letter or report is part of the MEA

Figura 2.2: Taula comparativa de les característiques de les tasques habituals dutes a l'aula i les característiques de les MEAs

2.2 Modelització Estadística

A la literatura, es troben diferents punts de vista sobre si la matemàtica i l'estadística són ciències diferenciades o si l'estadística forma part de les matemàtiques. Tot i aquesta discussió, la realitat que emergeix de la literatura destaca tres grans diferències entre la matemàtica i l'estadística: l'impacte de la variabilitat, les dades i el context en la construcció de coneixements (Cobb, 1997). La necessitat de treballar amb la variabilitat confereix una singularitat especial a l'estadística, diferenciant-la de les matemàtiques i d'altres disciplines. A més, el pensament estadístic es desvia del pensament utilitzat a les matemàtiques, ja que les dades no són només nombres, sinó nombres amb context. Mentre que a les matemàtiques se simplifica i se sintetitza la realitat, enfocant-se en l'estructura matemàtica sense el context real, a l'estadística les dades donen sentit a aquesta estructura (Cobb, 1997).

Com hem explicat amb anterioritat un model matemàtic és un constructe abstracte que representa les característiques d'una estructura o patró creant un sistema conceptual (Lesh & Harel, 2003). Aquest model es desenvolupa durant el que s'anomena cicle de modelització: una o diverses iteracions successives que es mouen entre el món real i el matemàtic (Lesh & Doerr, 2003).

Un model matemàtic no és només una representació d'un fenomen, ja que té un o diversos propòsits que participen en la seva formulació. Per tant, quan parlem d'un model estadístic, aquest està construït per satisfer un propòsit estadístic concret. Això implica que segur que té dues característiques principals. La primera és que el fenomen que intenta explicar té involucrat algun aspecte de variabilitat. La segona és que s'utilitzarà tenint en compte consideracions probabilístiques, ja que el model dona una explicació no determinista (Dvir & Ben-Zvi, 2018).

Crites & Laurent (2015) simplifiquen el que hem explicat en la primera gran idea estadística que serveix per diferenciar els models estadístics dels matemàtics:

- Els models matemàtics descriuen l'estructura.
- Els models estadístics estenen els models matemàtics per descriure la variabilitat al voltant de l'estructura.
- Els models estadístics s'avaluen en funció de com són de bons descrivint les dades i

si són útils.

Finalment, val la pena destacar que quan són els estudiants els que estan treballant en aspectes estadístics, no és habitual el domini de la terminologia ni tampoc el fet que tinguin desenvolupades eines formals estadístiques. És habitual que els joves aprenents o estudiants novells utilitzin un raonament informal i, per tant, desenvolupin models estadístics informals (Dvir & Ben-Zvi, 2018).

2.3 Les idees clau en l'Educació Estadística

La manera en què els estudiants aborden situacions reals que requereixen la modelització de dades ha estat un focus d'atenció en la investigació educativa des de finals del segle XX. Diversos estudis constaten que aquestes activitats proporcionen un context distintiu per observar el treball estadístic dels estudiants en situacions obertes (Batanero et al., 1996; Doerr & Tripp, 1999; Lehrer & Schauble, 2000; Lesh et al., 1997). En resposta a la necessitat de desenvolupar competències estadístiques entre els estudiants, els investigadors han conceptualitzat diversos aspectes que tracten de definir les necessitats estadístiques dels ciutadans (Crites & Laurent, 2015). Així, a la literatura apareixen termes que provenen de marcs teòrics diferents i que no són excloents, sinó que es complementen (Ubilla, 2019; 2020), com són l'alfabetització estadística, el raonament estadístic i el pensament estadístic.

El tipus d'activitats que utilitzem en aquest estudi connecten amb els coneixements estadístics i l'aprenentatge de l'Estadística. L'Estadística com a ciència per si mateixa té unes característiques que la diferencien de les matemàtiques: a les investigacions estadístiques ressalta la importància del context i de la variabilitat. Cobb & Moore (1997) expliquen el valor del context com a domini en què interpretar els seus resultats. Així, un model estadístic es defineix pel seu propòsit. Per a Dvir & Ben-Zvi (2018), un model matemàtic aplicable a situacions estadístiques ha d'incloure la variabilitat i l'ús de consideracions probabilístiques. Quan ens referim a estudiants de Secundària, de modeladors novells, hem d'entendre que, com que encara no han adquirit les destreses necessàries per quantificar la probabilitat, l'estudi dels models creats i dels cicles de modelització és complex (Gould, 2004). Per això al nostre treball pretenem identificar el model matemàtic que generen, ja que el nostre alumnat no ha treballat el desenvolupament del pensament estadístic ni els conceptes necessaris per quantificar la incertesa en un estudi estadístic.

2.3.1 Evolució Històrica en l'Ensenyament de l'Estadística

El desenvolupament històric de l'estadística en els currículums educatius i les investigacions revela la seva consolidació als anys seixanta del segle XX, quan a la Gran Bretanya es va recomanar l'inclús de la probabilitat i l'estadística per als estudiants d'11 a 16 anys. Organismes com l'ASA (American Statistical Association) i l'NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) van formar el Joint Committee on the Curriculum in Statistics and Probability, amb iniciatives similars a països com els Estats Units, Regne Unit, Alemanya, Israel, marcat pel desenvolupament de la recerca en educació estadística. Les conferències internacionals, com ICOTS (International Conference on Teaching Statistics), van esdevenir un fòrum per debatre aquesta disciplina des de la dècada dels vuitanta fins avui.

La proposta de currículum i estàndards d'avaluació del NCTM (NCTM, 1989) ja incorporaven l'estadística a finals dels vuitanta, però aquests eren més una enumeració de conceptes i procediments. Va ser als anys 2000 que es van crear els *Principles and Standards for School Mathematics* per l'NCTM, destacant quatre grans idees en educació estadística: formulació de preguntes abordables amb dades, ús de mètodes estadístics, desenvolupament i avaluació d'inferències i predicció basades en dades, i comprensió i aplicació de conceptes bàsics de probabilitat.

Durant les dues dècades següents, de 1980 a 1990, l'educació estadística se centra en mesures de tendència central. No obstant això, al 1997, David Moore, president de l'ASA en aquell moment, destaca la importància de dirigir el focus en la variabilitat. Això va conduir a la revisió de les grans idees estadístiques i, al 2007, l'ASA publica les *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE)*, que destaquen el paper central de la variabilitat en els processos d'investigació estadística. El cicle de les quatre components del procés d'investigació estadística, identificant preguntes estadístiques, recollint dades, analitzant-les i interpretant els resultats, és el nucli de les recomanacions GAISE. Aquestes recomanacions han experimentat revisions periòdiques, amb canvis significatius el 2016 i el 2020. El 2008, al llibre *Developing Students' Statistical Reasoning*, Garfield & Ben-Zvi (2008) proposen nou conceptes centrals per a l'ensenyament de l'estadística a tots els nivells: dades, distribució, variabilitat, centre, models estadístics, aleatorietat, covariació, mostra i inferència. Posteriorment, Watson (2011) sintetitza aquests conceptes en cinc grans idees: Variació, esperança, distribució, aleatorietat i inferència.

2.3.2 Conceptes clau en Educació Estadística

En les darreres dècades, com s'ha relatat anteriorment, s'ha donat un intens debat per definir els conceptes clau de l'Educació Estadística. Termes com cultura estadística, raonament estadístic, pensament estadístic, modelització estadística o cicle d'investigació estadístic es defineixen i evolucionen de mà de diversos autors (Ben-Zvi, 2004; Gal 2002; Garfield, 2002; 2003; 2004; Pfannkuch & Wild, 2000; Watson, 2003; 2011; Wild & Pfannkuch, 1999) sense arribar encara a un consens teòric (Guimaraes, 2016) però enriquint el debat per tal d'oferir una millor educació estadística.

La nostra societat requereix que els ciutadans siguin competents en fenòmens col·lectius i socials en un sentit ampli de la paraula. Que entenguin les bases de la variabilitat, la dispersió i l'heterogeneïtat que provoquen incertesa a l'hora d'interpretar, prendre decisions i afrontar riscos. Quan es planteja que els nostres estudiants identifiquin, creïn i resolguin problemes de la vida quotidiana sovint es veuen involucrats els processos de recollida i anàlisi de dades per obtenir i interpretar informació. Aquest seria un procés actiu com a resolutors de problemes estadístics. En molts altres casos reals les dades venen recollides, organitzades i interpretades per altres com, per exemple, els mitjans de comunicació. Aquest seria un procés passiu, però aquí apareix la necessitat de ser crítics, que també s'ha de desenvolupar. Així que no només requerim per als nostres estudiants coneixements i conceptes estadístics bàsics, necessitem treballar amb ells una forma de pensar estadísticament. Al document GAISE (Franklin et al., 2007) editat per l'ASA podem trobar com s'impulsa la cultura estadística. En concret recomanen:

- Ensenyar Pensament Estadístic.
- Focalitzar en els continguts.
- Integrar dades reals amb context i amb un propòsit.
- Incentivar l'aprenentatge actiu.
- Utilitzar la tecnologia per a potenciar l'anàlisi de dades.
- Utilitzar mètodes d'avaluació per millorar l'aprenentatge i avaluar, efectivament, l'aprenentatge dels estudiants.

Sembla clar que el desenvolupament de coneixements i competències estadístiques no és generalitzat ni persistent i és força difícil de modificar. Hi ha moltes idees errònies al respecte, així com intuïcions equivocades utilitzades per estudiants i adults que són

difícils de superar. A més, el raonament estadístic dels estudiants sovint és inconsistent, depenent molt fortament del context del problema i de l'experiència dels estudiants amb el context. Tot i que alguns tipus d'ensenyament semblen conduir a resultats positius, no hi ha evidències clares que els resultats es mantinguin més enllà de les tasques escolars o es puguin generalitzar (Garfield & Ben-Zvi, 2008). Rumsey (2002) posa de manifest creences del professorat, com ara que el professorat considera que els càlculs o l'ús de fórmules ajuden l'alumnat a entendre els conceptes estadístics i són una estratègia didàctica adequada. També observa que hi ha un convenciment entre el professorat que utilitzant el llenguatge estadístic adequadament els estudiants ja seran capaços d'entendre els conceptes estadístics amb què treballen. Aquesta realitat xoca amb les recomanacions sobre l'ensenyament de l'estadística (Franklin et al., 2007) que fomenten ensenyar estadística com un procés d'investigació de resolució de problemes i presa de decisions (Pfannkuch & Wild, 2004).

Les recerques que estudien el desenvolupament del raonament sobre dades i probabilitats mostren que aquestes idees són més difícils d'aprendre del que es suposava. Estudis que involucren estudiants tant de primària com de secundària i que es centren en la comprensió de conceptes concrets (Ben-Zvi & Sharett-Amir, 2005; Pfannkuch & reading, 2006) mostren que aquelles seqüències d'activitats dissenyades amb cura en les que s'utilitzen les eines digitals i tecnològiques apropiades poden ajudar els estudiants a millorar el raonament i la comprensió al llarg de períodes de temps significatius (Ben-Zvi & Arcavi, 2001; Garfield & Ben-Zvi, 2007).

En el nostre treball, pretenem utilitzar activitats de modelització perquè els estudiants tinguin la necessitat de mesurar la variabilitat de les dades donades. Utilitzarem activitats de modelització MEAs amb dades donades en l'activitat. En el treball anterior (Albarracín, Aymerich & Gorgorió, 2017), es va observar com els estudiants de Secundària creaven models per mesurar aquesta variabilitat i que tenien una idea intuïtiva de la normalitat com a característica de les distribucions de dades. Però cap d'aquests models es va apropar a la fórmula de la desviació. Els estudiants van utilitzar altres mètodes propis per poder establir la diferència entre les distribucions respecte a la seva dispersió respecte a la mitjana. Interpretem aquest fet com l'evidència que els estudiants de Secundària poden generar les seves pròpies idees i conceptes estadístics que serveixin com a base per poder connectar amb els conceptes clau de l'Estadística definits als currículums. Però no només això, els estudiants poden actuar com estadístics i desenvolupar competència estadística.

2.3.3 Alfabetització Estadística en adults

L'Alfabetització Estadística és una línia de treball molt important dins de la didàctica de l'Estadística (Batanero, 2002). El terme *alfabetització* no només evoca habilitats de lectura i escriptura, sinó que, quan es juxtaposa amb *estadística*, incorpora les competències estadístiques essencials per a un pensament crític i una comunicació efectiva. En l'entorn educatiu, aquesta conjunció implica l'adquisició de destreses relacionades amb càlculs estadístics com mitjanes, desviacions estàndard i càlcul de probabilitats en diversos nivells (Watson, 2006). Tanmateix, és imperatiu discernir entre els termes *alfabetització* i *cultura estadística* abans de prosseguir. Segons l'anàlisi de Tauber et al. (2013), l'Alfabetització Estadística no és merament una habilitat tècnica, sinó que conté un element cultural intrínsec. Aquest matís cultural, identificat per Batanero (2002) i pres en consideració per a la seva traducció, destaca la noció que l'estadística és part de la nostra herència cultural, una competència necessària per a la plena ciutadania. Per tant, en aquest treball, els termes *alfabetització* i *cultura estadística* es tractaran de manera intercanviable, ja que intentarem captar aquest aspecte transcendent i integral de l'Estadística en la nostra societat.

Rumsey (2002) ens proporciona diverses definicions d'Alfabetització Estadística:

- “La capacitat de les persones per interpretar i avaluar críticament la informació estadística i els arguments basats en dades que apareixen en diversos mitjans de comunicació, així com la seva habilitat per discutir les seves opinions sobre aquesta informació estadística.” (Gal, 2002)
- “La comprensió del llenguatge estadístic: paraules, símbols i termes. Ser capaç d'interpretar gràfics i taules. Ser capaç de llegir i entendre les estadístiques a les notícies, als mitjans de comunicació, a les enquestes, etc.” (Garfield, 1999)
- “La capacitat de comprendre els conceptes estadístics i raonar al nivell més bàsic.” (Snell, 1999)
- “Comprendre el text i el significat i les implicacions de la informació estadística que conté, en el context del tema al qual es refereix.” (Watson, 1997)

Gal (2002) justifica la necessitat d'enfortir el pensament estadístic en tots els sectors de la població, ja que vivim en una societat carregada d'informació i les dades, la variació i l'atzar són omnipresents a la vida moderna. Així Gal (2002) defineix alfabetització estadística en els adults (no en els estudiants que l'estan assolint) com a dos elements que estan relacionats:

- a) Habilitat per interpretar i avaluar críticament informació estadística, arguments relacionats amb les dades o fenòmens estocàstics, els quals poden donar-se en diferents contexts.
- b) Habilitat per discutir o comunicar les seves reaccions davant d'informació estadística. Així com la manera d'entendre el significat d'aquestes informacions, les seves opinions sobre les implicacions de la informació o la seva preocupació per l'acceptabilitat de les conclusions donades.

Gal (2002) sintetitza quines són les bases de coneixement i les habilitats que han de tenir els ciutadans adults per poder comprendre, interpretar, avaluar i reaccionar als missatges estadístics trobats en diferents contextos. El model considera que l'alfabetització estadística de les persones adultes inclou coneixements i disposicions.

El component de coneixement està compost per cinc elements cognitius: habilitats d'alfabetització, coneixements estadístics, coneixement matemàtic, coneixement del context i preguntes crítiques. I el component que disposa ha d'estar format per dos elements: postura crítica i creences i actituds. Els components i elements del model proposat no s'han de veure com a entitats fixes i separades, sinó com un conjunt de coneixements i disposicions dinàmiques i dependents del context que, en conjunt, permeten un comportament estadístic alfabetitzat.

- **Habilitats d'alfabetització:** Per entendre informació estadística escrita es necessiten diverses habilitats per processar textos. Cal tenir habilitats de comprensió de textos complexos amb un llenguatge precís i que sovint no es defineix o bé, que el significat en el llenguatge comú difereix del significat en el llenguatge científic. A més la informació estadística conté informació gràfica, en taules, o altres elements que il·lustren, resumeixen i complementen el text, i, per tant, es necessiten habilitats documentals.
- **Coneixements específics:** Es necessiten coneixements bàsics estadístics que s'han d'aprendre a l'etapa escolar:
 - Sentit numèric
 - Entendre el concepte de variables
 - Interpretar taules i gràfics
 - Planificació d'enquestes o experiments (mostreig, mètodes de recollida de dades i disseny de qüestionaris)

- Procés d'anàlisi de dades
 - Relacions entre probabilitat i estadística
 - Raonament inferencial, tant intervals de confiança com test d'hipòtesis
- Coneixement matemàtic. S'ha de trobar un equilibri en els conceptes matemàtics subjacents a les idees clau estadístiques. No es poden ignorar però no es pot posar massa èmfasi i substituir l'estadística per matemàtica.
 - Coneixement del context. Davant de la informació estadística cal activar el nostre coneixement del context general en què es presenta la informació. Moore (1997) argumenta que el context dota de significat a les dades, és indissociable i permet la interpretació de la informació estadística així com l'obtenció de resultats.
 - Preguntes crítiques. Les dades i informacions estadístiques estan generades per entitats o organitzacions que tinguin conflicte d'interès i que poden pretendre presentar informes equilibrats i suficientment objectius. Per tant cal preocupar-se i saber valorar la validesa dels missatges, la credibilitat de la informació o les conclusions presentades.

Watson (1997) va suggerir una manera d'abordar la mesura i l'avaluació del desenvolupament d'habilitats d'alfabetització estadística. En concret, proposa una jerarquia de tres nivells, que inclou els requisits i) per entendre el llenguatge i la terminologia estadística bàsica, ii) per entendre-la en el seu context real, i iii) per qüestionar les afirmacions explícites sense una justificació estadística adequada. Encara que s'ha desenvolupat de manera independent, la jerarquia mostra similituds amb els quatre rols d'un lector crític (Watson, 2006).

També es defineix l'Alfabetització Estadística dels estudiants, diferent de la que ja ha d'assolir un ciutadà adult. Així com Rumsey (2002) desenvolupa el concepte de competència estadística, que veurem en un apartat, també tenim el concepte d'alfabetització estadística per estudiants universitaris definit per Garfield & DelMas (2010). Aquest concepte consisteix en el coneixement i l'aplicació del llenguatge i les eines estadístiques. Una altra perspectiva és la de l'alfabetització estadística, on els estudiants es consideren usuaris de l'Estadística en lloc de productors de dades o resultats estadístics.

Per una altra banda, Gal (2002) va afirmar que, respecte a les necessitats d'alfabetització estadística dels adults, aquests han de ser capaços de:

- (a) Interpretar i avaluar críticament la informació estadística, els arguments relacionats amb les dades o els fenòmens estocàstics que es poden trobar en diversos contextos.

- (b) Discutir les seves reaccions a la informació estadística, com ara la seva comprensió del significat de la informació, les seves opinions sobre les implicacions d'aquesta informació o les seves preocupacions sobre l'acceptabilitat de les conclusions donades.

Gal (2002) en aquest treball va incloure la identificació de cinc components necessaris per a l'alfabetització estadística:

1. Saber per què es necessiten dades i com es poden produir dades
2. Estar familiaritzat amb termes i idees bàsiques relacionades amb l'estadística descriptiva
3. Estar familiaritzat amb termes i idees bàsiques relacionades amb les visualitzacions gràfiques i tabulars
4. Comprensió de les nocions bàsiques de probabilitat
5. Saber com s'arriba a conclusions o inferències estadístiques

2.3.4 Competència Estadística

Quan en comptes de posar el focus d'atenció en els adults, ho fem en els estudiants apareix el terme competència estadística i ciutadania estadística (Rumsey, 2002). Aquests termes estan relacionats amb els objectius que es volen assolir en els cursos universitaris d'iniciació a l'estadística. Segons Rumsey (2002) la competència estadística fa referència al coneixement que es necessita per poder raonar i pensar estadísticament. Així està relacionada amb: el coneixement de les dades; la recollida de dades; els conceptes bàsics estadístics, i les habilitats bàsiques d'interpretació i comunicació. També va definir ciutadania estadística com la capacitat d'una persona en operar en una societat basada en dades: ser capaç de rebre, criticar i prendre decisions basades en informació estadística.

1. Coneixement de les dades. Els aspectes importants de prendre consciència sobre la importància de les dades ens farà motivar als estudiants. Cal fomentar que:
 - (a) Les dades formen part de la vida quotidiana i són un component important de tots els aspectes del món laboral
 - (b) Les dades sovint s'utilitzen malament i, per tant, poden desinformar
 - (c) Les decisions preses basades en Les dades poden tenir un fort impacte en les nostres vides

2. Comprensió de determinats conceptes i terminologia estadístics bàsics. Diversos autors han fet llistats sobre els continguts i mètodes que han d'aparèixer en els plans d'estudi (Rumsey, 2002) així com recomanacions de diferents estaments (Franklin et al., 2007) entre d'altres, i ja hem parlat sobre les grans idees estadístiques així que el punt important (Rumsey, 2002) quan s'ensenya una tècnica concreta és desenvolupar les grans idees de base i fer-la servir per a altres situacions així, al final, entendre qualsevol idea estadística significa relacionar el concepte dins d'una matèria que no sigui estadística.
3. Coneixement dels fonaments bàsics de la recollida de dades i generació d'estadístiques descriptives. Cal fomentar la producció de preguntes de recerca, recollir o produir les seves pròpies dades i deixar-los descobrir o determinar mètodes i tècniques pel seu compte.
4. Habilitat bàsica d'interpretació (la capacitat de descriure què signifiquen els resultats en el context del problema). Perquè no es tracta només de donar un resultat estadístic, cal una interpretació segons el context, donar una resposta a la pregunta o preguntes inicials. D'aquesta manera motivem els estudiants ja que finalment poden utilitzar l'estadística per entendre el seu món.
5. Habilitats bàsiques de comunicació (ser capaç d'explicar els resultats a una altra persona): llegir, escriure, demostrar i intercanviar informació estadística. És un pas més enllà de la interpretació on han de trobar resultats, cal transmetre la informació de manera entenedora, correctament i eficaçment.

Per tant, els objectius dels cursos d'introducció a l'estadística, és a dir, quan es treballa en el desenvolupament de les competències estadístiques dels estudiants, són formar ciutadans estadísticament competents i produir bons investigadors científics, que puguin utilitzar l'estadística en altres àrees del saber, i en conseqüència, participin en el desenvolupament d'altres ciències.

Alfabetització estadística en estudiants no universitaris

Gal (2002) ens ha definit dos components necessaris en els adults: la capacitat d'interpretar i avaluar críticament la informació estadística en diversos contextos, la capacitat de comunicar-la, tenint un impacte en la nostra presa de decisions. Això implicava no només uns coneixements sinó també unes disposicions associades. Per assolir-ho cal començar en l'àmbit escolar. El NCTM (1989) afirmava, ja que el coneixement de l'estadística és

necessari si els estudiants volen ser consumidors intel·ligents que puguin prendre decisions crítiques i informades. Watson (2003) proposa en el seu treball basat en tasques utilitzades en enquestes sis nivells jeràrquics: idiosincràtic, informal, inconsistent, consistent/no crític, crític, i crític-matemàtic.

Nivell	Breu caracterització dels nivells de les tasques
Matemàtic-Crític	Les fases de la tasca d'aquest nivell exigeixen un compromís crític i tenir en compte el context. L'ús del raonament proporcional, especialment en contextos mediàtics o casuals, mostrant valoració de la necessitat d'incertesa a l'hora de fer prediccions i interpretar aspectes subtils del llenguatge.
Crític	Els passos de l'activitat tasca demanen un compromís crític on fer-se preguntes en contextos familiars i desconeguts que no impliquin només raonament proporcional, però que promouent l'ús adequat de la terminologia, la interpretació qualitativa de l'atzar i l'apreciació de la variació.
Consistent-No Crític	Els passos de la tasca requereixen un compromís adequat però no crític amb el context, múltiples aspectes de l'ús de la terminologia, l'apreciació de la variació només en la configuració de l'atzar i les habilitats estadístiques associades amb la mitjana, les probabilitats simples i les característiques dels gràfics.
Incoherent	Els passos de la tasca en aquest nivell esperen un compromís selectiu amb el context, un reconeixement adequat de les conclusions però sense justificació i un ús qualitatiu més que quantitatiu de les idees estadístiques.
Informal	Els passos de la tasca només requereixen un compromís col·loquial o informal amb el context que sovint reflecteix creences intuïtives no estadístiques, elements únics de terminologia i entorns complexos i càlculs bàsics de taules, gràfics i casualitats d'un sol pas.
Idiosincràtic	Els passos de la tasca d'aquest nivell suggereixen un compromís idiosincràtic amb el context, l'ús tautològic de la terminologia i les habilitats matemàtiques bàsiques associades amb el recompte un a un i la lectura dels valors de les cel·les a les taules.

Taula 2.3: Nivells Jeràrquics Alfabetització Estadística (Watson & Calligham, 2003)

2.3.5 Raonament estadístic

L'alfabetització estadística inclou habilitats bàsiques i importants que es poden utilitzar per comprendre la informació estadística o els resultats de la investigació estadística.

Aquestes habilitats inclouen ser capaç d'organitzar dades, construir i mostrar taules i treballar amb diferents representacions de dades. L'alfabetització estadística també inclou la comprensió de conceptes, vocabulari i símbols, i inclou la comprensió de la probabilitat com a mesura d'incertesa. El raonament estadístic es pot definir com la manera com les persones raonen amb idees estadístiques i donen sentit a la informació estadística. Això implica fer interpretacions basades en conjunts de dades, representacions de dades o resums estadístics de dades.

El raonament estadístic pot implicar connectar un concepte amb un altre, per exemple, centralitat i variabilitat, o pot combinar idees sobre dades i atzar. Raonar significa comprendre i ser capaç d'explicar processos estadístics, així com de ser capaç d'interpretar completament els resultats estadístics (Ben-Zvi & Garfield, 2004). I, per tant, cal una comprensió de conceptes estadístics com ara la distribució, el centre, la variació, l'associació, la incertesa, l'aleatorietat i el mostreig (Garfield, 2002).

Hi ha molts estudis sobre raonaments estadístics erronis ja que les estadístiques sovint són mal enteses i utilitzades incorrectament tant per estudiants com per professionals: error de mitjanes, mostreig, sobre representacions, incertesa... entre d'altres (Garfield, 2002).

El raonament estadístic per a cada idea estadística es pot categoritzar per nivells d'assoliment, en general el raonament té la jerarquia que resumim en la taula 2.4.

Nivell		Descripció breu del nivell del raonament estadístic
Raonament sincràtic	idio-	L'estudiant coneix algunes paraules i símbols estadístics, els utilitza sense entendre-los completament, sovint de manera incorrecta, i pot barrejar-los amb informació no relacionada. Per exemple, els estudiants han après els termes mitjana, mediana i desviació estàndard com a mesures de resum, però els utilitzen de manera incorrecta (per exemple, comparant la mitjana amb la desviació estàndard o fent judicis sobre una bona mitjana o desviació estàndard)..
Raonament verbal		L'estudiant té una comprensió verbal d'alguns conceptes, però no pot aplicar-ho a la conducta real. Per exemple, l'estudiant pot seleccionar o proporcionar una definició correcta però no entén completament els conceptes (per exemple, per què la mitjana és més gran que la mediana en distribucions positivament esbiaixades).
Raonament transicional		L'estudiant és capaç d'identificar correctament una o dues dimensions d'un procés estadístic sense integrar completament aquestes dimensions, com ara, que una mida de mostra més gran condueix a un interval de confiança més estret, que un error estàndard més petit condueix a un interval de confiança més estret.
Raonament procedimental	procedi-	L'estudiant és capaç d'identificar correctament les dimensions d'un concepte o procés estadístic però no les integra completament ni entén el procés. Per exemple, l'estudiant sap que la correlació no implica causalitat, però no pot explicar completament per què.
Raonament de processos integrats		L'estudiant té una comprensió completa d'un procés estadístic, coordina les normes i el comportament. L'alumne pot explicar el procés amb les seves pròpies paraules. Per exemple, un estudiant pot explicar què significa un interval de confiança del 95% pel que fa al procés de mostreig repetit d'una població.

Taula 2.4: Nivells Jeràrquics Raonament Estadístic (Garfield, 2002)

Hi ha un total consens tant a la comunitat educativa i com a la societat en demanar el desenvolupament del raonament estadístic en els estudiants (Garfield, 2002). Però que, només centrant-nos en l'aprenentatge de fórmules o algorismes de càlcul no s'aconsegueix. Cal dissenyar les activitats específiques per ajudar a desenvolupar el raonament estadístic dels estudiants.

2.3.6 Pensament estadístic

El pensament estadístic implica comprendre com i per què es duen a terme les investigacions estadístiques i quines són les *grans idees* que sustenten les investigacions estadístiques. Aquestes idees inclouen la naturalesa omnipresent de la variació i quan i com utilitzar mètodes adequats d'anàlisi de dades, com ara resums numèrics i visualitzacions visuals de dades. El pensament estadístic també implica la comprensió de la naturalesa del mostreig, com es fan inferències en interpretar resultats obtinguts de mostres cap a resultats de les poblacions i per què calen experiments dissenyats per establir la causa que explica cada efecte identificat. Inclou una comprensió de com s'utilitzen els models per simular fenòmens aleatoris, com es produeixen les dades per estimar les probabilitats i com, quan i per què es poden utilitzar les eines inferencials existents per ajudar en un procés d'investigació. El pensament estadístic també inclou ser capaç d'entendre i utilitzar el context d'un problema per formar investigacions i extreure conclusions, i reconèixer i entendre tot el procés (des de la formulació de preguntes fins a la recollida de dades a l'elecció d'anàlisis a la prova de supòsits, etc.). Finalment, haver desenvolupat el pensament estadístic implica poder criticar i avaluar els resultats d'un estudi estadístic fet per altres (Ben-Zvi & Garfield, 2004; Dani & Joan, 2004).

Snee (1990, pàg. 118) va definir el pensament estadístic com "els processos de pensament, que reconeixen que la variació està al nostre voltant i present en tot el que fem, tot treball és una sèrie de processos interconnectats, i identificar, caracteritzar, quantificar, controlar i reduir la variació ofereix oportunitats de millora". Posteriorment, Moore (1997) va presentar una llista amb els cinc elements del pensament estadístic: la necessitat de dades, la importància de la producció de dades, l'omnipresència de la variabilitat i la mesura de la variabilitat.

Wild & Pfannkuch (1999) van fer estudis empírics a professionals de l'Estadística i estudiants d'Estadística i, després de les entrevistes centrades en el procés de raonament a l'hora de resoldre problemes estadístics, van crear un marc pel pensament estadístic, un marc que inclou quatre dimensions: el cicle d'investigació, els tipus de pensament, el cicle interrogatiu i les disposicions.

Cicle d'Investigació

La primera dimensió de la figura 2.3 tracta de com s'actua i el que es pensa durant el transcurs d'una investigació estadística. On Wild & Pfannkuch adapten el model PPDAC (Problem, Plan, Data, Analysis, Conclusions) de MacKay & Oldford (1994).

- *(Problem) Problema:* en aquesta fase inicial del cicle, l'investigador defineix el problema o objectiu de la recerca. Això implica que cal formular una pregunta específica que es respondrà gràcies a l'anàlisi estadística.
- *(Pla) Planificar:* en aquesta fase, es defineix el problema de la investigació, es formulen les hipòtesis, se selecciona la metodologia d'investigació i es desenvolupa el pla d'anàlisi de dades.
- *(Data) Dades:* en aquesta fase, es recopilen les dades necessàries per a la investigació. Això pot implicar el disseny i la implementació d'enquestes, experiments o la recopilació de dades secundàries de fonts existents.
- *(Analysis) Anàlisi:* fase on s'analitzen les dades recollides mitjançant els mètodes estadístics apropiats.
- *(Conclusions) Conclusions:* fase on s'interpreten els resultats obtinguts, es formulen les conclusions, sorgeixen noves idees i es comuniquen els resultats.

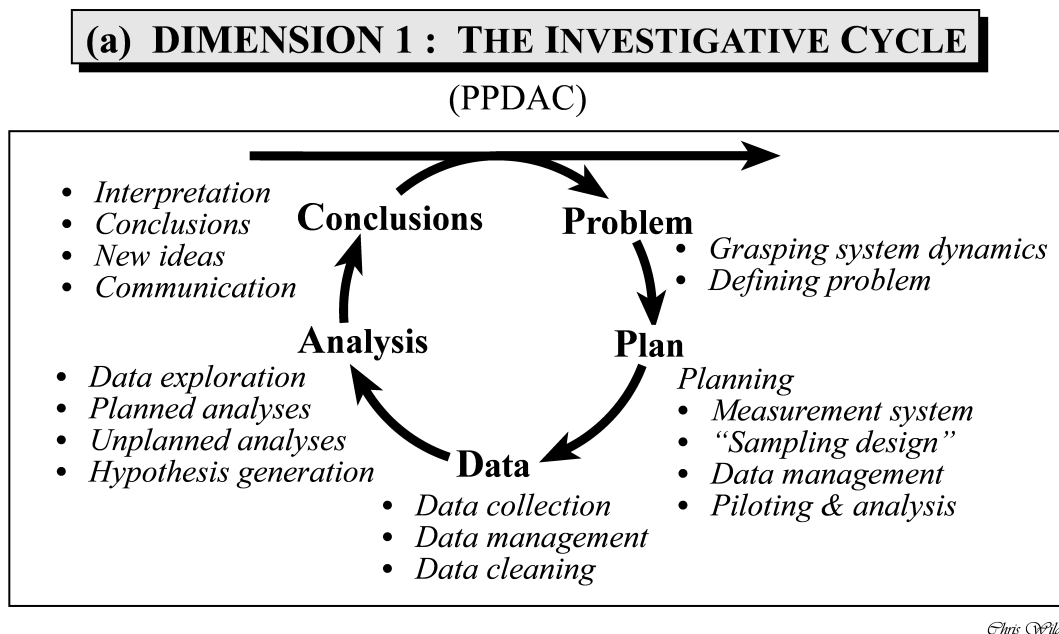


Figura 2.3: Cicle d'investigació PPDAC (Wild & Pfannkuch, 1999)

Tipus de Pensament

Wild i Pfannkuch (1999) especifiquen (Figura 2.4) que hi ha dos tipus de pensament implicat: el pensament general i el pensament fonamental (per al pensament estadístic).

(b) DIMENSION 2 : TYPES OF THINKING**GENERAL TYPES**

- **Strategic**
 - planning, anticipating problems
 - awareness of practical constraints
- **Seeking Explanations**
- **Modelling**
 - construction followed by use
- **Applying Techniques**
 - following precedents
 - recognition and use of archetypes
 - use of problem solving tools

TYPES FUNDAMENTAL TO STATISTICAL THINKING (Foundations)

- **Recognition of need for data**
- **Transnumeration**
 - (Changing representations to engender understanding)
 - capturing “measures” from real system
 - changing data representations
 - communicating messages in data
- **Consideration of variation**
 - noticing and acknowledging
 - measuring and modelling for the purposes of prediction, explanation, or control
 - explaining and dealing with
 - investigative strategies
- **Reasoning with statistical models**
 - aggregate-based reasoning
- **Integrating the statistical and contextual**
 - information, knowledge, conceptions

(Wild & Pfannkuch (1999))

Figura 2.4: Tipus de Pensament (Wild & Pfannkuch, 1999)

En el tipus de pensament general trobem:

1. Pensament Estratègic és el que ens permet decidir què fer i com fer-ho. Per tant, implica actes com planificar, dividir les tasques, temporitzar les tasques, preveure problemes i què fer per evitar-los, i ser conscients de les limitacions amb que es treballa i incloure-les en la planificació.
2. Cercant Explicacions. És important en la investigació estadística la predisposició fer-se preguntes i cercar respostes, sense obviar variables que poden estar implicades.

Amplia la capacitat d'anàlisi, ja que ens anima a fer preguntes, desafiar suposicions preconcebudes i buscar evidències per a les nostres idees. Això són habilitats essencials per a la ciència i per a la vida en general.

3. Construir i utilitzar models per entendre i predir. Els models són simplifications de la realitat. Però els models estadístics no són només models matemàtics, es construeixen models per interpretar la realitat i, aquesta realitat, alimenta el model. El model (Figura 2.5) inclou les concepcions estadístiques del problema que influeixen, el coneixement i l'experiència dels estadístics.

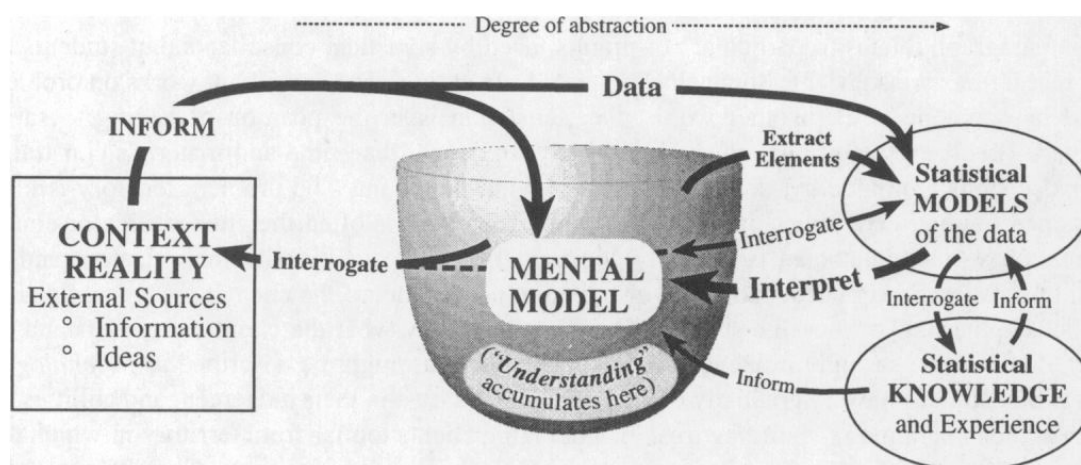


Figura 2.5: Modelling (Wild & Pfannkuch, 1999)

4. Aplicació de tècniques. A les matemàtiques sovint reutilitzem la manera de solucionar un problema en un altra problema. Tota la ciència estadística es basa en aquesta estratègia. Es creen prototipus de problemes amb mètodes per solucionar-los. Per poder utilitzar-los cal identificar el context, aplicar el mètode i interpretar els resultats (Figura 2.6)

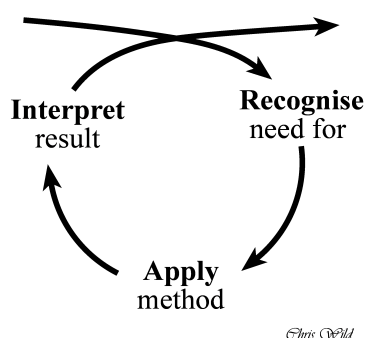


Figura 2.6: Tècniques (Wild & Pfannkuch, 1999)

I en el tipus de pensament específic pel pensament estadístic (Pfannkuch & Wild, 2004):

1. Reconèixer la necessitat de les dades. Les dades cal recollir-les correctament per a resoldre de manera fiable situacions reals.
2. Transnumeració. Es tracta de canviar les representacions per generar comprensió: “transformacions numèriques per facilitar la comprensió” (Wild & Pfannkuch, 1999).
3. Variació. Els efectes de la variació influeixen en el pensament a cada etapa del cicle d’investigació: nota la variació en una situació real i influeix en les estratègies adoptades en el disseny.
4. Conjunt de models distintius, propis de l’estadística. L’estadística aporta el seu propi conjunt distintiu de models o marcs per treballar. Com es descriu a Pfannkuch & Wild (2004) hi ha un diàleg entre les dades i els models estadístics permeten trobar patrons, i observar variacions sobre els patrons gràcies a la idea de distribució. També podem resumir les dades segons la seva naturalesa. Però no només es donen models a l’etapa de l’anàlisi del cicle d’investigació, també hi ha tipus de models basats en la idea de procés (Pfannkuch & Wild, 2004).
5. Coneixement del context. Les fons amb què treballa el pensament estadístic són el coneixement estadístic, el del context i la informació de les dades. I, per tant, cal dotar de context a les tasques utilitzades en l’ensenyament de l’estadística. (Wild & Pfannkuch, 1999), Cal aportar tots els pensaments rellevants sobre a la tasca, per després establir connexions entre el coneixement existent i els resultats de les anàlisis. Per això és important el treball en equip i l’aportació dels diferents coneixements de cada participant.

Cicle d’Interrogació

El cicle interrogatiu (Figura 2.7) és el procés que es dona constantment durant la resolució de tasques estadístiques. Wild & Pfannkuch (1999) en la seva investigació va observar en les transcripcions que els estudiants i professionals sembla que sempre estaven en un d’aquests estats durant el desenvolupament de la tasca. Òbviament, la representació de la figura 2.7 és ideal ja que es poden perdre o alterar l’ordre dels passos.

- Generar: com s’indica es tracta de generar tot de possibilitat tant individualment com en grup. Es pot aplicar en diversos àmbits: cerca de causes, explicacions i de mecanismes. Podem generar en totes les fases del cicle d’investigació, ja sigui cercant

informació, comprovant idees, planificar un nou enfocament. Es poden generar possibilitats a partir del context, de les dades i del coneixement. Es poden aplicar al problema actual o en altres investigacions a tall d'hipòtesi.

- Cerca: possiblement després de generar possibilitats s'inicia un cerca d'informació que pot ser interna o externa.
- Interpretar: fase necessària per a processar la informació. Per això cal una sèrie de passos: llegir/escollar, traduir, resumir internament, comparar i connectar. Sovint en els estudis s'observa com els estudiants fan una connexió i jutgen, en comptes de fer-ne diverses i passar a la fase de la crítica.
- Criticar: la fase crítica és un procés per avaluar la informació i les idees noves. Cal verificar la coherència interna; comparar amb punts de referència interns i externs, i fer una reflexió crítica argumentant una conclusió informada. L'objectiu final és determinar la fiabilitat, la rellevància i la utilitat de la informació abans d'acceptar-la.

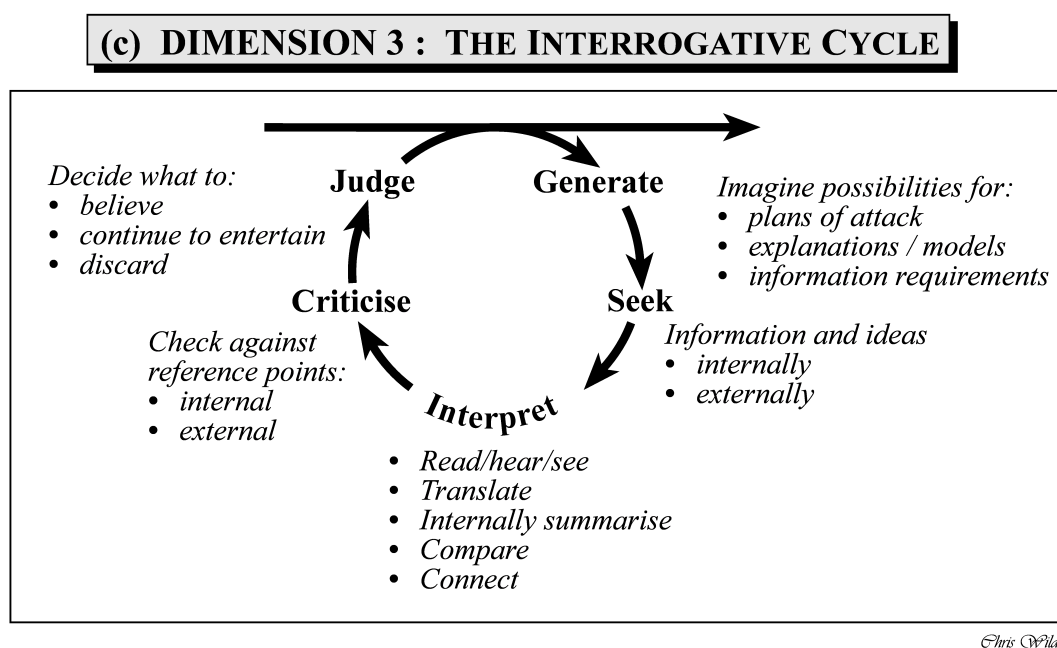


Figura 2.7: Cicle d'Interrogació (Wild & Pfannkuch, 1999)

Disposicions

Wild & Pfannkuch (1999) enumeren les següent disposicions (Figura 2.8) que són qualitats genèriques observades en els professionals i estudiants en el context de resolució de problemes estadístics.

- Escepticisme. Es tracta d'adoptar una actitud crítica durant tot el procés, preguntant-se constantment sobre la validesa del procés.
- Imaginació. La creació de models mentals que modelitzen el problema estadístic, trobar noves vies de solució i generar nous models basats en antics demana tenir un pensament creatiu i imaginatiu.
- Curiositat i Consciència. Wild & Pfannkuch (1999) es refereixen a conscient com a observadors. Així la capacitat d'observar juntament amb la curiositat es generen les preguntes que inicien, desenvolupen i validen el procés d'investigació.
- Obertura. Aquest pensament permet considerar diferents aportacions i informacions.
- Propensió a cercar un significat més profund. No només quedar-se amb el significat literal.
- Ser lògic. El raonament lògic és el que permet arribar a conclusions vàlides. L'escepticisme ha d'estar constantment contrastant l'argument lògic per tal de no arribar a falses conclusions.
- Compromís. Els professionals i estudiants desenvolupen una sensibilitat i consciència envers el problema.
- Perseverança. Té el mateix significat que en el llenguatge comú, no rendir-se davant les dificultats d'un problema, quan no puguem veure la sortida o no tenim més idees per atacar el problema.

(d) DIMENSION 4 : DISPOSITIONS

- **Scepticism**
- **Imagination**
- **Curiosity and awareness**
 - observant, noticing
- **Openness**
 - to ideas that challenge preconceptions
- **A propensity to seek deeper meaning**
- **Being Logical**
- **Engagement**
- **Perseverance**

Wild & Pfannkuch (1999)

Figura 2.8: Disposicions (Wild & Pfannkuch, 1999)

Capítol 3

Primer estudi: Complexitat de l'activitat de modelització (pilot)

En aquesta secció es presenta un estudi pilot de caire exploratori que va formar part del Treball de Final de Màster del Màster Universitari en Recerca en Educació i que es va publicar a Aymerich & Albarracín (2016). Aquest treball ens va permetre definir el tipus d'activitats a proposar als alumnes i ens va permetre prendre decisions de tipus teòric en el desenvolupament d'aquesta tesi. De fet, ens permet donar resposta al primer objectiu de recerca proposat en aquest document. El redactat de l'**OBJ1** és el següent:

- **OBJ1.** Caracteritzar l'activitat de resolució del treball d'estudiants de secundària en una activitat estadística contextualitzada sobre distribucions de dades en termes de modelització matemàtica.

El propòsit d'aquest pilot és estudiar el procés pel qual els alumnes a l'etapa de l'Educació Secundària Obligatòria (15-16 anys) creen models matemàtics durant la resolució d'una activitat relativa a l'àmbit estadístic. En concret, es pretén descriure des del punt de vista qualitatiu les diferents fases en el procés de modelització prenent com a referència teòrica el cicle de modelització de Blum & Leiss (2006). Referint-nos a la secció de marc teòric, recordem que els processos de modelització han estat descrits com a cíclics de forma general a la literatura i pretenem estudiar si aquest tipus de descripció és adequat per al tipus de treball matemàtic promogut en determinades tasques de modelització.

L'activitat utilitzada a l'estudi és un cas de *Model-Eliciting Activity* o activitat que promou la modelització (Lesh, 2010) i presenta un context realista per promoure la modelització matemàtica. En concret, consisteix a proporcionar als alumnes una certa

quantitat de dades numèriques que es corresponen amb distribucions dels salaris (sous mensuals) dels treballadors de diferents empreses. En aquest cas, l'ús de l'estadística ens ofereix l'oportunitat que els alumnes combinin diferents eines de càlcul i de tractament de dades per poder donar una resposta realista a les preguntes formulades. Així, l'activitat conjuga processos d'estadística i de modelització matemàtica, i és un fi en si mateix i un mitjà per a l'aprenentatge. L'objectiu específic d'aquest estudi és el punt de partida d'aquesta tesi doctoral i és el següent:

- Descriure el procés de modelització d'un dels grups de treball des de la perspectiva del cicle de modelització presentat per Blum & Leiss (2006).

3.1 Metodologia

En aquest primer estudi analitzem part de la feina a l'aula de 72 alumnes de 4t d'Educació Secundària Obligatòria durant el curs 2015-16 treballant amb una activitat dissenyada per promoure la modelització a partir de dades estadístiques. És un estudi exploratori basat en una anàlisi de tipus qualitatiu. Els alumnes, en grups de tres, no tenien experiència prèvia en activitats de modelització. Es proposa el treball en grup dels estudiants perquè ha de permetre la construcció de models matemàtics en col·laboració.

L'activitat proposada havia de ser capaç de promoure per ella sola que els alumnes creïn models complexos seguint les directrius proposades per (Lesh, 2010) en les anomenades *Model-Eliciting Activities*.

- Les *Model-Eliciting Activities* no s'han desenvolupat per ser tractaments d'instrucció el valor dels quals depèn de la seva capacitat per induir guanys significatius d'aprenentatge als estudiants.
- Els estudiants poden desenvolupar les seves pròpies adaptacions significatives de conceptes matemàtics en períodes de durant 60-90 minuts.
- Els estudiants que mostren més èxits en aquest tipus d'activitats no sempre són els mateixos que assoleixen les puntuacions més grans en les proves de coneixement matemàtic habituals.

L'activitat utilitzada es va elaborar a partir d'una activitat del web del projecte NRICH i se li van fer diverses modificacions per augmentar la seva autenticitat (Palm, 2008) tal com hem fet en altres activitats de modelització a partir de situacions realistes (Albarracín

& Gorgorió, 2014; 2020). Es proposa una contextualització de les distribucions de sous d'empreses seguint una idea exposada a Levitt & Dubner (2005), en què es proposa deduir el tipus d'empresa en funció de la distribució de sous dels seus treballadors. Els sous sobre els quals treballar són proporcionats als alumnes en una taula on cada columna mostra els sous referents als treballadors d'una empresa, com es mostra a la taula 3.1. L'enunciat concret de l'activitat utilitzada és el següent:

- A la taula següent trobem un llistat de sou de cinc empreses diferents: a. Analitzeu les dades de manera que us permetin obtenir una visió de l'estructura de cada empresa. Redacta les teves conclusions i quins mètodes has fet servir. b. Aquesta anàlisi ha de donar uns criteris per classificar-les. Classifica les empreses argumentant per què cadascuna compleix els criteris que has establert.

	E1	E2	E3	E4	E5
Treballador1	1032	1200	922	1900	1530
Treballador2	1045	1360	803	2200	1246
Treballador3	1103	1595	801	1428	2082
Treballador4	1043	1961	932	1241	1523
Treballador5	1172	1275	3814	1051	1545
Treballador6	1131	1333	3663	1393	1607
Treballador7	1027	1440	3595	1083	1612
Treballador8	2500	1270	3527	1228	1494
Treballador9	1143	2089	1327	1385	1420
Treballador10	1016	1875	1384	1193	1334
Treballador11	4200	1871	1816	1007	1146
Treballador12	1154	1209	1728	1498	1361
Treballador13	1113	1638	1982	1353	1498
Treballador14	1091	1976	1180	1468	1561
Treballador15	2453		1214	1031	1567
Treballador16	1006		1183	1086	1493
Treballador17	1083		1241	1134	1402
Treballador18	1186		1273	1037	1610
Treballador19	1109		1320	1459	1425
Treballador20	1183		1534	1482	1085
Treballador21	1172		1101	1250	1145
Treballador22	1037		1360	1053	1673

Treballador23	1149	1716	1215	1329
Treballador24	1150	1252	1347	1315
Treballador25	1166	1359	1073	910
Treballador26	5500	1930	1194	1386
Treballador27	1097	1544	1038	1546
Treballador28	1113	1881	1445	1331
Treballador29	1122	1354	1426	1515
Treballador30	1139	1518	1474	1387
Treballador31	1029	1299	1431	1626
Treballador32	812		1409	1183
Treballador33	2583		1497	1459
Treballador34	1073		1081	1349
Treballador35	1096		1468	1266
Treballador36	745		1470	1835
Treballador37	1163		1220	1642
Treballador38	1051		1417	1389
Treballador39	1018		1009	932
Treballador40	1090		1041	
Treballador41	1128		1348	
Treballador42	1161		1370	
Treballador43	1055		1460	
Treballador44	1123		1175	
Treballador45	1162		1358	
Treballador46	1007		1104	
Treballador47	1101		1188	
Treballador48	803		1113	
Treballador49	1134		1126	
Treballador50	1193		1484	

Taula 3.1: Taula de sous proporcionada a l'alumnat

Els alumnes treballen en equips de 3 o 4 persones, de manera que en total es van obtenir 22 enregistraments de l'àudio del treball realitzat per cada equip, així com els 22 informes finals amb les respostes elaborades. Atesa la naturalesa de l'anàlisi que presentem en aquesta secció, la quantitat de dades disponible és inabastable, però ens va permetre escollir el treball d'un equip, anomenat G1g05, per al qual era assequible transcriure totes les intervencions dels alumnes i que van presentar un informe final clar i complet

que es complementa amb les notes que van prendre durant la resolució del problema. Considerem que l'elecció de l'equip de treball analitzat no altera els aspectes essencials que pretenem analitzar, ja que la totalitat dels enregistraments i els informes mostren un desenvolupament matemàtic del mateix nivell de complexitat. La Fig.3.1 mostra un extracte del treball escrit dels integrants del grup G1g05, en què es pot observar una proposta de classificació dels empleats d'una empresa.

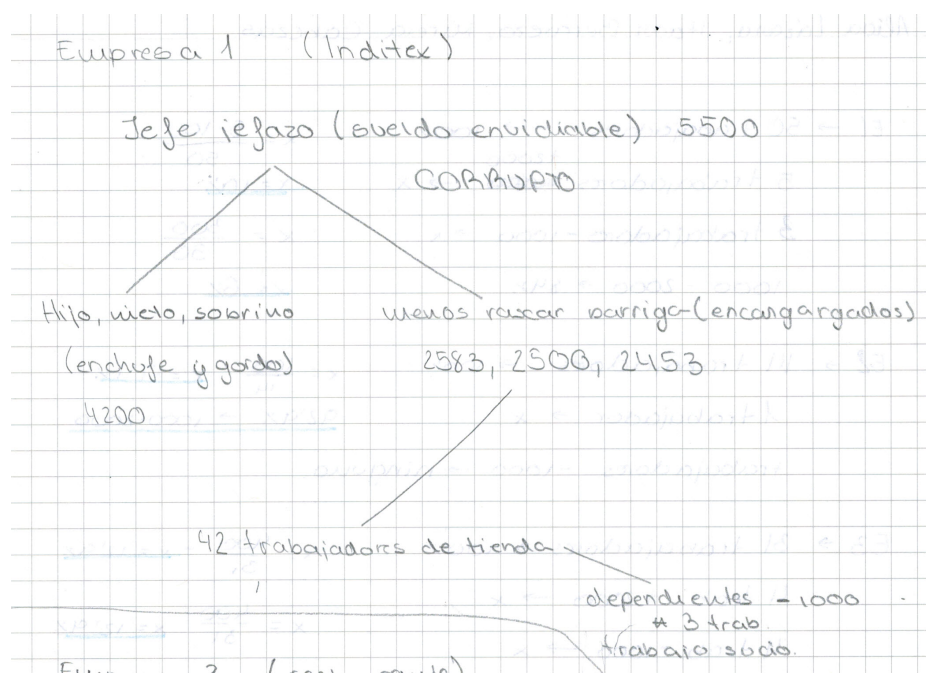


Figura 3.1: Un extracte del treball escrit pels alumnes del grup G1g05

Per a l'anàlisi de les dades, la gravació en àudio de la resolució de l'activitat del grup G1g05 es transcriu en un fitxer de text. A la transcripció s'adjunten aspectes rellevants del treball matemàtic identificats en els diferents materials escrits produïts pels alumnes. L'anàlisi del procés de modelització es realitza sobre aquesta concreció del que ha passat a l'aula, conscients de no poder accedir als pensaments i les decisions no formulades en veu alta o sobre el paper però amb una gran quantitat de material per analitzar.

L'anàlisi de l'activitat, que és de tipus qualitatiu, s'adreça a caracteritzar les dades des de la perspectiva de l'esquema de Blum & Leiss (2006) a partir de determinar les fases de modelització que travessen els alumnes en el treball d'aula. L'anàlisi es fa en diverses fases en què es distingeixen episodis a diferents nivells. Primerament, intentem distingir els episodis propis del treball en el context real dels episodis que se centren en el treball en el domini matemàtic. Posteriorment, descrivim les accions concretes que s'efectuen a cada episodi per tenir una descripció que permeti, en un darrer estadi, analitzar les dades

des de la perspectiva del cicle de modelització de Blum & Leiss (2006) determinant les fases de modelització de cada episodi. Els episodis es defineixen com a unitats temporals en què el centre de la discussió és un mateix objecte, matemàtic o no, i són distingits per separat pels dos autors i consensuats posteriorment.

A la primera fase de l'anàlisi apareixen dificultats per determinar de manera clara la distinció entre aquells episodis en què els alumnes treballen en la dimensió del món real i aquells episodis en què treballen en el domini matemàtic. Una mostra és el següent diàleg registrat entre els tres membres del grup G1g05, anomenats B, C i L:

B: Aquests són els sous.

C: D'acord.

L: Sí.

L: Cadascuna té un número.

C: Mira el treballador 26, eh!

L: ... les vaig dient totes [*es refereix a les empreses*] té...té diferent número de treballadors, no?

C: Doncs sí, i també diferents sous.

C: Què us sembla [*C llegeix enunciat de nou en veu alta, incidint en la demanda de classificació*]

B: Home. Els de mil anirien junts no?

L: Els superiors a mil, que n'hi ha pocs, però n'hi ha.

C: Els superiors i els menors... iguals o menys.

L: Menors de mil no n'hi ha.

BC: Sí, aquí, mira.

L: Ah! Sí aquí.

C: 803, 745.

B: 801... tots aquests.

C: 832. Els marco?

B: Millor ho fem amb diferents colors.

C: Aleshores posem els menors de mil i... però, llavors, els majors serien tots els altres.

L: És clar.

C: Però no n'hi ha cap de 1000.

L: No els de mil els deixem sense marcar. Els més grans de mil els marquem també.

C: Aleshores en anar mirant un a un observem els valors anòmals.

C: Aquest aquí, aquest,...

L: Buf, aquest no està gens malament tampoc.

C: Tampoc... aquest... el 33... aquí, tia! tots aquests: 3000, 3000, 3000 3000, uf!

C: Ja està no?

B: Ja està.

C: I els que van de 1000 a 2000?

En aquest extracte podem observar que els alumnes treballen amb els valors dels sous (elaborant la seva primera temptativa de classificació) mentre els comenten des del punt de vista de la seva pròpia experiència i el seu coneixement sobre els sous al seu entorn (*Buf, aquest no està gens malament tampoc*). En altres passatges identifiquen el sou més gran com el cap (*jefe*) o assignen professions a la resta dels valors i passen a denominar-los d'aquesta manera mentre els utilitzen en la seva classificació o treballen matemàticament amb ells. Aquest comportament denota que donen significat real al valors numèrics de la taula. Per aquest motiu, s'inclou una tercera dimensió que anomenem *Límit entre el món real i les matemàtiques* (LM a les Fig. 3.2, 3.3 i ??). Pertanyen a aquesta nova dimensió d'anàlisi aquells episodis en què els alumnes tracten amb les dades proporcionades i les utilitzen alhora com a objectes que defineixen treballadors i com a valors numèrics amb què poden realitzar càlculs o tractar-los des del punt de vista matemàtic. La inclusió d'aquest nou domini xoca amb la versió oferta per Blum & Leiss (2006) que es mostra a la Fig. ?? i que presenta allò que entenem com una visió massa simplificada del procés de modelització.

Una mostra del tipus d'intervencions que es poden englobar en aquest domini és la següent afirmació *"el cap té el doble de sou que el de la neteja"*. En aquesta afirmació l'alumne es refereix a un valor concret (el sou d'una persona que consideren el cap en tenir el sou més alt) tant com la identificació de la persona com un valor que permet fer comparacions numèriques. En aquest sentit, a causa de la naturalesa de les dades proporcionades, entenem que els alumnes se situen en un espai de treball que no podem ubicar específicament amb relació al món real o al domini matemàtic, i en què els dos dominis participen de l'elaboració dels continguts.

A partir d'aquesta primera codificació iniciem una segona etapa d'anàlisi on ens centrem

a identificar amb més precisió l'aspecte central de cadascun dels episodis de la resolució. Entenem que a cada episodi els alumnes treballen en un aspecte concret identificable del procés de modelització seguint el model proposat per Blum & Leiss (2006). L'anàlisi en aquesta etapa va necessitar diverses iteracions per donar sentit a la descripció obtinguda del treball dels alumnes. En concret, hem distingit les categories següents, que són les que es mostren a les figures 3.2, 3.3 i 3.4:

LE: Lectura de l'enunciat.

AA: Aclariments i discussió per entendre el problema.

SM: Model Situat.

RM: Model Real.

LM: Límit entre les matemàtiques i el món real.

MM: Model matemàtic.

La Fig.3.2 mostra una de les primeres temptatives d'elaborar un gràfic que descriu el procés de modelització dels alumnes. Es mostra un esquema en forma de graf orientat on es detalla el recorregut realitzat pels alumnes i on la numeració de cada fletxa permet observar l'ordre temporal de les accions. En aquesta primera proposta d'esquema observem dificultats per diferenciar els episodis en què els alumnes treballen amb models en el domini real, sigui considerant la situació real estudiada o desenvolupant un primer model situat a la realitat, ja que parteixen, en tot cas de la descripció numèrica donada. Aquestes dificultats segueixen la mateixa línia que les presentades per distingir entre el domini real i el domini matemàtic a l'etapa anterior.

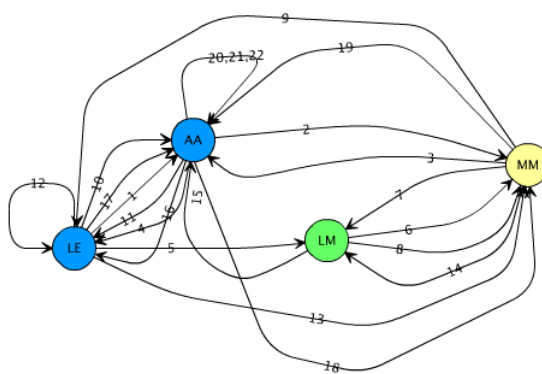


Figura 3.2: Primera aproximació gràfica a l'anàlisi. Es mostra un graf que representa el procés de modelització dels alumnes

La Fig. 3.3 mostra el producte final de l'anàlisi per a aquesta etapa. S'hi inclou una

diferenciació entre el model real i el model situat. Per això ens basem en la naturalesa dels comentaris dels alumnes, que de vegades discuteixen sobre el seu coneixement sobre empreses del món real, especialment en les fases finals, en què tracten de validar el seu model matemàtic i el contrasten amb el coneixement previ.

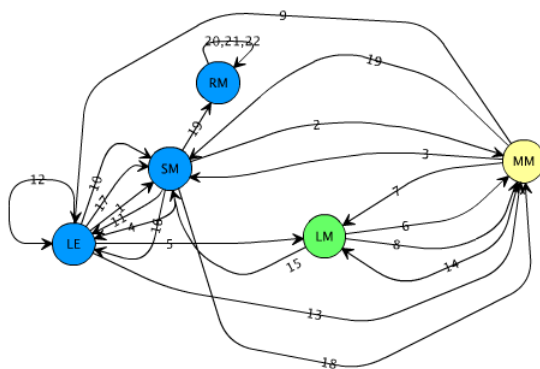


Figura 3.3: Segona aproximació gràfica per a l'anàlisi

A partir d'aquesta segona codificació que ja té una estructura temporal clara, iniciem una tercera etapa d'anàlisi en la qual ens centrem a identificar el tipus d'activitat matemàtica que els alumnes realitzen a cada episodi, seguint els indicadors de la proposta realitzada per Sol et al. (2011) per identificar les fases del cicle de Blum & Leiss (2006). A la taula 3.2 detallem la codificació realitzada per a cadascun dels 22 episodis en què hem dividit el treball dels alumnes.

Trajecte	Descripció	Fase del cicle
1	Discussió sobre els primers passos que cal seguir, identificació d'informació rellevant a partir de mirar les dades una per una.	Construint
2	Classificació dels treballadors en blocs, segons si el seu sou és més gran de 2000, menor de 1000 o entre els valors 1000 i 2000. La distinció es realitza amb colors sobre el foli i suposa un primer model matemàtic.	Treballant matemàticament
3	Revisen l'enunciat per determinar si la primera classificació s'ajusta als que els demana l'enunciat.	Construint
4	Nova lectura de l'enunciat i la discussió sobre el significat de les preguntes.	Construint
5	Observen que la necessitat de comparar empreses els obliga a establir com a criteris de distinció els valors màxim i mínim dels sous, discuteixen detalls de l'elaboració d'aquests criteris però no els estableixen.	Matematitzant Treballant matemàticament Interpretant
6	Observen la necessitat d'utilitzar la proporció de treballadors a cada classe (percentatges)	Treballant matemàticament
7	Càlcul dels percentatges sobre les dades originals, referint-se verbalment als valors dels sous com a treballadors	Treballant matemàticament Interpretant
8	Càlculs de percentatges i operacions simples sense contemplar el context.	Treballant matemàticament
9	Tornada a l'enunciat per comprovar que estan tractant de donar resposta a les preguntes formulades.	Interpretant
10	Discussió i aclariments sobre què cal fer. Moments de dubte sobre si han resolt el problema plantejat.	Construint
11	Relectura de l'enunciat i discussió que continua de 10.	Construint

12	Segona relectura consecutiva de l'enunciat mentre discuteixen si cal ampliar els elements de classificació i empreses que han considerat.	Construint
13	Consideren la possibilitat de comparar amb gràfics. Treballen a elaborar un gràfic de barres per a una de les empreses. Descarten aquesta via, de manera que no alteren els criadors desenvolupats fins ara.	Treballant matemàticament
14	Ampliació del model. Decideixen incloure en els criteris el nombre de treballadors (en empreses petites, mitjanes i grans) però no li assignen un criteri clar ni una formulació matemàtica, únicament és una consideració que no concreten, de manera que amplien el model situat però no el model matemàtic desenvolupat.	Interpretant
15	Validació del model a partir de comparar exemples d'empreses reals que coneixen i dels que infereixen les llistes de salaris. Observen dificultats per distingir algunes de les empreses que es plantegen.	Validant
16	Lectura nova de l'enunciat per introduir nous elements al model.	Construint
17	Discussió sobre els nous elements a considerar i la manera d'utilitzar-los. Decideixen modificar la classificació i treballar amb intervals de sous flexibles que s'adaptin a cada empresa.	Construint
18	Càlculs relacionats amb els intervals.	Treballant matemàticament
19	Discussió i acords sobre com explicar el procés per definir els intervals.	Construint
20	Utilitzen un exemple real per exemplificar el procés d'elaboració del criteri de classificació basat en intervals de sous.	Exposant

21	Explicació del mètode general de classificació (model definitiu).	Exposant
22	Ús del model per classificar les llistes de s sou donades a l'enunciat.	Exposant

Taula 3.2: Codificació final dels episodis 1

3.2 Resultats finals del procés d'anàlisi

D'aquesta manera obtenim una classificació dels episodis en relació amb la fase del cicle de modelització de Blum & Leiss (2006) al que corresponen. Per representar en un gràfic el procés seguit pels alumnes del grup, afegim un espai situat entre els dos dominis (real i matemàtic) que a la Fig.3.4 ve representat pel cercle verd. D'aquesta manera hem pogut identificar els aspectes principals del treball realitzat a cada moment del procés de modelització, però hem necessitat introduir un element nou que modifica la proposta original de Blum & Leiss (2006) per poder ubicar el domini en què els alumnes treballen. En concret, afegim un espai a cavall entre el domini real i el matemàtic a l'esquema de modelització (en verd a la Fig. 3.4)

El gràfic presentat a la Fig.3.4 té la llegenda de colors per a cada fase que es pot veure a la taula 3.3.

Taula 3.3: Llegenda de colors pel gràfic de la Fig. 3.4.

Construint	Blau fort
Matematitzant	Taronja
Treballant matemàticament	Groc
Interpretant	Blau clar.
Validant	Vermell
Exposant	Lila

El diagrama representat a la Fig.3.4 és el producte final de l'anàlisi realitzada i mostra dos aspectes importants que volem puntualitzar. D'una banda, mostra la necessitat d'afegir un domini situat entre la realitat i les matemàtiques, que cal resoldre des del punt de vista teòric. D'altra banda, el gràfic mostra l'evolució del treball dels alumnes durant l'activitat de manera que es poden observar una gran quantitat de preses de decisions i

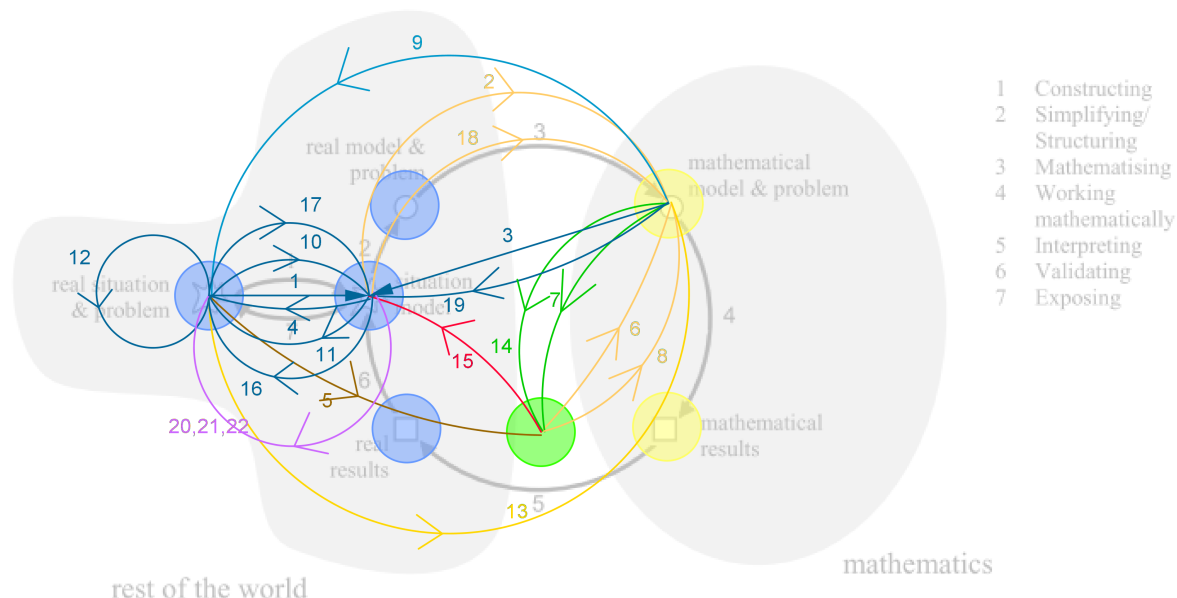


Figura 3.4: Procés de modelització analitzat definitiu.

replantejaments del camí a seguir, així com diferents tipus de treball matemàtic. És en aquest sentit que ens referim al títol de l'article a l'estudi de la complexitat del procés de modelització, que ha mostrat ser alta.

3.3 Síntesi de resultats de l'estudi pilot

En aquest capítol es presenta un estudi pilot per explorar l'anàlisi d'una activitat de modelització matemàtica basada a proporcionar dades estadístiques. Es comprova que els estudiants poden abordar la tasca i que ho fan des d'una perspectiva de modelització matemàtica. El procés que segueixen els alumnes és complex. Això queda clar en analitzar el desenvolupament de l'activitat a partir del cicle de modelització de Blum & Leiss (2006).

Per tant, els resultats d'aquest estudi tenen dues implicacions clares per a la resta del treball. En primer lloc, té sentit estudiar activitats que incloguin grans quantitats de dades estadístiques des del punt de vista de la modelització matemàtica, ja que és possible identificar l'activitat de modelització matemàtica en el treball dels alumnes. En segon lloc, el cicle de modelització de Blum & Leiss (2006) es postula com una eina d'anàlisi que presenta limitacions de representació per identificar els episodis concrets de l'activitat, ja que la separació entre el món real i el domini matemàtic suposen una dificultat en una

activitat com aquesta.

Capítol 4

Segon estudi: caracteritzant l'activitat modelitzadora en termes del Diagrama d'Activitat Modelitzadora

4.1 Introducció

L'estudi exploratori inicial presentat al capítol 3 ens permet observar que complexa pot arribar a ser l'activitat de resolució d'una tasca estadística per part d'estudiants de secundària des de la perspectiva de la modelització matemàtica. En el primer estudi utilitzem la representació tradicional del cicle de modelització de Blum & Leiss (2006) que ens permet caracteritzar el procés, però mostra limitacions a l'hora de clarificar allò que fan els estudiants. Clarament, l'activitat promou la modelització matemàtica, però el cicle de modelització generat no permet clarificar les decisions dels estudiants ni identificar fàcilment moments clau de l'activitat. El cicle generat es transforma en un esquema que sembla caòtic perquè els estudiants salten d'una fase a l'altra constantment.

Aquesta situació concorda amb la d'altres investigadors (Ärlebäck, 2009; Cai et al., 2014) quan afirmen que el cicle de modelització ofereix una bona descripció dels processos generals de l'activitat de modelització, però que no és una bona eina per a la recerca si ens centrem a caracteritzar l'activitat dels estudiants. L'estudi anterior també ens dona la clau per entendre com les activitats estadístiques poden diferir, en la seva resolució, de les matemàtiques (Cobb & Moore, 1997) i això, pot influir en les fases de modelització

matemàtica que observem. Així que a partir del que hem observat ens plantegem com caracteritzar l'activitat modelitzadora de l'alumnat participant quan treballa en activitats estadístiques contextualitzades de manera que puguem descriure i visualitzar de manera clara a què s'estan dedicant els alumnes, quan i què els fa canviar d'activitat. D'aquesta forma, en aquest capítol ens centrem a respondre al següent objectiu de recerca:

- **OBJ2.** Caracteritzar l'activitat dels estudiants de Secundària al generar models matemàtics per descriure el concepte de variabilitat en una activitat estadística contextualitzada.

Per aconseguir-ho, utilitzarem una eina d'anàlisi anomenada Modelling Activity Diagrams (MAD) que se centra a descriure l'activitat desenvolupada en cada moment de la resolució de la tasca. Aquest tipus d'anàlisi ja ha mostrat la seva efectivitat en diversos tipus d'activitats de modelització (Aymerich & Albarracín, 2022; Ärlebäck, 2009; Czocher, 2016; Pla-Castells et al., 2021) i en aquest estudi ens ha de permetre identificar què fan els alumnes quan desenvolupen el seu model matemàtic. Cal destacar que per a aquest estudi utilitzem una activitat centrada en la variabilitat de dades contextualitzada en l'avaluació del valor d'impostos a partir de dades reals, amb el que el context real està present en el disseny de l'activitat.

4.2 Participants i dades recollides

Les dades d'aquesta activitat pertanyen a dos anys acadèmics diferents (18-19 i 20-21). La raó és que un cop transcrits tots els àudios de la primera recollida de dades només va ser viables quatre dels deu grups. Les dades dels grups descartats tenen fragments inintel·ligibles o no hem aconseguit recuperar la totalitat dels documents necessaris. Tanmateix, en la segona recollida van ser viables set grups dels deu participants en aquest cas. Donat que pretenem caracteritzar tota l'activitat generada pels alumnes en un context real d'aula la recollida de dades és complexa i depèn de la col·laboració dels mateixos alumnes. Tanmateix considerem que la pèrdua d'aquest material no esbiaixa els resultats, ja que en molts casos les dificultats per assegurar els enregistraments són tècniques. Per tant, després d'aquestes dues experiències tenim el material d'onze grups.

L'alumnat participant en aquest estudi pertany a una escola concertada d'una ciutat de l'àrea metropolitana de Barcelona. En la primera recollida (curs 18-19) participen 30 estudiants de 4t d'ESO (15-16 anys) que treballen en grups de tres persones en sessions de seixanta minuts. La recollida de dades es fa entre l'alumnat que cursava la matèria

optativa d'Economia. El treball es desenvolupa en diverses sessions, en funció de les necessitats de cada grup. Totes les discussions dins del grup es graven en àudio i es recullen els materials elaborats durant l'activitat, tant si són documents escrits, fulls de càlcul o documents elaborats amb l'ordinador. En la segona recollida (curs 20-21) també participen estudiants de 4t d'ESO (15-16 anys) en grups de tres persones. La diferència és que durant el desenvolupament de la classe es deixen només 10 minuts aproximadament per treballar en l'activitat. Treballen a l'hora tres grups i, d'aquesta manera, la professora pot fer el seguiment i comprovar que es duen a terme correctament les gravacions. Poden fer servir totes les sessions que desitgin, però restringides a deu minuts de treball.

Taula 4.1: Enregistraments

Grup	Enregistraments	Temps
Grup 1	Audio 1 (eco)	11:06
	Audio 2 (eco)	10:57
	Audio 3 (eco)	10:03
	Audio 4 (eco)	9:02
	Audio 5 (eco)	8:43
	Audio 6 (eco)	12:26
	Audio 7 (eco)	7:34
	Audio 8 (eco)	7:51
	Audio 9 (eco)	9:51
	Audio 10 (eco)	11:34
Grup 2	dia 1 (1)	14:19
	dia 1	8:13
	dia 2	2:36
	dia 2 (1)	4:03
	dia 2 (2)	6:02
	dia 2 (3)	9:07
	dia 3	0:52
	dia 3 (1)	5:14
Grup 3	OE65E94-FB5E-4B21-996C-5C2971O425B9	20:09
Grup 4	Audio 1 16-1	9:15
	Audio 2 16-1	6:25
	Audio 1 15-1	4:25
	Audio 2 15-1	12:05
	Audio 3 15-1	5:53

Team01	21-10-2020	05:33
	21-10-2020	05:25
	28-10-2020	11:03
	04-11-2020	11:24
	12-11-2020	14:08
	18-11-2020	12:34
	25-11-2020	13:34
	03-12-2020	11:44
Team02	21-10-2020	09:50
	28-10-2020	12:51
	04-11-2020	09:24
	12-11-2020	10:20
	18-11-2020	10:31
	25-11-2020	12:20
	03-12-2020	12:25
	12-1-2021	13:51
Team03	4-2-2021	17:43
	21-10-2020	08:42
	28-10-2020	07:10
	05-11-2020	09:59
	12-11-2020	10:02
	19-11-2020	11:17
Team04	25-11-2020	10:09
	27-10-2020	10:19
	29-10-2020	10:15
	05-11-2020	11:11
	10-11-2020	10:01
	12-11-2020	10:00
	19-11-2020	09:54
	25-11-2020	10:00
	13-01-2021	14:58
	03-02-2021	07:55

Team05	27-10-2020	16:54
	29-10-2020	13:33
	10-11-2020	11:20
	12-11-2020	23:33
	19-11-2020	16:33
	25-11-2020	08:03
	13-01-2021	02:05
	13-01-2021 (2)	24:52
Team09	29-10-2020	23:18
	04-11-2020	10:53
	11-11-2020	12:15
	18-11-2020	22:58
	2021	26:09
Team10	28-10-2020	08:09
	4-11-2020	10:10
	11-11-2020	09:02

La tipologia de l'alumnat que cursa la matèria d'Economia en aquesta escola, per motius d'infraestructura, són alumnes interessats a seguir estudis superiors (universitaris) de l'àrea socioeconòmica continuar o continuar amb estudis de cicles formatius de grau mitjà. Hi ha una gran varietat d'interessos i nivells d'assoliment educatiu. Una altra característica important d'aquest alumnat és que no han treballat activitats de modelització matemàtica formalment i no estan familiaritzats amb el cicle de modelització matemàtica. Respecte a la matèria d'estadística a l'escola, els continguts s'ofereixen a primer de l'ESO i a tercer de l'ESO. A primer de l'ESO es fa una introducció a l'organització de les dades en taules i s'utilitzen per al càlcul de paràmetres de centre que ja coneixen de primària: mitjana, mediana i moda. Les representacions gràfiques utilitzades són el diagrama de barra i de sectors, ja que, encara que s'expliquen les variables quantitatives contínues, només es treballa amb variable qualitativa i quantitativa discreta. A tercer de l'ESO s'introdueix la variable contínua, representacions gràfiques: histogrames i Box-Plots, i els paràmetres de posició i dispersió habituals. La metodologia emprada inclou la part teòrica i exercicis descontextualitzats, i un projecte on han d'elaborar un informe estadístic. No es treballa d'acord amb el cicle d'investigació de Wild i Pfannkuch (1999), ni l'objectiu explícit és desenvolupant el pensament estadístic en l'alumnat. Això sí, es proposen unes fases del procés d'elaboració d'un informe estadístic: escollir objectius d'estudi, recollir dades, fer els càlculs necessaris, mostrar els resultats i elaborar conclusions. Es posen com a exemple

informes estadístics publicats en bases de dades institucionals. Però els grups estudiats no van fer el projecte estadístic. El primer grup perquè encara no s'havia implementat com part de la unitat didàctica i només es desenvolupava la part teòrica i d'exercicis sense context o amb un context simple. El segon grup va patir el confinament pel COVID-19. I, de nou, es va realitzar la part teòrica i la part pràctica sense activitats amb context.

4.3 Activitat proposada a l'alumnat

L'activitat utilitzada per a aquest estudi tracta sobre la variabilitat de l'Impost de Circulació a Espanya. Aquest és un impost municipal i varia en funció de les necessitats i característiques socioeconòmiques de cada municipi. A l'alumnat oferim una notícia d'actualitat on es denuncia la diferència que pot haver-hi entre municipis, municipis que es poden trobar geogràficament molt propers. Això fa que molts propietaris registrin el seu vehicle en altres municipis, desvirtuant així l'objectiu primer d'aquest impost, recaptar diners per a la millora del municipi. En aquesta notícia apareix una taula resum 4.1 de les capitals de província on es mostren els imports dels impostos d'automòbils i motocicletes.

TARIFAS IMPUESTO DE CIRCULACIÓN 2018											
PROVINCIA	TURISMOS (CVF)					CICLO	MOTOCICLETAS (C.C)				
	De menos de 8	De 8 a 11,99	De 12 a 15,99	Más de 16 a 19,99	Más de 20		Hasta 125	125 a 250	250 a 500	500 a 1.000	Más de 1.000
A CORUÑA	18,95	60,80	128,35	179,20	224,00	6,65	6,65	13,50	27,00	60,60	121,15
ALBACETE	23,98	64,75	136,69	173,84	217,28	7,87	7,87	13,47	26,97	53,92	107,83
ALICANTE	22,28	60,47	128,37	162,32	204,75	7,43	8,49	13,79	27,58	55,17	111,39
ALMERÍA	23,12	62,41	131,78	164,16	205,11	8,10	8,10	13,88	27,74	55,46	110,88
ÁVILA	20,69	57,93	124,45	163,09	200,48	8,08	8,13	14,53	29,54	60,58	119,34
BADAJOS	19,85	53,61	113,16	140,96	176,18	6,95	6,95	11,91	23,83	47,65	95,29
BARCELONA	23,47	64,06	136,69	172,05	217,28	8,39	8,39	14,38	28,78	58,16	117,53
BILBAO	25,08	67,92	(*)	268,32	343,20	10,08	10,08	17,88	37,08	74,88	155,04
BURGOS	23,19	62,62	132,20	164,66	205,80	8,13	8,13	13,91	27,84	55,66	111,32
CÁCERES	17,00	50,00	100,00	125,00	140,00	8,00	8,50	11,00	23,00	43,00	84,00
CÁDIZ	24,90	67,25	142,00	177,05	220,90	8,80	8,80	14,85	29,90	59,85	119,60
CASTELLÓN	24,99	67,48	142,44	177,43	221,78	8,75	8,75	14,99	30,00	59,97	119,95
CEUTA	12,60	34,10	71,95	89,80	112,00	4,40	4,40	7,55	15,15	30,30	60,60
CIUDAD REAL	25,24	68,16	143,88	179,22	224,00	8,84	8,84	15,14	30,30	60,58	121,16
CÓRDOBA	24,22	65,40	143,88	179,22	224,00	8,57	8,57	14,69	29,39	58,76	117,53
CUENCA	22,09	59,64	125,89	179,22	224,00	7,74	7,74	13,25	26,51	53,01	106,01
GIJÓN	25,24	67,24	142,40	178,00	224,00	8,84	8,84	15,04	30,20	60,24	121,16
GRANADA	25,24	68,16	143,88	179,22	224,00	7,86	8,84	14,31	29,39	60,58	121,16
GUADALAJARA	23,99	64,80	136,77	170,36	212,93	8,40	8,40	14,40	28,80	57,58	115,18
HUELVA	25,24	68,16	143,88	179,22	224,00	8,84	8,84	15,14	30,30	60,58	121,16
HUESCA	23,98	64,75	136,69	170,26	212,80	8,84	8,84	15,14	30,30	60,58	121,16
JAÉN	17,67	51,12	114,38	152,34	224,00	6,19	6,63	12,11	25,76	54,52	121,16
LAS PALMAS	20,95	56,57	119,42	148,75	185,92	4,42	4,42	7,57	25,15	50,28	100,56
LEÓN	20,95	58,50	128,95	167,50	209,40	8,65	8,64	15,14	30,30	58,50	121,16
LOGROÑO	21,41	57,81	122,02	151,99	189,97	7,50	7,50	12,84	25,70	51,38	102,75
LUGO	21,72	59,32	123,72	154,72	224,00	7,32	7,32	14,12	28,80	52,32	104,16
LLEIDA	25,24	68,15	143,88	179,22	224,00	8,83	8,83	15,15	30,29	60,58	121,16
MADRID	20,00	59,00	129,00	179,00	224,00	7,00	7,00	12,00	27,00	60,00	121,00
MÁLAGA	24,35	65,80	138,90	173,05	216,25	8,55	8,55	14,60	29,25	58,50	117,00
MELILLA	6,31	17,04	35,97	44,81	56,00	2,21	2,21	3,79	7,57	15,15	30,29
MURCIA	22,30	64,10	134,95	173,85	216,90	7,65	7,65	12,05	30,30	60,15	119,95
OURENSE	21,35	57,80	127,35	174,50	218,10	7,45	7,45	13,30	26,70	53,45	107,15
OVIEDO	23,00	64,00	141,00	179,22	224,00	8,00	8,00	15,00	30,15	60,58	121,16
PALENCIA	18,04	50,53	117,37	167,05	206,97	6,73	6,87	12,16	26,20	53,50	116,49
P. MALLORCA	23,61	68,16	143,88	179,22	224,00	8,84	8,84	15,14	30,30	60,58	121,16
PAMPLONA	20,02	56,30	120,09	150,17	—	5,04	7,57	12,55	24,74	49,51	99,01
PONTEVEDRA	20,29	55,85	118,50	151,25	190,86	7,09	7,09	12,42	25,31	51,13	103,24
SALAMANCA	25,12	67,76	143,88	179,22	224,00	8,73	8,73	15,06	30,06	60,19	120,38
S. SEBASTIÁN	(*)	(*)	(*)	278,50	351,06	9,14	18,22	37,47	77,38	160,37	—
S.C. TENERIFE	16,72	46,86	96,75	128,59	162,40	6,03	6,03	10,33	20,67	41,34	82,69
SANTANDER	25,16	67,96	143,45	178,68	223,33	8,81	8,81	15,09	30,21	60,40	120,80
SEGOVIA	24,32	65,88	141,04	177,72	224,00	8,84	8,84	15,14	29,64	60,04	121,16
SEVILLA	22,33	61,78	132,99	179,22	224,00	5,99	5,99	13,83	28,33	60,58	121,16
SORIA	21,13	57,07	120,48	150,08	187,57	7,40	7,40	12,68	25,38	50,73	101,46
TARRAGONA	25,24	68,16	143,88	179,22	224,00	7,12	8,84	15,14	30,30	60,58	121,16
TERUEL	25,24	68,16	143,88	179,20	224,00	8,84	8,84	15,14	30,30	60,58	121,16
TOLEDO	23,38	63,15	133,30	178,50	223,10	8,19	8,19	14,03	28,07	60,34	120,68
VALENCIA	21,20	58,87	128,05	167,27	219,01	7,38	7,68	13,44	27,69	58,11	121,16
VALLADOLID	25,24	68,16	143,88	179,22	224,00	8,84	8,84	15,14	30,30	60,58	121,16
VITORIA	27,21	72,91	162,03	216,19	355,80	10,65	10,76	18,76	39,28	83,01	170,62
ZAMORA	12,62	45,67	120,86	150,54	188,16	5,70	5,70	9,77	19,54	39,07	78,15
ZARAGOZA	22,50	62,30	137,30	179,20	224,00	8,80	8,80	15,14	30,29	60,58	121,16

Figura 4.1: Taula proporcionada per l'article dins del material per l'alumnat.

Els autors de l'article que es proporciona als estudiants utilitzen dades d'aquesta taula per exemplificar les diferències òbvies entre un municipi i un altre, sobretot escullen exemples de municipis propers per fer aquesta comparació. Paral·lelament, a l'alumnat se li proporciona un full de càlcul amb tots els valors dels impostos desglossats per municipis publicat per Hisenda. En aquest document apareixen els municipis a càrrec del municipi, la província a què pertany i la població que té. Respecte a l'impost de Vehicles de Tracció Mecànica tenim la informació sobre turismes, tractors, camions, remolcs, ciclomotors, autobusos i motocicletes. A més ofereix altres informacions sobre els municipi com són: l'Impost de Béns i Immobles (IBI); l'Impost sobre Activitats Econòmiques (IAE); l'Impost sobre l'Increment del Valor dels Terrenys de Naturalesa Urbana (IIVTNU), i l'Impost sobre Construccions, Instal·lacions i Obres (ICID) Finalment, es proporciona un enunciat amb la descripció detallada de la tasca que es vol dur a terme 4.2.

L'article deixar clar que cada Ajuntament decideix quin és el valor de l'Impost i que l'Estat només dicta quins són els automòbils que n'estan exempts.

a) A l'article diuen que dins de la mateixa comunitat i, fins i tot, la mateixa província les diferències són evidents. Quines províncies són més justes i, per tant, el fet de matricular en una població o en una altra no suposa un greuge comparatiu pels propietaris dels vehicles.

b) Hisenda us demana un informe per avaluar aquesta situació i decidir si l'Estat ha d'intervenir. Ha d'incloure un recull de propostes que valorin diferents solucions.

Taula 4.2: Enunciat proporcionat a l'alumnat

Així s'observa que aquesta tasca es divideix en dues fases. Una primera fase on es planteja el problema i es demana a l'alumnat un model per tal de donar resposta a les preguntes plantejades. La segona fase demana que treballin d'acord amb les dades i, respectant les decisions preses, generin resultats redactant un informe per avaluar la situació, proposant solucions possibles per minimitzar les desigualtats identificades.

4.3.1 Justificació de l'activitat

La notícia dona una opinió sobre una situació real. Aquesta opinió està basada en exemples concrets que extreu del text i d'una noció de justícia equivalent a uniformitat. La idea inicial és que els estudiants quantifiquessin clarament la diferència que, de manera tan alarmant, denunciava la notícia, utilitzant eines estadístiques. Els mètodes diversos per fer aquests càlculs poden donar diferents resultats d'aquesta suposada diferència. Un altre vessant del treball seria identificar si, una vegada quantificada la diferència, aquesta diferència és justa. Aquí pot haver-hi diverses opinions. Podien argumentar que la diferència és gran, però és justa perquè serveix per sufragar despeses relacionades amb el municipi i relacionar-lo amb el concepte d'equitat. O es podria argumentar, si la diferència era considerada gran, que s'havien d'establir unes limitacions per tal que tot ciutadà pogués sostenir el seu cost i/o evitar que es matriculessin en altres municipis. Si no observen diferències aparents també es poden emetre diferents judicis emmarcats en el concepte de justícia que prèviament hagin definit.

La modelització matemàtica és un procés de resolució de problemes contextualitzats en què s'elabora un model matemàtic per descriure el fenomen real estudiat. Lesh i Harel (2003) ofereixen una definició dels models matemàtics que genera l'alumnat com a sistemes conceptuals complexos que descriuen aquests sistemes. Els autors defensen que els models

estan formats per:

- Un conjunt de conceptes per descriure o explicar els objectes matemàtics rellevants del fenomen estudiat, així com relacions, accions, patrons i regularitats que s'atribueixen a la situació de resolució de problemes.
- Els procediments que els acompanyen per generar construccions útils, manipulacions o prediccions per aconseguir els objectius clarament reconeguts.

Aquest sistema que conforma el model pot ser expressat de diferents maneres, ja sigui a partir de relacions algebraiques, símbols escrits, gràfics o esquemes, llenguatge naturals o metàfores basades en l'experiència.

Recordem que en aquest treball considerem una perspectiva teòrica per interpretar les activitats de modelització matemàtica denominada Models i Modelització (M&M), on el procés de modelització inclou múltiples cicles d'interpretacions, descripcions, conjectures, explicacions i justificacions que es redefeixen i construeixen iterativament a través de la interacció entre els estudiants (Doerr & English, 2003). Els problemes o projectes contextualitzats en el món real i amb unes certes característiques es converteixen en Activitats Promotores de la Modelització (MEAs, de les seves inicials en anglès, Model-Eliciting Activities). Les MEAs com s'ha explicat se centren tant en el procés de modelització com en el model matemàtic resultant. Lesh et al. (1997) caracteritzen les MEAs com aquells problemes basats en la vida real que, quan es resolen, es construeix un model que representa el món real presentat a la tasca i que descriu el comportament del sistema. Així doncs, la tasca ha de permetre als estudiants establir els criteris que els ajudin a decidir quina és la solució adient entre un conjunt de diferents d'alternatives.

En general, es proposa una MEA a petits grups de treball (Zawojewski et al., 2003). Aquesta tasca, a la qual s'enfronten, planteja una situació prou significativa i rellevant per a ells. Per això, necessiten crear, ampliar i millorar les seves pròpies construccions matemàtiques, d'aquí la paraula promotores. Una vegada obtingut el model, després de passar per diferents seqüències de cicles d'interpretació i desenvolupament de les dades, objectius i processos, els estudiants poden determinar si aquest model pot compartir-se, traslladar-se, modificar-se fàcilment i ser reutilitzable en altres situacions.

El disseny d'aquestes activitats s'ha de basar en els principis de Lesh et al. (2000). Per tant, descriurem els principis indicant com la nostra activitat els verifica.

Principi de Realitat: Respon a la pregunta si el problema respon a una situació que pot ocórrer a la vida real. És un principi que activa en els estudiants experiències

i coneixements personals. Els estudiants han de testar i confrontar idees per trobar la solució. La nostra tasca està basada en un fet real, en diversos mitjans de comunicació apareix aquesta notícia periòdicament. Per una altra banda, encara que els estudiants són joves, estan familiaritzats amb tributs i impostos. No només de manera acadèmica, ja que l'alumnat era de la matèria d'Economia (cal posar referència al currículum?), sinó a escala personal i familiar (poso fragment d'alguna gravació). L'edat escollida, 15-16 anys implica que molts ja estan disposats a treure's els carnets de conduir i començar a fer treballs esporàdics.

Principi de Construcció: La tasca ha de crear la necessitat de construir un model, modificar-lo, estendre'l o refinar-lo. Tots els grups resolen la tasca amb un model més o menys eficient. És cert que alguns models no canvien des del principi, però sí que discuteixen durant el procés si s'ha de modificar.

Principi d'Autoavaluació: Ha d'haver-hi uns criteris clars per a l'avaluació de les diverses solucions alternatives. Els estudiants han de poder jutjar per si mateixos si les solucions donades són bastant bones i els resultats són els que necessiten. En la notícia de referència es donen diversos exemples que poden servir per començar el procés i, alhora, per avaluar-lo. Tanmateix, el fet de proposar un informe final, els fa reflexionar sobre la idoneïtat de la solució donada.

Principi de Documentació: Els estudiants han de fer explícit el que pensen sobre la situació, i el tipus de sistemes (objectes matemàtics, relacions, operacions, patrons, regularitats) en els quals han pensat. Tant de manera oral com de manera escrita es donen indicacions perquè justifiquin les seves respostes i el procés que han fet per arribar a la solució proposada.

Principi de Generalització del model: El model es construeix per poder ser adaptat o aplicat en altres situacions. No es fa explícit a la tasca el fet que es faci una altra activitat on es pugui aplicar el model, donat que es tractava d'un estudi per a realitzar la tesi. L'ídoni és fer altres activitats on el concepte de variabilitat intervingui i calgui quantificar la variabilitat. Ens queda l'informe final on havien de reflexionar i lligar el model amb la tasca. Com a proposta d'activitat estan totes aquelles relacionades amb les notes de les proves d'Accés a la Universitat, ja que sempre hi ha la polèmica de la diferència entre comunitats i facultats.

Principi del Prototipus: La tasca posa a l'estudiant en una situació tan senzilla com sigui possible per a crear la necessitat d'un model significatiu, però també proveeix a l'estudiant d'un prototip útil (o metàfora) per a interpretar situacions similars. La tasca

proposada té un enunciat simple i, tanmateix, deixa clar que es tracta de quantificar l'aparent diferència que trobem en grans quantitats de dades i que el model han de servir que poder resumir i contrastar les dades donades.

4.3.2 Justificació del canvi d'activitat

L'activitat d'estudi exploratori es basava en una tasca de la web NRICH ("Which List is Which?") que presentava diverses llistes numèriques. Algunes corresponien a pesos i d'altres a temperatures, compartint totes elles la mateixa mitjana. L'aspecte diferenciador era la dispersió de les dades, mesurable per diversos mètodes. L'objectiu era evidenciar la importància de la dispersió en un conjunt de dades com a indicador crucial en la caracterització d'una distribució estadística.

En l'estudi exploratori, es va modificar el context i les dades, substituint pesos i temperatures per salaris en diferents sucursals d'una empresa. L'objectiu era identificar quina o quines sucursals presentaven una estructura salarial divergent de la imposada per la seu central. Tot i que les mitjanes eren similars, la dispersió era l'element distintiu entre les llistes. A més, es va introduir una nova estructura amb una distribució normal en una de les llistes de salaris. Cal destacar que, si bé els salaris es basaven en taules salarials del sector, no eren dades reals.

Seguint les recomanacions per a l'elaboració de MEAs (Lesh et al., 2000), el segon estudi va buscar un context amb dades reals. Es va identificar l'Impost de Circulació com a tema d'interès, ja que les seves suposades diferències per municipi generen debat. Aquesta elecció va permetre l'accés a un gran volum de dades de qualitat, amb la possibilitat d'utilitzar altres valors del full de càlcul i treballar amb les seves funcions. L'objectiu era comparar les distribucions dels impostos per províncies. En resum, les dues activitats comparteixen un rerefons comú: l'anàlisi de la dispersió en conjunts de dades.

4.4 Anàlisi: Diagrames d'Activitat Modelitzadora

La forma en què els estudiants elaboren els models matemàtics durant la resolució de problemes, per descriure els fenòmens o realitzar prediccions és objecte de discussió dins del món acadèmic i existeixen diferents posicions teòriques (Borromeo Ferri, 2006). En general, està acceptat a la literatura que els processos de modelització matemàtica són cíclics (tots aquests s'han de posar Blum & Leib, 2006; Carreira, Amado & Lecoq, 2011; Doerr & English, 2003; Galbraith & Stillman 2006; Greefrath, 2011; Kaiser & Stender,

2013).

Existeixen diverses maneres de concretar l'estructura del procés de modelització. Com s'ha explicat al marc teòric general es pot dividir en diferents fases que l'alumnat recórrer, però el cicle no és lineal. Davant de la necessitat de descriure aquests processos que duen a terme l'alumnat, Ärlebäck (2009) proposa l'ús de Diagrames de l'Activitat Modelitzadora (DAM). Aquests diagrames estan basats en els protocols de codificació de Schoenfeld (1985) per descripció del procés de la resolució de problemes matemàtics.

Es defineix un DAM com un gràfic bidimensional que representa l'activitat executada per l'alumnat durant un interval de temps. En el seu origen, Schoenfeld (1985) Considera les activitats de resolució de problemes matemàtics i, per tant, les categories en l'eix d'ordenades són: llegir l'enunciat, explorar les vies de resolució, implementar el pla d'acció o verificar la solució donada. Ärlebäck (2009) modifica aquestes categories per ajustar-les al procés de modelització de les activitats proposades: Llegir (R), Desenvolupar un model (M), Estimar (E), Calcular (C), Validar (V) i Redactar (W). La figura 4.2 mostra un DAM i en ella es pot observar la complexitat del procés matemàtic desenvolupat pels estudiants.

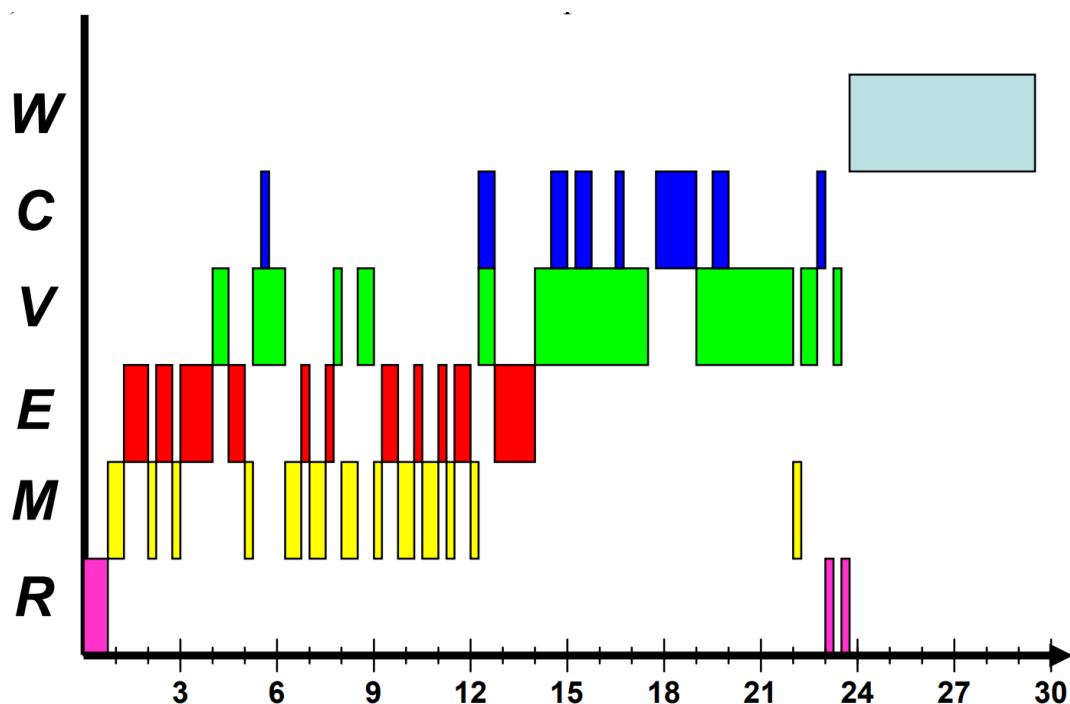


Figura 4.2: Exemple d'un DAM descrivint una activitat de modelització (Ärlebäck, 2009).

Per la flexibilitat de la seva formulació, els DAM permeten adaptar-se a altres activitats de modelització introduint les categories d'anàlisi que són diferents de les originals (Albaracín, Ärlebäck, Civil i Gorgorió, 2019). Han de permetre, per tant, caracteritzar activitat

de modelització matemàtica i també activitat pròpia de la modelització estadística, si es considera.

A partir de les dades recollides i de la tipologia distintiva de l'activitat proposada decidim canviar la codificació de les activitats reflectides al DAM del procés de modelització que segueix l'alumnat. Les categories utilitzades s'inspiren en les categories del cicle d'investigació estadístic de Wild i Pfannkuch (1999), el PPDAC, a causa de la naturalesa de l'activitat (Gould et al. 2017). Les categories escollides a la fi, són: interpretar l'enunciat, explorar les dades, planificar, implementar l'anàlisi i generar les conclusions.

És important en aquest punt de la presa de decisions metodològiques argumentar el motiu d'aquesta decisió, ja que estem utilitzant una eina (el DAM) dissenyada per a descriure la modelització matemàtica però introduint categories d'activitats pròpies de l'Estadística. En primer lloc, recordem que el PPDAC és un model pensat per a descriure l'activitat estadística professional i que no és fàcil de seguir per als estudiants d'Educació Secundària (Gould et al. 2017).

Per una altra banda, al capítol 2 ja hem observat que els alumnes desenvolupen un procés de modelització matemàtica al resoldre una tasca similar (Aymerich & Albarracín, 2016). Entenem que combinar aquestes dues eines amb l'adaptació que hem implementat permet visualitzar adequadament les activitats que realment desenvolupen els alumnes per resoldre el problema. A partir d'aquestes consideracions decidim establir les següents activitats al DAM que utilitzarem en aquest estudi, que es descriuen a la taula 4.3.

Categories	Descripció
Interpretar (I)	Llegeixen, escolten i veuen. Adapten el llenguatge de l'enunciat al seu propi vocabulari. Resumeixen i comparen amb altres situacions similars. Fan connexions amb idees prèvies i cerquen informació per entendre millor l'enunciat.
Explorar dades (D)	Exploració visual en què es fixen en les dades i donen sentit a aquestes dades segons la seva experiència o prejudicis. Poden arribar a fer càlculs exploratoris amb dades.
Planificar (P)	Tracen un pla d'acció que pot incloure en més o menys mesura sabers estadístics. També ens referim a modificacions d'aquest pla.
Implementar l'anàlisi (A)	Càlculs, organització de les dades, generació de gràfics...tota aquella activitat que produeixi resultats.
Generar conclusions (C)	A partir de la observació i interpretació de les dades i els resultats dels anàlisis es generen conclusions i es redacten.

Taula 4.3: Categories d'anàlisi utilitzades (Font pròpia de la investigació)

A continuació exemplifiquem aquestes categories amb un exemple comentat. Aquests fragments són extrets del primer grup de la primera recollida de dades.

Interpreten (I)

La categoria "Interpretar" abasta diverses situacions relacionades amb la comprensió de l'enunciat. Això inclou des de la lectura literal de l'enunciat fins a la traducció del mateix amb les seves pròpies paraules, passant pel resum de l'enunciat i la comparació amb tasques que tinguin un context similar o que els estudiants relacionin amb el tema per algun motiu. Així mateix, aquesta categoria també engloba la cerca d'informació rellevant sobre el tema o de paraules que no hagin comprès completament, amb la fi última d'entendre quina és la problemàtica plantejada i com abordar-la.

El primer fragment (primer àudio, minut 5:28) ens mostra com després de la lectura de l'enunciat, aclareixen el seu significat traduint-lo al seu llenguatge. Aquesta traducció implica exemplificar la situació i canviar l'estructura de l'enunciat.

I: ...entonces dice...emm... “ L’article deixa clar que cada ajuntament decideix quin és el valor de l’impost i que l’Estat només dicta quin són els automòbils que n’estan excempts. a) A l’article diuen que dins de la mateixa comunitat i fins i tot la mateixa província les diferències són evidents, quines províncies són més justes i, per tant, el fet de matricular en una població o en una altra no suposa un greuge comparatiu pels propietaris dels vehicles? i b) Hisenda us demana un informe per avaluar aquesta situació i decidir si l’Estat ha d’intervenir ha d’incloure un recull de propostes que valorin diferents solucions.”

I: Vale entonces ...

S: La cosa es que por el mismo coche depende del sitio donde lo decto pagas más o menos.

I: Exacto y en la b como si tu tienes un coche y depende del sitio donde donde esté la el impuesto es diferente en la b pide que que... S: Un informe de lo que está pasando para saber si el estado interviene o no.

I: Para regular la diferencia.

En un altre fragment del diàleg (minut 1.18 del primer àudio), es pot apreciar com els estudiants estableixen connexions amb el seu coneixement sobre impostos i proporcionen exemples per a comprendre millor la situació plantejada. És important destacar que aquesta connexió es realitza sense haver llegit encara el contingut de la tasca, basant-se únicament en el títol d’aquesta activitat. Aquest exemple il·lustra, tal com s’ha esmentat durant la descripció de les MEAs, que l’activitat se situava en un context relativament proper als estudiants, permetent-los relacionar els seus coneixements acadèmics i del seu entorn immediat.

I: Pueees ¿qué hacemos? ¿Lo compartimos y una persona lo envía? Lo comparto yo? Sí vale.

J: A mi me da igual.

I: Vale. Es algo de coches.

S: Impuesto de circulación.

I: ¡Ah! Hay impuestos para todo. ¿Sabes que han bajado el IVA para los productos higiénicos?

J: ¿Para los qué?

I: Productos higiénicos.

Exploren les dades (D)

Definim la categoria d’exploració de les dades quan observen directament les dades i

les fan seves. Sovint, arran de l'observació de les dades extreuen conclusions. Aquestes conclusions que serveixen per interpretar l'enunciat o bé per resoldre la tasca. És a dir, les dades formen part de la fase d'interpretació de la tasca. És cert que podríem haver prescindit d'aquesta categoria, però vam diferenciar-la de l'anterior perquè les dades juguen un paper diferent en les tasques o activitats estadístiques i, perquè aquesta exploració era una cerca se situava entre la interpretació, planificació i l'anàlisi. En l'exemple, quan consideren dades, és en part per entendre l'enunciat, però ajuda a crear una estratègia.

J: ¡Hala! No, el más barato de todos es Melilla, mira Melilla, al final de todo Melilla.

I: Melilla.

J: 30 € y todos estos ciento y pico.

I: ¡Flipas!

J: Esto mola.

I: Bueno Zamora también tiene cien, Zamora tiene 78 o sea ...

J: Y Barcelona bueno también es carillo ¿eh?

I: Sí, no es de los más caros pero tampoco es de los más baratos osea yo creo que está, que está bien S: Vale.

J: ¿Has visto no las motos? de la moto de la moto de 125 pos paga unos impuestos tal. (I) Ya .

J: Y cuando va subiendo, va subiendo, va subiendo y el que tiene una moto de más de 1000 cc una Kawasaki de esas y Bg mira lo que paga ...solo porque es más potente porque eso no lo pilló.

S: No sé depende del sitio donde estés.

J: En alemania es gratis, entonces ¿por qué allí no hay límite de velocidad?

S: Pues hay que buscar las más justas ¿no?

J: Lo que hay que buscar es.. a ver.

S: Las que están las que son más justas.

J: Mira esto supongamos que un vehículo con más de 20 caballos está domiciliado en Melilla la tarifa es de 44 € y en Burgos de 205.

I: Flipa colega. Ma... no en el municipio de Guadarrama la cuota del impuesto más de 20 caballos eh fiscales sería de 208,61 ..a 5km de distancia la cuota es de 140.

J: O sea baja 60 68 € por estar a 5 km.

I: Flipa.

S: Vale, por eso te sale más a cuenta matricularte en un sitio y no en otro.

Un altre factor que ens va fer incloure aquesta categoria en l'anàlisi va ser l'estudi exploratori que es va realitzar. Diversos grups revisàvem les dades (salaris) pensant com havien de ser i donant personalitat a aquestes dades. És a dir, argumentaven la necessitat de sous elevats i de sous baixos segons el tipus de feina que es desenvolupava a l'empresa.

Aquesta revisió no era definitiva per treure conclusions però sí per donar veracitat i sentit a la tasca. Però en aquest segon estudi, aquesta exploració no s'ha donat en tants casos, pensem que a causa del volum de les dades. En el primer estudi, si bé la quantitat de dades era important, podia permetre una exploració sense perdre massa temps i localitzant valors que realment eren interessants per ells (com valors molt diferents de les dades generals per ser molt grans o molt petits). En el segon estudi, el full de càlcul tenia tantes dades que un estudi rigorós d'elles era força complex. Per tant, o exploraven la taula de l'article o bé cercaven en concret ciutats que pensaven que aportarien una informació específica.

Planifiquen (P)

En la categoria "Planifiquen" determinen l'estratègia a seguir. Elaboren un pla d'acció, posant sobre la taula pros i contres d'aquesta elecció. La discussió entre diferents membres dels grups es dona sovint, encara que tenim grups que tenen un líder molt marcat i no es qüestiona el camí escollit per resoldre la tasca. En el paràgraf es pot observar com escullen una mostra, però mai es menciona el concepte estadístic. Podem considerar que planifiquen la seva actuació i posteriorment tornen a la fase d'interpretació.

I: Entonces ¿ahora hay que mirar todos?

S: Sí y comparar.

I: Vale eh.

S: O sea yo pondría sí.

I: No yo creo que todos no hay que mirarlos.

J: No hay que mirarlos hay que mirar algunos, los que queramos.

I: Cogemos los turismos de yo qué sé.

S: Pues cogemos un poco del norte, del sur, un poco de Extremadura.

I: Pero hay tipos de turismos o sea de coches y de todo eso está de más de 20. caballos fiscales, que no sé qué significa eso, más de 16.

J: ¿Lo busco yo?

I: Más de 12.

J: Caballos fiscales.

I: Caballos fiscales.

S: Pues a ver la media, o sea la mayoría de la gente tiene tipo de coche.

I: ¿Cuántos coches? O sea la gente.

Implementen l'anàlisi (A)

Implementen l'anàlisi quan ja han fet la planificació i comencen a realitzar càlculs, organitzar les dades, generar gràfics o tota aquella activitat que generi resultats susceptibles d'anàlisi. Podríem dir que seria la fase on s'apliquen les matemàtiques, però no sempre passa. Com veurem més endavant, la cerca d'informació o d'índexs socioeconòmics també forma part d'aquesta categoria. Aquest grup simplement havia decidit observar directa-

ment algunes ciutats i aquí s'observa com van enumerant les ciutats escollides

I: Y en Barcelona tiene que pagar osea Barcelona como oooh tal...Barcelona 217,28€ y ahora...

N: 7 millones de euros amigo

I: Y ahora Sant Cugat ¿no? (S) ¿Cuánto has dicho que costaba?

I: 217,28.

N: ¿A qué hora acaba la clase?

Conclusions (C)

Les conclusions, resultat de l'anàlisi, no tenen per què ser al final del procés de resolució, de fet, durant el procés d'anàlisis, o quan exploren les dades poden anar traient conclusions. Sovint els prejudicis que poden tenir són contrarestats per les dades durant el procés. A vegades treuen conclusions dels seus coneixements propis, en l'exemple utilitzen altres factors com els possibles per poder existir diferències entre l'impost entre un municipi i un altre. En el segon exemple treuen conclusions a partir de les dades que han recollit, després de l'anàlisi.

S: ¿Pero Rubí y Sant Cugat pagarán lo mismo?

I: O no.

N: No, no.

I: No porque son diferentes.

N: Porque Rubí es de una... un pueblo de gente obrera, de gente trabajadora y obrera y Sant Cugat no

N: En Sant Cugat casi no hay gente que viva ahí que sea obrera I: Pues 224, pagan lo mismo.

N: ¿Eh? 224 también, pagan lo mismo.

S: A ver yo creo que la más justa es Madrid porque es la capital...Y es la que más real. Osea si tu te vas a Soto del Real que está a ...Y te vas a Madrid osea Alcorcón o Aranjuez.

4.5 Resultats: activitats de modelització representades als DAMs

Els DAMs que mostrem difereixen en la forma de representació de la primera recollida a la segona. Per elaborar aquests DAMs utilitzem el programari MADTaskTracker creat per Pla-Castells & García-Fernández (2020). Per a la primera recollida de dades vam utilitzar la primera versió i per a la segona recollida de dades vam utilitzar la segona versió que permet posar marques en diversos moments del procés. Això ens permetia més precisió a l'hora d'indicar quan s'elaborava el model. No vam substituir les primeres gràfiques perquè ja s'havien elaborat articles amb elles com a resultat i ens va semblar que, a l'hora de redactar la tesi, havíem de mantenir-les per resultar coherents a l'hora de mostrar els resultats obtinguts. En aquesta secció es presenten els DAMs que mostren les activitats de modelització que desenvolupen els grups de treball. En cada cas es detalla el procés general seguit per poder interpretar adequadament el DAM generat.

4.5.1 Grup 1 (Primera Recollida)

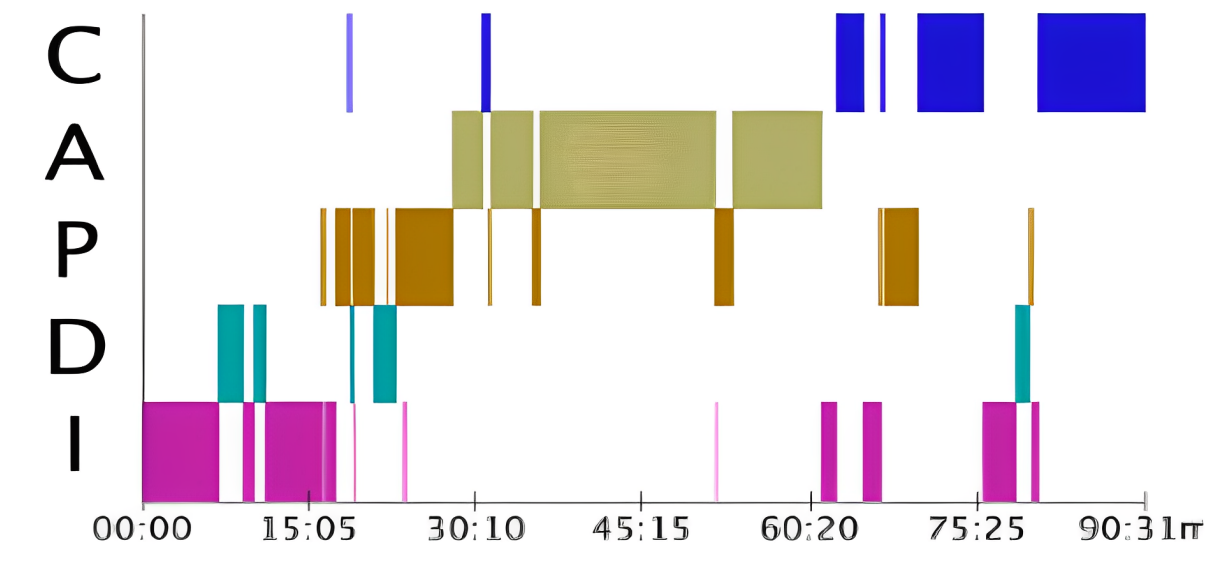


Figura 4.3: DAM Grup 1 (Primera Recollida)

Comencen amb la interpretació de l'enunciat, amb intervals on juguen amb les dades per fer-les seves (als 6:58, 10:05 i 10:58 minuts). En aquesta primera fase al minut 15:07 decideixen treballar amb totes les dades, però moments després, 15:14 minuts, s'adonen

que és impossible (amb els recursos de què disposen) i agafen una primera mostra que seria totalment informal, però que esbossa una característica pròpia de les mostres: l'aleatorietat. Apareix la necessitat d'agafar una mostra quan conjuguem la gran quantitat de dades i la poca destresa en l'ús d'eines digitals. Tornen a discutir sobre què demana l'enunciat durant un minut i mig perquè alguns conceptes no els tenien clars. Llavors refinen el seu concepte de mostra, ja que no només escolliran províncies a l'atzar, sinó que se centraran en l'impost d'un tipus de cotxe. Per ells era important que la mostra fos representativa i això ho indiquen perquè a l'hora d'escollir quins casos estudiaran volien que fossin vehicles que utilitzessin la majoria de les persones.

Aquest grup és molt coherent quan tenen l'eina que volen utilitzar planifiquen l'estratègia que acompanya a la seva utilització. La seva primera idea de mostra es veu ampliada amb una mostra de la mostra, seguint uns criteris (d'aleatorietat intuïtiva) similars. Criteris molt discutits pel grup. Comencen a treure algunes conclusions, però observen que necessiten una eina més, aquesta és la diferència. Una diferència entre els valors de les dades que seleccionen com a mostra i que analitzen a ull nu. A partir d'aquí el procés és cíclic. Cerquen mostres, analitzen les diferències, treuen conclusions, planifiquen les següents mostres. És un grup disciplinat i que va avaluant els resultats per saber si tenen prou coherència i, per això, periòdicament revisen l'enunciat. En resum, el grup té diversos períodes d'exploració de les dades durant la interpretació, la planificació. Hi ha un període al final entre les conclusions, però si observem detingudament es dona també entre la interpretació i la planificació de la tasca. Tenen un període llarg d'anàlisi. I, encara que extreuen breus conclusions a l'inici, el gran gruix es fa al final.

4.5.2 Grup 2 (Primera Recollida)

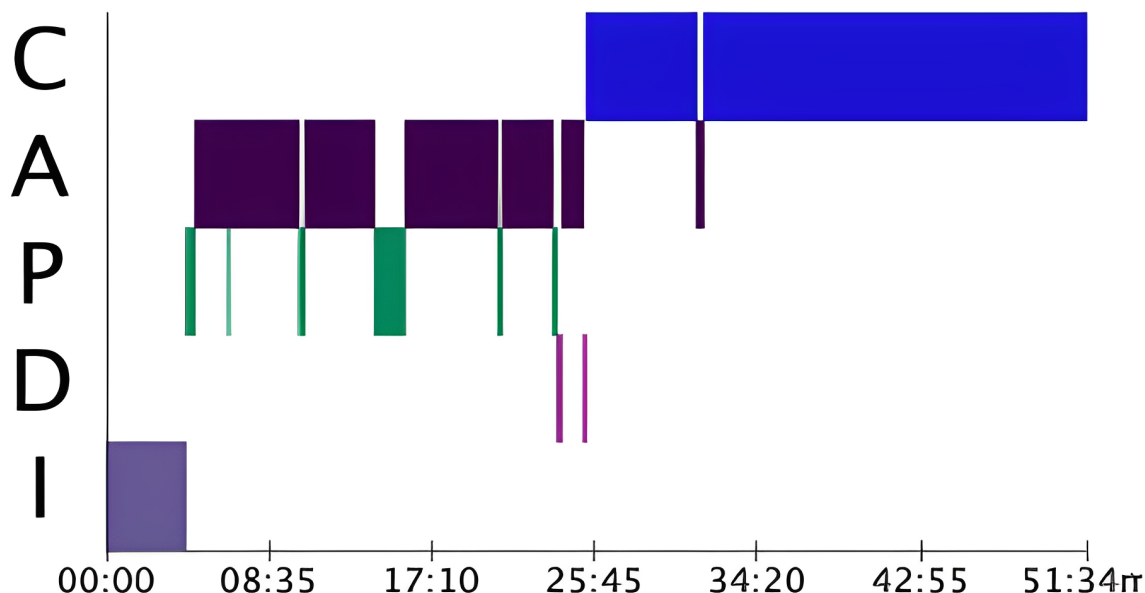


Figura 4.4: DAM Grup 2 (Primera Recollida)

Aquest grup és un grup que sembla segur d'ell mateix i de l'estratègia que segueixen, perquè una vegada trobat el camí no tornen a l'enunciat per validar. Després d'entendre l'enunciat es plantegen una estratègia inicial on utilitzen mitjanes dels màxims i mínims de cada província (minut 4:30). Fan servir totes les dades perquè van fer servir eines tecnològiques. Però, abans d'acabar el procés, s'adonen que el resum que fan de les dades no els permet comparar la variabilitat així que defineixen un interval (minut 14:35), diferent per a cada província centrat en la mitjana que han calculat. L'elecció de l'amplada de l'interval depèn de l'observació de les semblances o diferència entre les dades. Llavors metòdicament classifiquen si les dades segons si són dins de l'interval o fora de l'interval. Durant aquest procés es veu que es mouen entre la planificació i l'anàlisi. Quan comencen a treure conclusions s'adonen de la necessitat de la mostra. És a dir, la necessitat de no agafar totes les dades i testar unes poques, ja que el seu procés és lent i meticulós i tenen molta quantitat de dades. Tots els membres del grup van aportar idees, però es veia un lligam entre cap a on anava la conversa i l'eina escollida. Fins que va arribar la proposta de l'interval per estudiar la dispersió de les dades. Concepte que podria assemblar-se als intervals que s'utilitzen en els tests de normalitat i que va sorgir esporàdicament del membre d'un integrant del grup.

En el primer grup que hem analitzat hi ha una necessitat d'explorar les dades i fer-les

seves. També es diferencia del primer grup en el fet que identifiquen la tasca com una tasca estadística i que les eines ajudaran a resumir les dades. Però és el fet de tornar o no a l'enunciat és la diferència aparentment més gran entre els dos grups, és el fet d'anar i venir de l'enunciat del primer grup respecte al segon grup. Heretat del primer estudi exploratori sabíem que era possible diversos usos de la tecnologia. Per exemple, trobar el màxim o mínim d'una distribució de dades mitjançant l'observació o fer-lo utilitzant un full de càlcul. En alguns paràmetres és més fàcil que facin servir tecnologia, com per exemple, per calcular la mitjana. Però en uns altres no. Aquest grup va fer ús de la tecnologia, així ho indiquen en les gravacions, però no es disposa de l'arxiu de dades.

En resum visiten molt poc les dades i ho fa entre la planificació i l'anàlisi al mig del procés. No tornen a l'enunciat durant el procés. Interrompen l'anàlisi (els càlculs) per redirigir la planificació. Només interromp les conclusions amb un breu estadi de càlculs.

4.5.3 Grup 3 (Primer Recollida)

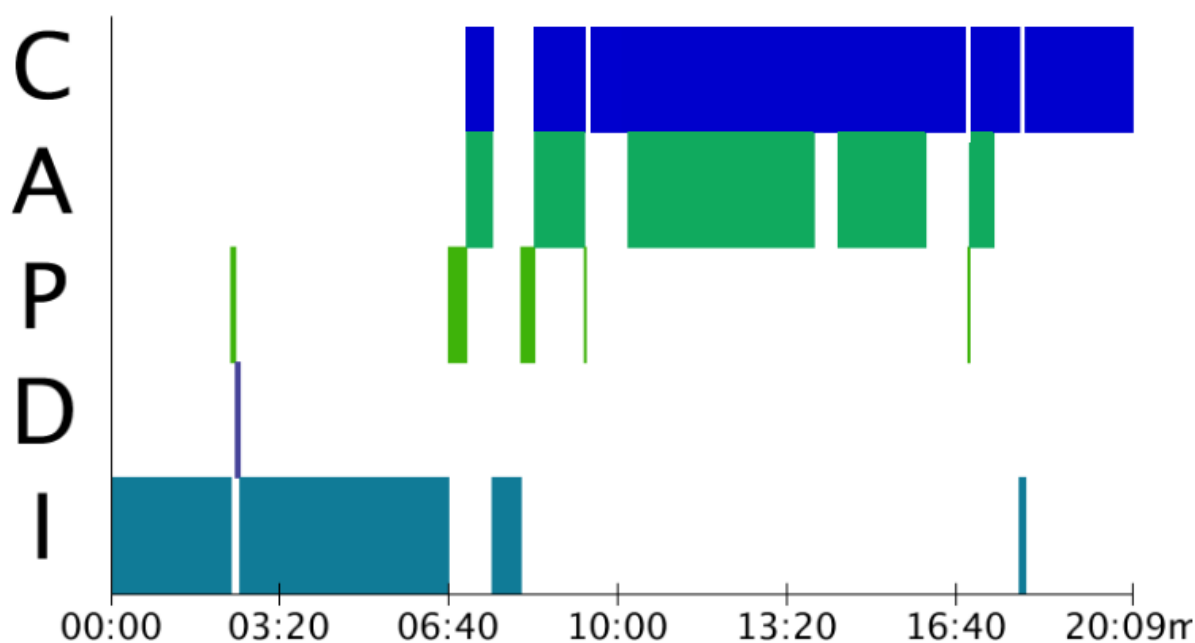


Figura 4.5: DAM Grup 3 (Primera Recollida)

Aquest grup també sembla molt segur en l'estratègia escollida l'hora de solucionar l'activitat, ja que no torna a l'enunciat com mostra la barra horitzontal buida en la dimensió D. Una de les integrants del grup té molt clara la forma de treballar i no perden el temps

quan decideixen el camí a fer. Però sí que li dona moltes voltes inicialment. Aquest grup esquivava l'anàlisi matemàtica i fa servir un conjunt d'explicacions basades en variables socioeconòmiques, inspirades en la matèria en què es trobaven fent a tasca. Com quan en el minut 7:30 decideixen que Badajoz és una província justa respecte al seu impost de circulació perquè pertany a una comunitat autònoma amb una de les rendes per càpita més baixes de l'estat Espanyol. O bé quan en el minut 9:05 quan decideixen que Ceuta és una ciutat justa perquè és una ciutat autònoma fora de la península Ibèrica. Podem observar que utilitzen variables com: la renda per habitant, ser ciutat autònoma fora de la península Ibèrica, tenir exempts de pagament certs vehicles, ser una illa i tenir poca població. Revisant algunes províncies i algunes ciutats observem com a mesura que avancen incrementen més conceptes al model. Són variables totalment vàlides i que poden respondre i completar l'activitat. És un dels equips més ràpids analitzats i anaven escrivint les conclusions quan encara estaven analitzant i a l'hora planificaven, sobre la marxa, ja que si no trobaven una explicació amb l'indicador que estaven usant el completaven amb un altre. La tercera gràfica ens mostra un treball on simultàniament analitzen i treuen conclusions. El grup observa les dades i llavors decideix si les classifica d'una manera o una altra utilitzant eines matemàtiques o no. La planificació és mínima, no tenen estratègia i llavors sembla que improvisen sota diversos criteris.

A i B: Soria.

A: Soria.

B: Soria es porque es una de las provincias con menos población y con más problemas de implantación de población.

A: Población no vale.

B: Entonces sería, pones es justa: per ser una amb menys

B i A: Població.

B: És justa per ser una de les províncies amb menys població.

A: Siim

B: I amb més problemes d'implantació poblacional, amb més problemes d'implantació poblacional ... Problemes, problemes, ale, vamos bien. D'implantació poblacional, vale, perdó.

En resum, el càlcul i les conclusions estan interrelacionades. El tipus de model conté pocs càlculs matemàtics sí evidències i indicadors socioeconòmics. Miren dades entre planificació i interpretació. Planifiquen molt poc, van afegint elements al model al mateix temps que estan elaborant les conclusions. Durant les conclusions, al final, tornen a la interpretació. Tres dels quatre grups de la primera recollida retornen al final a l'enunciat

per validar les conclusions.

4.5.4 Grup 4 (Primera Recollida)

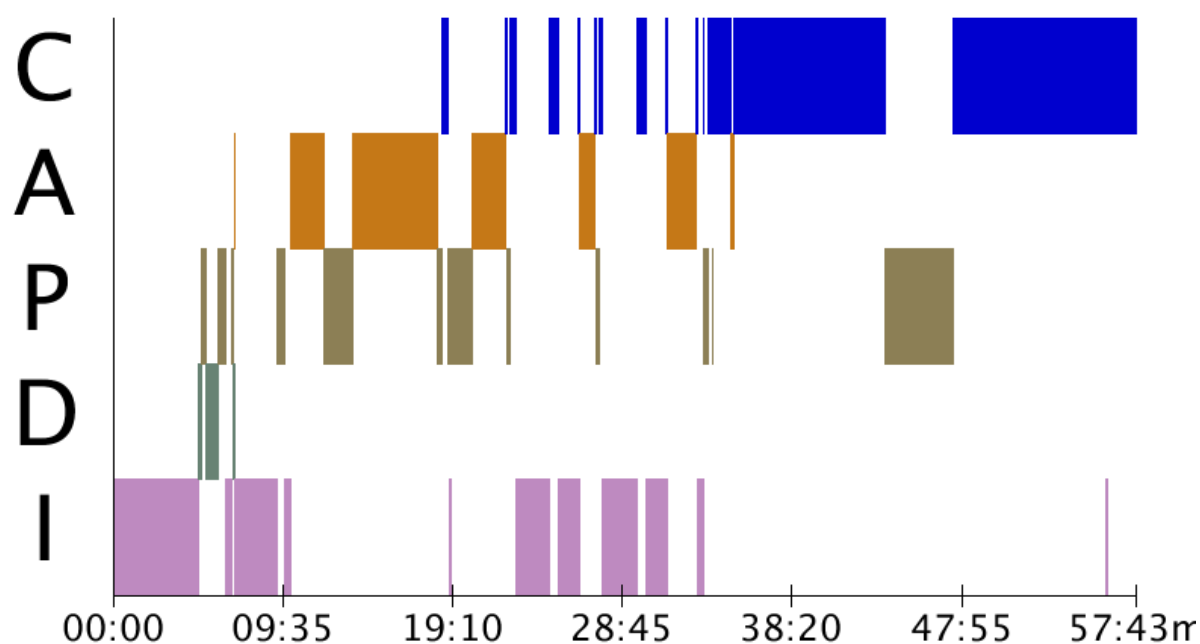


Figura 4.6: DAM Grup 4 (Primera Recollida)

Aquest grup té dos grans moments d'interpretació de l'enunciat que corresponen als dos apartats de què consta la tasca. Al final es pot observar una breu tornada a l'enunciat per comprovar que ja han acabat l'activitat proposada (55:18). Té un moment inicial d'exploració de les dades que ja no es torna a repetir un cop establert definitivament el pla d'acció. Observem com s'alternen els tres moments: interpretació, exploració de dades i planificació. Aquí detallem el desenvolupament de la transcripció entre els minuts 3:57 i 5:55 per exemplificar el canvi d'un moment a un altre de la fase del procés de resolució de l'activitat.

Interpreten (I)	03:57 C: Es más caro en Girona que en Barcelona 03:59 A: Espera 04:04 A: Pero aquí 04:04 C: Esto son por comunidades 04:07 A: Ya pero mira cuántas hay ¿eh? 04:10 B: Ya, ya 04:19 B: Ostres! 04:20 A: Sí hi ha un montón! 04:22 A: N'hi han moltíssims! 04:35 B: Mira todos los de Alicante. 04:36 A: Els de I? 04:38 [Murmuren]
Exploració de Dades (D)	04:50 C: ¿Hay Barcelona?... 04:55 A: Barcelona 04:56 A: Arenys 04:57 C: Aquí está Sant Cugat
Planifiquen (P)	04:57 A: Vale chicas, hay que mirar cuál es, ties, mireu de cada de cada comunitat si els preus estan igualtats 05:10 C: Ho apuntem en paper 05:11 B: I per què no fem Catalunya i ja està? que són 4... 05:12 A: Noooooi (parlen dos a la vegada) i C: No sé Rubí si que hay! 05:37 C: Espera espera espera 05:42 C: Rubí, Sant cugat! -Aplauzeixen-(van mirant dades)- Esplugues 05:55 A: Ostres!

En resum, és un grup que mira les dades entre les fases interpretació, planificació i anàlisi. La fase d'interpretació s'estén durant tot el procés, encara que és menor al final, quan estan fent les conclusions. Les fases es van alternant fins que extreuen conclusions de manera definitiva. Aquestes conclusions, només s'interrompen per planificar o tornar a l'enunciat en un petit període de temps.

4.5.5 Team 01 (Segona recollida)

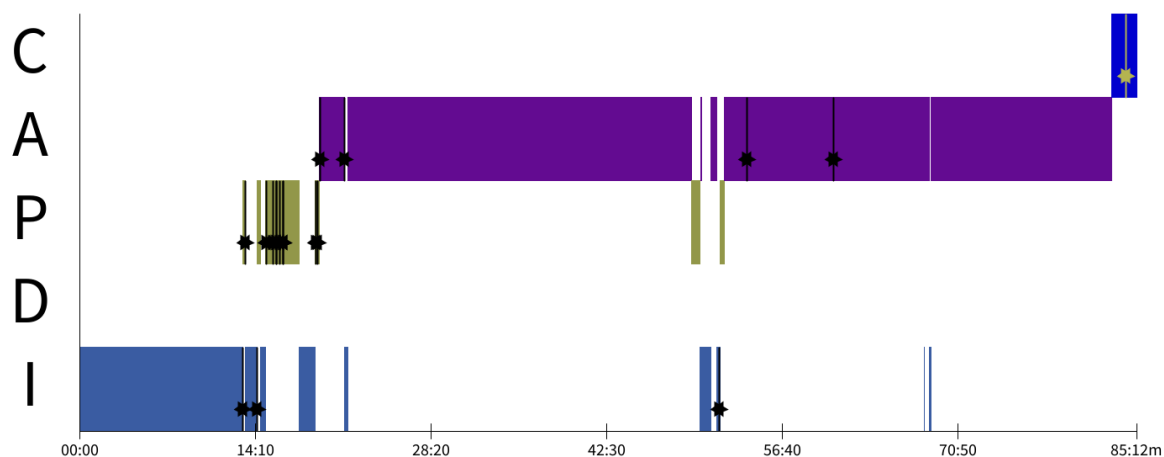


Figura 4.7: DAM Team 01 (Segona Recollida)

El procés d'anàlisi dels grups es va caracteritzar per un període de càlculs extens, només interromput per breus pauses dedicades a la planificació i la interpretació de l'enunciat. La planificació requeria la validació dels membres del grup i una comprensió profunda de l'enunciat, sense que s'observés una consulta directa a les dades per a la comprensió de la situació. De fet, l'exploració de les dades es va limitar a dos grups.

Aquesta dinàmica s'explica per la complexitat del mètode d'anàlisi emprat, que exigia la utilització d'eines digitals per a una major eficiència. La manca d'eines digitals va obligar a realitzar els càlculs de manera manual, allargant considerablement la fase d'anàlisi.

4.5.6 Team 02 (Segona recollida)

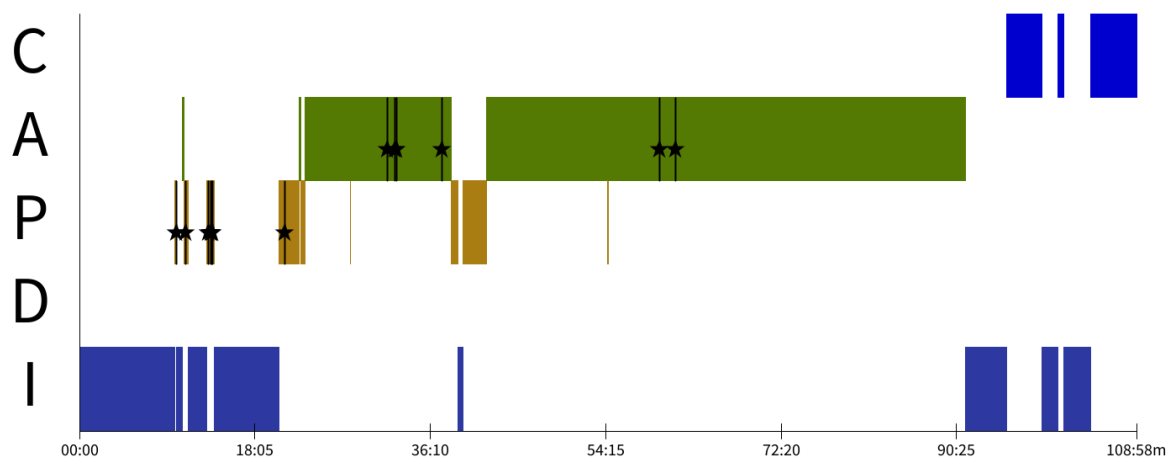


Figura 4.8: DAM Team 02 (Segona Recollida)

En el cas d'aquest grup, s'observa una absència d'exploració directa de les dades per a la construcció de significat amb relació al problema plantejat. En el seu lloc, el seu treball es caracteritza per una interacció constant amb l'enunciat, utilitzant-lo com a guia per a la planificació de les accions a seguir i la posterior validació dels resultats obtinguts.

El procés d'anàlisi d'aquest grup es pot dividir en fases ben definides: planificació, càlcul i conclusions. En la fase de planificació, es realitza una lectura atenta de l'enunciat i es defineix una estratègia per a l'abordatge del problema. A continuació, es passa a la fase de càlcul, on es realitzen els càlculs necessaris per a obtenir els resultats. Finalment, en la fase de conclusions, s'interpreten els resultats obtinguts i es redacten les conclusions del treball.

Cal destacar la disciplina i el rigor d'aquest grup, que es manifesta en la seva atenció als detalls i la seva preocupació per la precisió dels resultats. A més, mostren un gran interès per a millorar les seves habilitats en el tractament de dades digitals, buscant informació i recursos que els puguin ajudar en aquest sentit.

Un aspecte interessant d'aquest grup és la seva tendència a elaborar models en la fase de planificació i, posteriorment, validar-los mitjançant la consulta de l'enunciat. Això evidencia una comprensió profunda del problema i una capacitat per a treballar de manera reflexiva.

En comparació amb els DAMs del primer equip, es pot observar una gran similitud en el seu procés de resolució de problemes. En ambdós casos, es tracta d'un procés madur i

ben estructurat, amb pocs salts d'una fase a l'altra.

4.5.7 Team 03 (Segona Recollida)

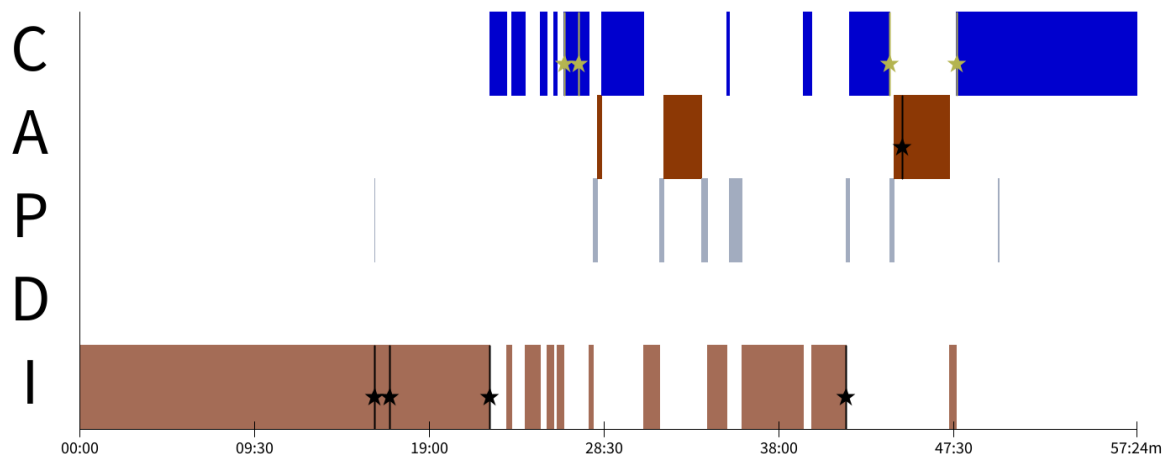


Figura 4.9: DAM Team 03 (Segona Recollida)

En aquest cas, ens trobem amb un altre grup que no realitza una exploració directa de les dades per a la construcció de significat en relació al problema plantejat.

La fase d'interpretació del problema es converteix en l'eix central del seu treball, desenvolupant-se al llarg de tota l'activitat. Els membres d'aquest grup experimenten dificultats en la descodificació de l'enunciat, ja que es tracta d'una tasca plena de matisos que exigeix una definició precisa.

En contrast amb el grup anterior, la fase d'anàlisi (càlculs) es caracteritza per la seva brevetat, ja que els membres d'aquest grup opten per buscar la solució en Google. La fase de planificació, per la seva banda, és pràcticament inexistent, donant pas a una tendència a extreure conclusions directament de l'enunciat, les dades disponibles i la informació proporcionada per la notícia i les seves cerques a Internet.

En aquest grup, també observem l'emergència de models en les fronteres entre fases, concretament entre la interpretació i la conclusió, o bé entre la conclusió i l'anàlisi. Aquesta situació pot interpretar-se com una resposta a la definició del model i a la posterior reflexió crítica (fase de conclusions) sobre el mateix, la qual cosa pot conduir a modificacions en el model original.

4.5.8 Team 04 (Segona Recollida)

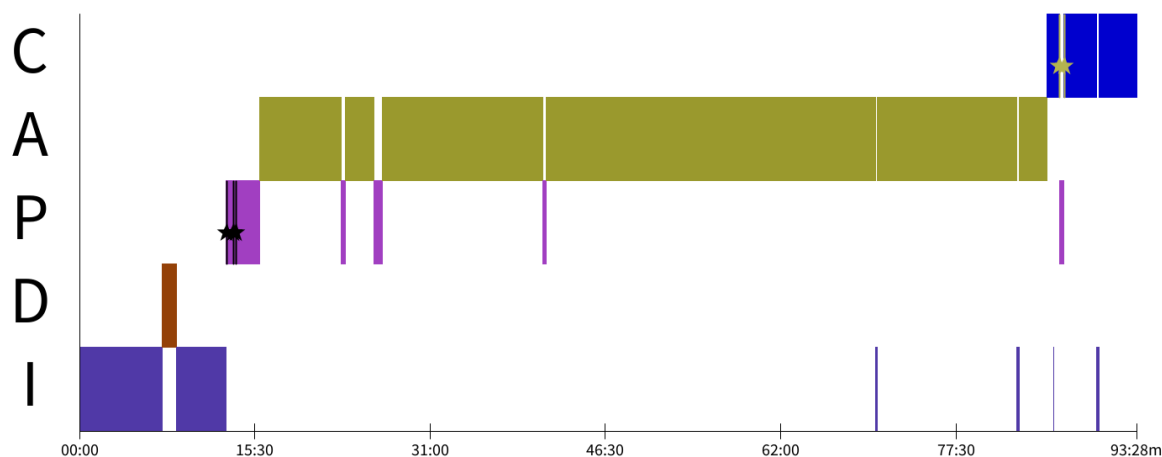


Figura 4.10: DAM Team 04 (Segona Recollida)

En el cas del Team 04, la fase d'exploració de les dades es presenta però com un procés curt, integrada dins de la fase d'interpretació de la tasca. La interpretació inicial, tot i ser breu en comparació amb el temps total dedicat a l'activitat, serveix com a base per a la posterior exploració de les dades. A més, es produeix un retorn puntual a l'enunciat durant la fase de conclusions per a reforçar la interpretació final.

La fase de planificació també es caracteritza per la seva brevetat amb relació al temps total dedicat a la resolució de la tasca, cedint el protagonisme a la fase d'anàlisi, on el DAM centra els seus esforços en la realització dels càlculs necessaris. Cal destacar la complexitat del model utilitzat per aquest equip, en contrast amb el seu domini limitat d'eines digitals. No obstant això, la seva eficiència i capacitat d'adaptació van permetre obtenir resultats prou satisfactoris.

En relació amb la fase de conclusions, s'observa un retorn a l'enunciat, tot i que menys evident que en altres equips. Aquest retorn pot interpretar-se com una necessitat de contextualitzar els resultats obtinguts i assegurar la seva coherència amb l'objectiu inicial de la tasca.

Team 05 (Segona Recollida)

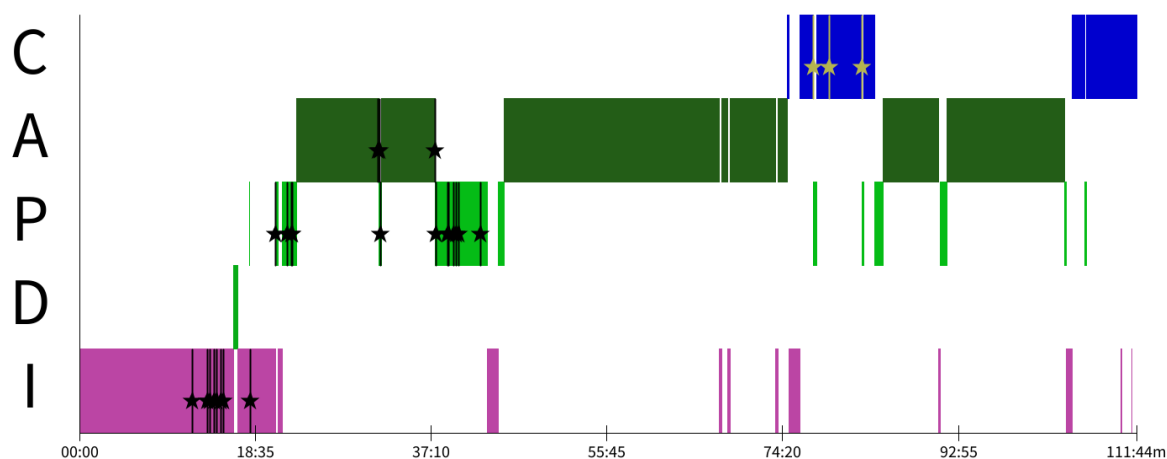


Figura 4.11: DAM Team 05 (Segona Recollida)

En el cas d'aquest grup, s'observa una breu fase d'exploració de dades durant la interpretació de l'enunciat, on es plantegen diversos models per a abordar el problema.

La fase d'anàlisi, que consisteix en la realització dels càlculs necessaris, es presenta com la fase més extensa del procés. No obstant això, es caracteritza per ser un procés iteratiu, on s'interrompen els càlculs per a realitzar fases de planificació i revisió de l'enunciat. Aquesta dinàmica es manté al llarg de tot el desenvolupament de l'activitat, amb un retorn constant a l'enunciat tant en la fase de planificació com en la fase d'anàlisi.

Amb relació a les conclusions, es pot observar una estructura en dues fases: una fase inicial de conclusions i una fase posterior que es produeix una vegada finalitzat el procés d'anàlisi. Cal destacar que aquesta segona fase de conclusions no està relacionada amb l'elaboració de l'informe, sinó que respon a la necessitat d'ajustar les conclusions inicials en funció dels resultats obtinguts.

4.5.9 Team 09 (Segona Recollida)

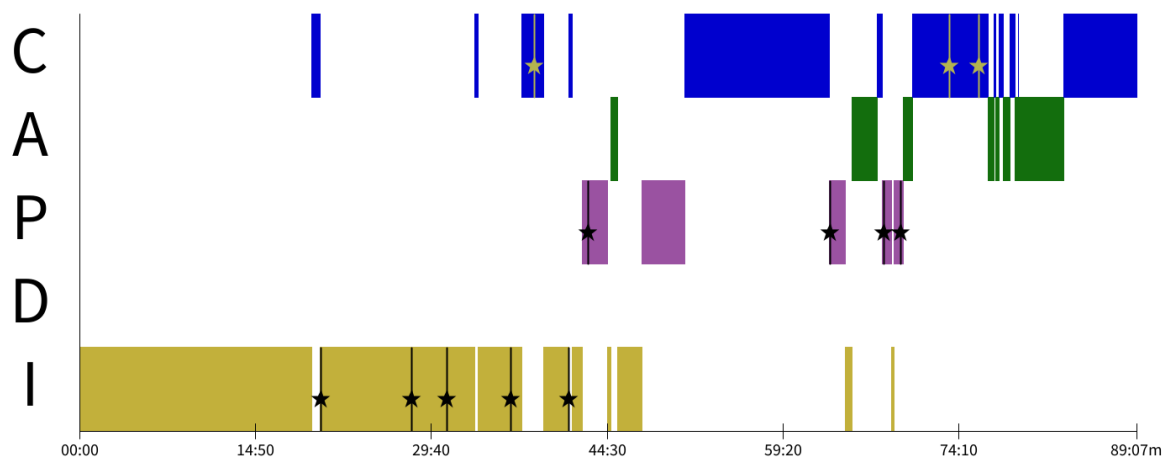


Figura 4.12: DAM Team 09 (Segona Recollida)

En el cas d'aquest grup, s'observa una fase d'interpretació del problema de gran amplitud i solidesa. Aquesta fase es caracteritza per la capacitat del grup per a extreure conclusions rellevants directament a partir de l'enunciat, sense necessitat d'explorar les dades en cap moment del procés.

Aquesta dinàmica, en què la proporció de temps dedicat a la interpretació és significativament superior a la dedicada a la resta de fases, ens pot conduir a inferir que el grup pot presentar certes dificultats en el tractament de la informació complexa present en la tasca.

Les fases de planificació i càlcul, per la seva banda, es presenten com fases breus i desconnectades entre si. A més, s'observa una alternança constant entre conclusions, planificació i càlculs, la qual cosa pot denotar una certa falta de fluïdesa en el procés.

En contraposició amb el caràcter intermitent de la resta de fases, la interpretació es manté com una activitat contínua al llarg del temps. No obstant això, és important destacar la presència de dues últimes tornades a l'enunciat cap al final del procés. Aquest fet, que es pot observar en diversos grups, pot interpretar-se com una necessitat de verificar la coherència entre les conclusions finals i l'enunciat original.

4.5.10 Team 10 (Segona Recollida)

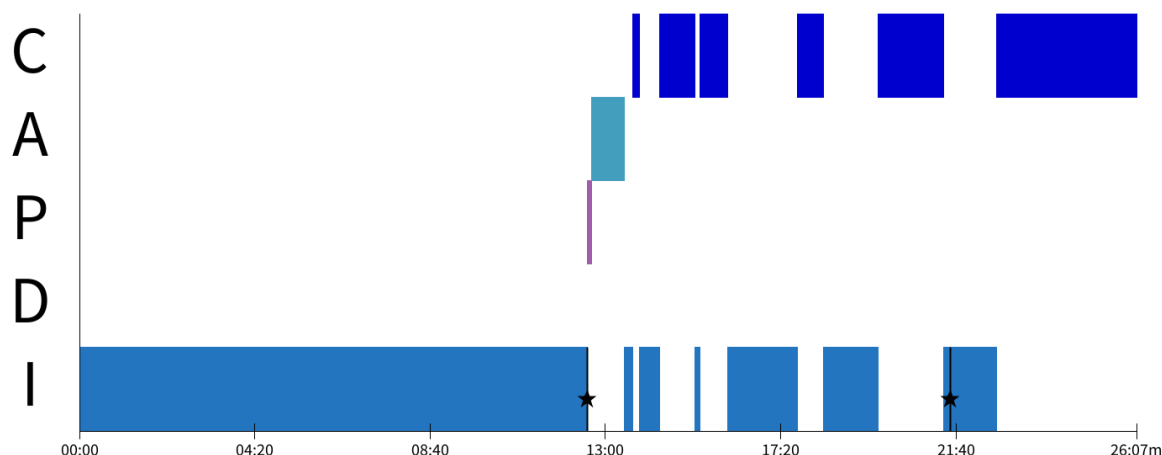


Figura 4.13: DAM Team 10 (Segona Recollida)

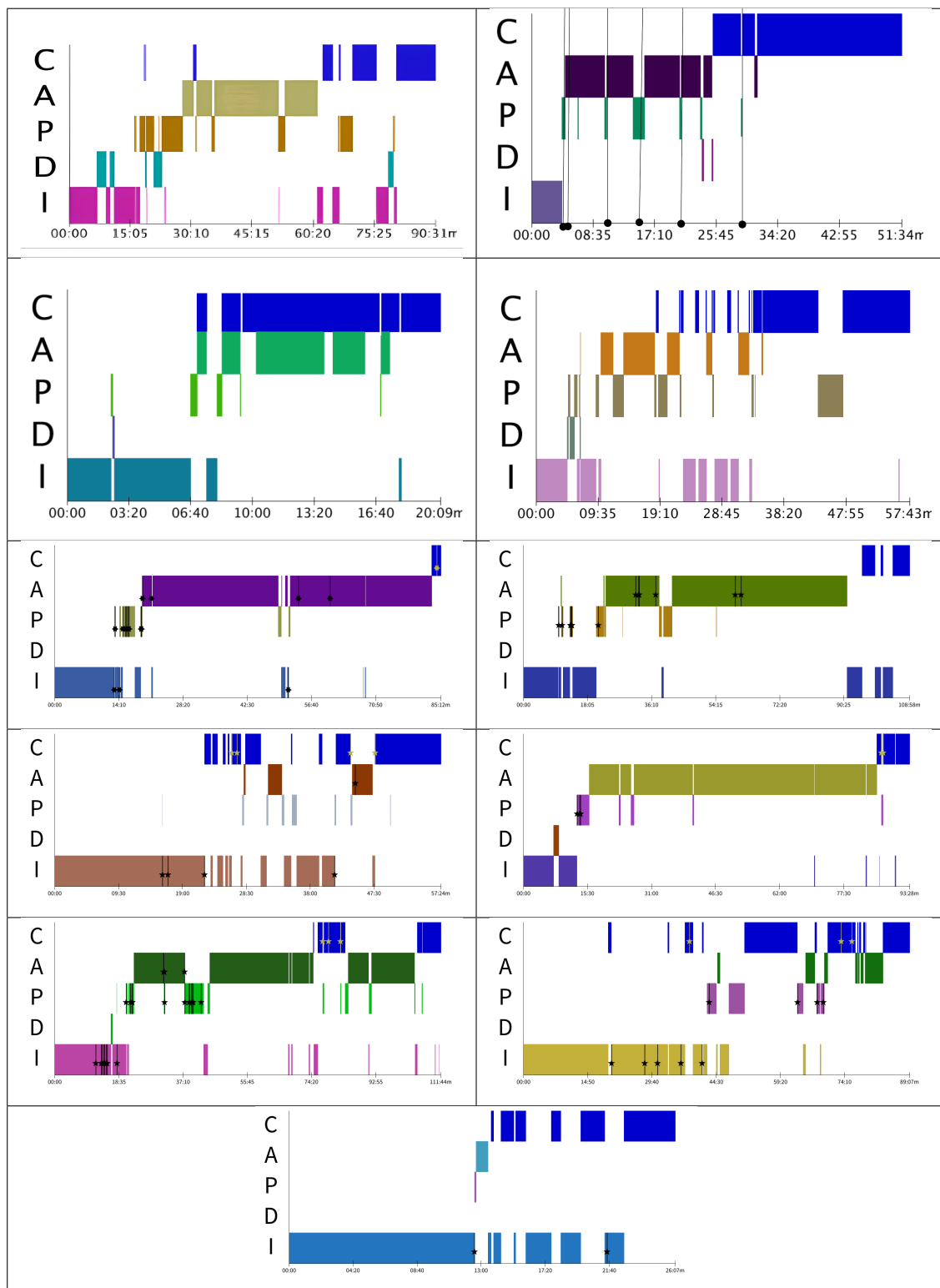
En el cas d'aquest últim grup, també es pot observar l'absència d'una fase d'exploració de dades formal. La seva metodologia es caracteritza per una fase de planificació mínima, que es limita a la definició del model inicial en el moment de la seva aparició. A continuació, es presenta una fase de càlcul breu, coherent amb la simplicitat del model inicial i la planificació realitzada. La fase d'interpretació, que es centra en la comprensió del problema, ocupa la major part del temps dedicat al desenvolupament de l'activitat. Aquesta fase es caracteritza per una alternança constant amb la fase de conclusions, la qual cosa pot denotar un procés iteratiu de construcció del coneixement. Aquesta dinàmica ens porta a inferir que el grup obté la informació necessària per a l'anàlisi i l'extracció de conclusions a partir de l'enunciat de la tasca i l'article proporcionat, establint relacions conceptuais entre els diversos elements. Aquesta hipòtesi es veu reforçada per l'observació que el primer model desenvolupat pel grup és el mínim possible, el que suggereix que la seva interpretació de l'anàlisi de les diferències es basa en la identificació del mínim valor entre les dades disponibles. Posteriorment, el grup incorpora elements addicionals al seu model per a adaptar-lo al context social en què es desenvolupa la tasca.

4.5.11 Taula de resum

Presentem aquí la taula amb el resum de tots els DAMs generats en aquest estudi. Tots junts mostren que els grups tenen un comportament diferenciats i que necessiten estructures el seu treball de formes diferents. Un aspecte bastant interessant és que

s'observen diferències importants en el temps destinat a la interpretació de l'enunciat. Un altre aspecte important és que els alumnes passen molt poc temps treballant directament sobre les dades proporcionades, són altres elements els que centren la seva atenció encara que les dades siguin el motiu principal de la seva activitat de modelització i passen gran part de l'activitat analitzant-les. Una millora important d'aquesta eina seria aconseguir que l'eix horitzontal del temps pogués representar-se en percentatge. Implementar la possibilitat de representar l'eix horitzontal del temps en percentatge permetria una comparació temporal més precisa entre els diferents grups, ja que es podria apreciar la proporció de temps dedicat a cada fase en relació al temps total de treball. Aquesta funcionalitat seria especialment útil per a grups en què la fase d'interpretació sembla breu en termes absoluts, però que en proporció al temps total dedicat a la tasca pot ser considerablement més llarga que en altres grups.

El que sí que permet fer una taula on podem observar-los tots el processos de resolució de la tasca junts és com es respecten totes les fases, per exemple, com la tornada a l'enunciat es dona en la majoria de grups durant el desenvolupament de l'activitat. La informació recollida en aquesta taula podria servir com a base per a un anàlisi més profund de la complexitat de la tasca i de les estratègies emprades pels diferents grups per a resoldre-la. Però per això necessitem complementar amb quin model han utilitzat i com han evolucionat al llarg del procés de resolució.



Taula 4.4: Quadre resum dels DAMs elaborats

4.6 Síntesi de resultats del segon estudi

Aquest capítol presenta la continuació de l'estudi pilot realitzat prèviament, aprofundint en l'anàlisi de l'activitat de modelització matemàtica en un context estadístic. S'introdueix una nova activitat que incorpora una gran quantitat de dades estadístiques reals, i s'utilitza una adaptació específica dels Diagrames d'Activitat de Modelitzadora (DAM) (Ärlebäck, 2009) per a l'anàlisi de les dades.

Els resultats d'aquest estudi confirmen la complexitat de l'activitat de modelització matemàtica en un context estadístic. Els DAM permeten descriure aquesta activitat de manera clara i sense ambigüitats, evidenciant la necessitat de revisions constants del model matemàtic per part dels estudiants.

L'anàlisi dels DAM posa de manifest la importància de considerar l'evolució del model matemàtic al llarg del temps. Aquesta evolució no segueix un cicle lineal, sinó que presenta una dinàmica no lineal amb retroalimentacions i reajustaments constants.

La representació clàssica del cicle de modelització (Blum & Leiss, 2006) no s'adapta adequadament a la complexitat de les activitats estadístiques contextualitzades. La no-linealitat del cicle i la presència d'un context indissociable del model limiten la seva utilitat en aquest tipus d'activitats.

Els DAMs ofereixen una "fotografia instantània" del procés de modelització, proporcionant informació clara sobre com els estudiants afronten aquestes tasques. A més, permeten caracteritzar l'activitat de manera eficient i introduir anotacions temporals per a l'anàlisi de diversos factors, en el nostre cas, la generació i modificació de models.

Malgrat la seva eficàcia, la representació dels DAM presenta limitacions a l'hora de comprendre en detall com és el model amb què treballen els estudiants i els factors que influeixen en les seves modificacions. En el següent apartat, es proposa un procediment per a la representació detallada del model matemàtic.

Aquest estudi aporta noves dades sobre la complexitat de l'activitat de modelització matemàtica en un context estadístic i la necessitat d'eines d'anàlisi que puguin capturar la seva dinàmica no lineal i el paper del context.

Capítol 5

Tercer estudi: Gràfics Explicatius dels Models (GEMs)

5.1 Introducció

Aquest tercer estudi complementa els dos anteriors en la línia d'investigació sobre l'activitat de modelització matemàtica en un context estadístic. En el primer estudi vam observar que la representació de l'activitat modelitzadora dels alumnes en termes del cicle de modelització no ens permetia reflectir adequadament el seu treball. En aquest sentit, els MADs (Diagrames d'Activitat Modelitzadora) utilitzats en el segon estudi permeten una representació més clara del treball dels estudiants. En els dos casos, s'observa una activitat complexa que concorda amb la literatura sobre el desenvolupament d'una activitat de modelització matemàtica. El propòsit del tercer estudi és identificar els elements que defineixen els models matemàtics generats pels grups d'estudiants durant l'activitat. D'aquesta manera ens plantegem donar resposta al tercer objectiu d'aquesta recerca, que té el següent enunciat:

- **OBJ3.** Caracteritzar els models matemàtics que desenvolupen els alumnes.

Així doncs, aquest enfocament global no només ens permetrà comprendre millor les dinàmiques que ocorren durant el procés de modelització, sinó també una visió més completa de com els estudiants construeixen i utilitzen els models matemàtics contextualitzats en tasques estadístiques amb dades reals.

5.2 Elaboració dels Gràfics Explicatius dels Models (GEMs)

Durant el procés de modelització els alumnes construeixen versions parcials (per incompletes o no definitives) del model que desenvolupen. Per a cadascuna d'aquestes versions parcials del model construïm una representació dels elements que el componen i que estan considerant els alumnes. Aquest tipus de representació es basa en uns diagrames que ens permeten visualitzar els conceptes i procediments que constitueixen el model matemàtic en un moment del procés de modelització, i ens permeten analitzar la seva evolució. Aquests diagrames ja utilitzats a Albarracín, Aymerich & Gorgorió (2017) han estat adaptats per a millorar-ne l'ús sense perdre el poder de mostrar el model. La raó de la seva simplificació respon al nostre objectiu: si bé volem caracteritzar de manera acurada els models que usen els nostres alumnes en aquesta activitat, no volem estudiar la seva complexitat, per això una representació més simple que la utilitzada en l'estudi exploratori ens permet poder mostrar com es desenvolupen al llarg del procés de modelització. Necessitàvem una representació clara i eficaç del model que reunís tota la informació en una gràfica explicativa del model, a aquesta eina l'anomenem *Gràfic Explicatiu del Model* (GEM).

Com hem explicat al marc teòric, en aquest treball adoptem la definició de model matemàtic de Lesh i Harel (2003), entenent els models com a sistemes conceptuals que es poden expressar utilitzant diferents mitjans de representació combinats. El model es pot representar mitjançant llenguatge parlat, escriptura alfabètica o algebraica, gràfics digitals, diagrames o gràfics creats a mà o bé metàfores basades en l'experiència. El seu propòsit és construir, descriure o explicar un altre sistema o sistemes. Els models inclouen:

- un sistema conceptual per descriure o explicar els objectes matemàtics rellevants, relacions, accions, patrons i regularitats que són atribuïbles a la situació de resolució de problemes
- els procediments per acompanyar construccions útils, manipulacions o prediccions per aconseguir amb claredat els objectius proposats

A Gallart et al. (2017) es presenta i valida una eina d'anàlisi dels models matemàtics desenvolupats en resoldre un problema de Fermi destinada a la caracterització de models a partir de la determinació qualitativa dels elements següents en els models creats pels alumnes:

- Conceptes (conceptes matemàtics, relacions entre ells, patrons, etc.)

- Procediments (de recollida de dades sobre el fenomen estudiat i sobre el treball matemàtic necessari per obtenir resultats)
- Llenguatges (simbòlic, escrit, numèric, diagramàtic, etc.)

A partir d'aquesta base, a Albarracín, Aymerich i Gorgorió (2017) es presenta una primera versió dels GEM, que inclouen els conceptes utilitzats (representats per boletes en nivell de groc a vermell a la Figura 5.1) com un graf on el gruix de la fletxa que marca la relació indica el nombre de vegades que es connecten en la conversa dels alumnes. El GEM primigeni es complementa amb etiquetes que denoten els procediments dels alumnes.

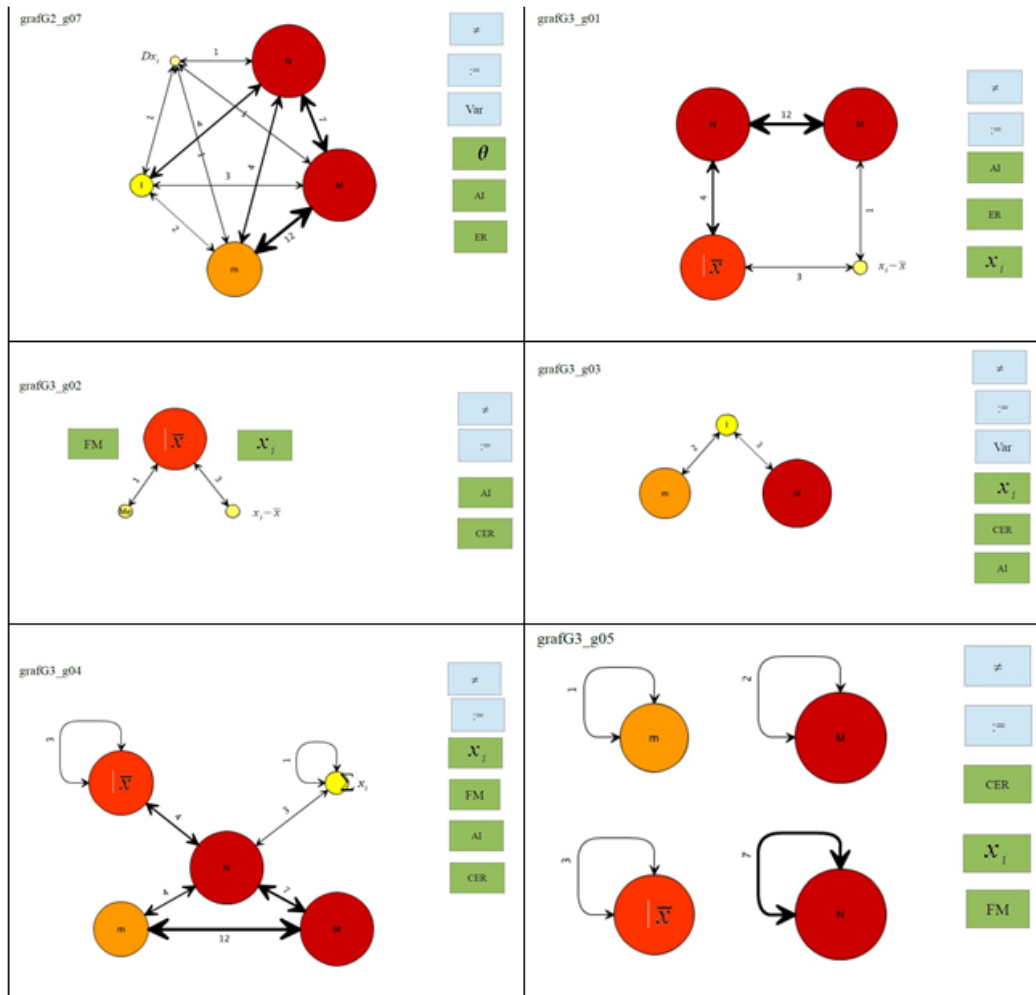


Figura 5.1: Primera versió dels GEM a Albarracín, Aymerich i Gorgorió (2017)

Aquesta representació inicial ens permetia mostrar parcialment la forma en la que els alumnes enllacen els conceptes per aconseguir generar un model matemàtic, però no reflectia la naturalesa del producte final. Per això, en aquest estudi es simplifica el GEM

per representar els conceptes i procediments que es fan servir en cada moment de l'activitat, considerant que els que arribin fins al final tindran el mateix pes independentment de les vegades que els alumnes els hagin considerat o discutit. Entenem que els GEM poden ser el fotograma que permet descriure el model matemàtic en discussió en cada moment. Si el moment es troba durant l'activitat dels alumnes, el GEM representa un model que acabarà evolucionant, quan el model s'estabilitza i ja no es canvia, el darrer GEM caracteritza el model generat pels alumnes.

Concretament, en el GEM representem els conceptes i procediments que utilitzen els alumnes amb circumferències, codificant l'element al seu interior. Si els usen conjuntament els agrupem i si els utilitzen interrelacionats els unim amb fletxes. Si fan servir tecnologia, l'agrupació s'emmarca en caixes progressivament més arrodonides a mesura que la tecnologia esdevé més complexa: des de l'observació a ull nu a la utilització de l'ordinador, passant per l'ús d'eines de càlcul com la calculadora.

A tall d'exemple, es mostra la construcció d'un d'aquests diagrames. Aquest cas específic correspon a un grup que vam descartar inicialment per la manca de qualitat en els enregistraments, però es va poder recuperar el so en altres moments de la recerca. El grup és el Grup 4, de la primera recollida, en el minut 04:57 de la resolució, després de llegir l'enunciat, observar les dades i discutir entre ells què demana el problema, quan es troben en la fase la interpretació, tenen el següent diàleg:

A: Val noies, cal mirar quin és. Mireu, per a cada comunitat autònoma, si els preus estan igualats.

C: Ho apuntem en paper. B: I per què no fem Catalunya i ja està? Que són 4 províncies. . . .

A: Noooooooooo! Ho fem per províncies.

En aquest fragment, el grup han decidit estudiar les diferències dels impostos per províncies, si bé encara no tenen clar com. Quan parlen de verificar si estan igualats, en el diàleg, el concepte que representa són les diferències en el valor dels impostos entre les diferents províncies (df). Per a aquest grup, si són prou diferents, els impostos són injustos, si, per contra, estan més igualats, són més justos. Decideixen, a més, utilitzar totes les dades disponibles, la qual cosa seria estudiar a tota la població (P). Identifiquem així el primer model parcial que mostra la Figura 5.2: calcular les diferències en els impostos de totes les províncies.

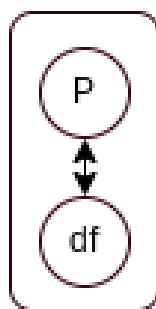


Figura 5.2: GEM1 Grup 4 (Primera Recollida)

Posteriorment, a partir del minut 06:54, els membres del grup estudien el full de càlcul complet i es troben amb dificultats per a implementar el model acordat anteriorment. La dificultat principal es troba en el fet que han de determinar respecte a quina província concreta fan els seus càlculs de diferències, perquè descarten calcular les diferències de totes les províncies respecte a totes elles. A partir d'aquest moment (09:17) canvien el model a implementar, centrant-se en identificar la província amb un valor menor dels impostos (min) com a criteri.

A i C: ¡Cuántas! Badajoz, Cáceres Cádiz, Castellón Corunya B: Sí que sí que importa dónde te sale más barato matricularlo.

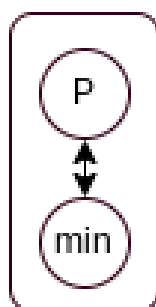


Figura 5.3: GEM2 Grup 4 (Primera Recollida)

Per tant, el grup abandona l'exploració de les diferències (df) a favor d'utilitzar el mínim (min) de les dades proporcionades a la tasca. Així el grup continua el procés de modelització incorporant o eliminant elements, fruit de revisions i relectures de l'enunciat, fins a aconseguir un model definitiu. D'aquesta manera, aquest grup reemplaça el model proposat inicialment i passa a implementar el model descrit en la Figura 5.3.

5.3 Resultats: Models desenvolupats per cada grup

A continuació, procedim a mostrar la caracterització de l'evolució dels models generats per cadascun dels grups.

En els tres primers grups farem una descripció detallada acompanyada d'exemples concrets. La resta de grups, tot i que també inclourem exemples, l'explicació serà més breu i concisa.

5.3.1 Grup 1 (Primera Recollida)

Els estudiants del grup G1 inicien el procés llegint i interpretant l'enunciat, fins al minut 06:58 de l'enregistrament. En aquesta primera fase, no només llegeixen l'enunciat literalment, sinó que també discuteixen sobre l'article i el que demana la tasca. Aquest episodi es veu interromput per la primera fase d'exploració de dades destinada a entendre millor l'enunciat. En analitzar aquestes dades entenen que l'impost varia segons la població (minut 09:06). L'exploració de les dades els proporciona una millor comprensió de l'enunciat. Així, en el minut 15:07 prenen la seva primera decisió: treballar amb totes les dades, per tant, decideixen estudiar tota la població d'estudi, si bé encara no saben com ho faran. Aquest model el representem en la Figura 5.4.



Figura 5.4: GEM1 Grup 1 (Primera Recollida)

Pocs minuts després (15:14), s'adonen que els és impossible amb els recursos de què disposen. Per tant, decideixen estudiar els cavalls fiscals més freqüents. Així el seu criteri de representativitat seria: el tipus de vehicle que utilitza la majoria de les persones estudiades, decidint que aquest seria el turisme de més de 20 cavalls fiscals. Malgrat la proposta d'una membre del grup de seleccionar municipis distribuïts per tot Espanya, decideixen centrar-se en l'elecció dels cavalls fiscals, ignorant aquesta alternativa. Així que s'elimina el concepte de Població (P) del model que construeixen i incorporen l'ús d'una mostra (m_1). La necessitat de prendre una mostra es manifesta quan són conscients de la gran quantitat de dades que presenta el problema i de les dificultats que anticipen en l'ús d'eines digitals per a tractar-les. No s'adonen de les implicacions que comporta extrapolar les conclusions extretes d'una mostra a tota la població. Podem identificar que

estan simplificant (estructurant) la tasca. La Figura 5.5 mostra l'estat parcial del model construït en considerar treballar usant una mostra de les dades.



Figura 5.5: GEM2 Grup 1 (Primera Recollida)

Tornen a discutir sobre el que demana l'enunciat redefinint els seus objectius. Descobrixen que en el full de càlcul estan els municipis classificats per províncies i és impossible estudiar tots els municipis de totes les províncies. Això provoca que redefineixin la mostra triada amb la qual treballaran i decideixin triar una mostra de la mostra que pugui ser representativa (sempre de manera intuïtiva). Els alumnes no defineixen de cap manera què entenen per una mostra representativa, però passen a triar províncies repartides pel territori, i d'elles trien tres municipis. Per tant, de la primera mostra trien una altra mostra. El següent model queda coordinat d'aquesta manera, on $(m_{1.1})$ és la categoria de cavalls fiscals predominant i d'aquesta categoria trien uns municipis determinats (Figura 5.6).

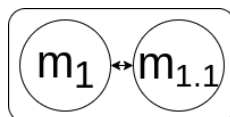


Figura 5.6: GEM3 Grup 1 (Primera Recollida)

En el minut 16.12, mentre els membres del grup continuaven planificant, decidint com triarien la mostra, sorgeix la primera idea sobre com utilitzarien la seva mostra: comparar. No obstant això, en el minut 19:08 de l'àudio observen que necessiten una anàlisi més detallada i introdueixen l'exploració de la variabilitat a partir d'estudiar diferències entre els valors, tot i que no concreten com ho faran. Estan formalitzant matemàticament la tasca sense especificar el mètode exacte. Discuteixen aquest nou enfocament fins al minut 27:14, moment en el qual comencen a executar el seu pla, seleccionant els municipis que empraran per a l'anàlisi. Encara sense concretar com calcularan aquesta diferència. Així que el model final seria el presentat en la Figura 5.7.

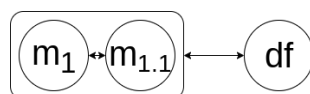


Figura 5.7: GEM4 Grup 1 (Primera Recollida)

La mostra ($m_{1.1}$) no queda fixada inicialment; simplement decideixen sobre la marxa els municipis que consideren més representatius segons els seus criteris. Cerquen municipis que siguin diferents, tot i que a vegades són diferents a causa d'algun prejudici inicial sobre aquest municipi en concret. No és fins que han de redactar conclusions, moment que han de validar el seu model, que defineixen què significa per a ells que les seves dades són diferents. En el minut 78:37 de treball, concreten el concepte "diferència" de manera que els impostos en tres municipis d'algunes províncies i de la capital de província s'assemblen entre ells. D'aquesta manera, el model queda completat introduint el càlcul de les diferències en les mostres triades, encara que el càlcul no es faci explícit.

Producció Grup 1 (Primera Recollida)

En general, les produccions escrites són concises, tot i que es va explicitar, tant per escrit com oralment, que es desenvolupés el procés seguit per arribar a les conclusions i producte final. El següent és un extracte de l'informe presentat pels estudiants que s'ha introduït digitalment en aquest document per permetre la seva legibilitat.

Impuesto de circulación

A. En el artículo dicen que dentro de la misma comunidad e, incluso, la misma provincia las diferencias son evidentes. Qué provincias son más justas y, por tanto, el hecho de matricular en una población o en otra no supone una gran diferencia para los propietarios de los vehículos.

Vehículo: turismo de más de 20 CVF

Barcelona: 217,28

Sant Cugat del Vallès: 224

Fígols: 112

Castellfollit de Riubregós: 138,46

Coruña: 224

Pontedeume: 156,8

Ferrol: 212

Fisterra: 123,2

Madrid: 224,

Alcorcón: 219,97

Aranjuez: 224

Soto del Real: 135,52

Cádiz: 220,90

Chipiona: 196

Tarifa: 213,48
Jerez de la Frontera: 223,44
Santa Cruz de Tenerife: 162,40
Los Realejos: 147,84
Adeje: 159,04
La Orotava: 179,2
Islas Balears: 224
Inca: 221,4
Manacor: 216,16
Formentera: 224

Conclusión: Las islas son más justas a la hora de cobrar el impuesto de circulación comparado con las provincias de la península.

En poblaciones de Madrid y Barcelona el impuesto a pagar es más de 200€ mientras que en las mismas provincias hay ayuntamientos en los que el impuesto es de 100€ menos.

B. Hacienda os pide un informe para evaluar esta situación y decidir si el estado ha de intervenir. Hay que incluir una recogida de propuestas que valoren diferentes soluciones.

A partir de los valores que hemos observado sobre la tarifa del impuesto de circulación en España, hemos llegado a la conclusión de que en la actualidad, cuanto más gente circule por la zona en cuestión, más alta será la tarifa del impuesto. Creemos que este método no es del todo incorrecto; pero pensamos que se debería aplicar de otra forma, es decir, debería ser regulado, puesto que hay zonas en las que la diferencia de cobro es muy alta. Nuestras propuestas son las siguientes: determinar el número de vehículos que circulan por una población y en función de éste cobrar una tarifa más o menos alta; hacer un estudio para saber en qué época se registran más vehículos y a partir de ese estudio saber si se debería subir o bajar el precio de la tarifa.

Esperamos que nuestras propuestas sirvan de ayuda a la hora de fijar tarifas para el impuesto de circulación.

Ja en aquest informe es pot observar com els estudiants seleccionen una mostra de municipis i identifiquen les diferències entre ells a ull nu. Posteriorment, en l'informe, proposen que l'impost hauria de dependre del nombre de vehicles en circulació.

5.3.2 Grup 2 (Primera Recollida)

En la fase inicial d'interpretació de la tasca, el grup G2 formula un primer model per a avaluar l'adequació dels impostos. En aquesta etapa inicial, emergeix el concepte de mitjana, per desenvolupar un model que utilitza com a concepte la mitjana, M , dels valors màxims i mínims dels impostos de cada província (minut 4:30).

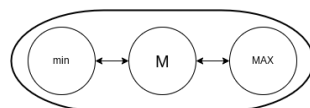


Figura 5.8: GEM2 Grup 2 (Primera Recollida)

En el moment treballar amb les dades, el grup G2 opta per utilitzar totes les dades proporcionades, usant el full de càlcul (Figura 5.9). En cap moment consideren la possibilitat de reduir el conjunt de dades a utilitzar, com si no fos una opció possible. D'aquesta manera, l'estudi de tota la població es converteix en una elecció implícita que esdevé mentre estan duent a terme els càlculs, emprant les matemàtiques. En el minut 14:24, després de completar el procés, es troben indecisos sobre la direcció a prendre i proposen fer una mitjana de tot. Aquesta idea queda descartada perquè no aportaria informació rellevant.

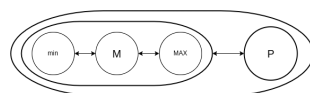


Figura 5.9: GEM3 Grup 2 (Primera Recollida)

Mentre treballen amb el full de càlcul, els membres del grup observen que obtenir un valor concret que els permeti discernir entre les dues opcions que es plantegen per a determinar si un impost és just no els permet representar adequadament la variabilitat de les dades dins de cada província. Per això, decideixen ajustar el model utilitzat (minut 14:35) i incorporen al model un interval, I , centrat en la mitjana calculada prèviament (Figura 5.10). La determinació de l'amplària d'aquest interval és subjectiva, no depèn d'un càlcul específic i respon a l'observació de les semblances o diferència entre les dades.

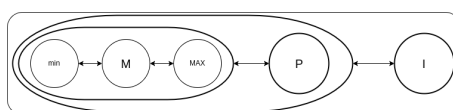


Figura 5.10: GEM5 Grup 2 (Primera Recollida)

A partir d'aquest moment, els integrants del grup G2 procedeixen a classificar sistemàticament les dades segons pertanyen o no a l'interval. Apliquen, d'aquesta manera, procediments matemàtics usant un full de càlcul fins a aproximadament el minut 25. Al cap de 5 minuts en què el grup està escrivint l'informe, s'adonen que no ho han calculat totes les columnes. Malgrat això, decideixen concloure els càlculs i, basant-se en aquesta informació, generar conclusions. En l'informe escrit revelen com han utilitzat aquest marge per a concloure que la situació no és uniforme en tota Espanya. Els estudiants proposen diferents solucions, però en una d'elles s'intueix com aquest marge ho entenen com una necessitat: no tots els impostos han de ser iguals si la distribució de riquesa en el territori no ho és.

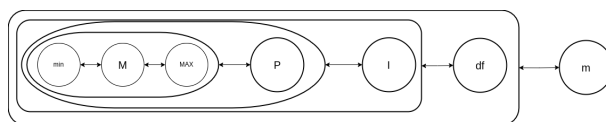


Figura 5.11: GEM7 Grup 2 (Primera Recollida)

Producció Grup 2 (Primera Recollida)

Presentem aquí la producció d'un dels grups més destacat a l'hora d'elaborar el model ric. En el segon paràgraf es revela la complexitat del model. Cal destacar la importància dels enregistraments per aconseguir una descripció precisa de l'evolució del model.

INFORME A HISENDA

A partir d'un estudi que hem realitzat gràcies a una taula de taxes sobre l'impost de circulació, hem arribat a la conclusió que l'estat ha d'intervenir. Per això, hem realitzat una sèrie de propostes per tant d'oferir una ampla visió de la situació actual.

En primer lloc, una possibilitat seria establir un rang de preu diferent a cada categoria tenint en compte els cavalls fiscals dels cotxes i la cilindrada del motor en la categoria de motocicleta. Per arribar a aquest punt, hem fet la mitjana de l'impost de circulació de cada província espanyola agafant la dada més gran i la més baixa, després hem posat un marge i hem decidit que hi havia poques ciutats que estaven dintre d'aquest. Una altra possibilitat seria disminuir l'impost de circulació a aquelles persones que tenen un cotxe elèctric. Ja que aquests models de cotxe no contaminen, cuiden més del medi ambient i la seva adquisició és més costosa.

Una altra proposta seria que, a les diferents províncies d'Espanya hi hagi un impost de circulació una mica similar entre ells. Per exemple: Barcelona és més transitada que Albacete, per això entenem que hi hagi una diferència de preu respecte la importància de cada ciutat però el que proposem és que la seva diferència no sigui tan elevada. Com a conclusió, esperem que aquestes propostes arribin a una solució ja que la situació actual és molt irregular.

5.3.3 Grup 3 (Primera Recollida)

Els membres del grup G3, durant els 6 primers minuts, llegeixen l'article, examinen algunes dades i les preguntes de la tasca. Per a determinar si les tarifes són justes decideixen analitzar un a un cada municipi que apareix en la taula de l'article. El primer element incorporat al model és l'estudi de totes les dades de la població (P). En aquest punt del treball el grup G3 només està considerant les dades disponibles en l'article, una taula amb les ciutats capital de província. No tenen en compte el full de càlcul proporcionat en la tasca, per tant, per a ells totes les dades es limiten a les presentades a l'article. El primer criteri per a decidir si una província és justa és la renda per càpita (RC). A continuació, es mostra un fragment de la seva discussió:

D: No... Alacant, tampoc... Ávila, menys. Badajoz, sí.

V: Val, apunta Badajoz, val. Perquè l'impost d'aquesta ciutat és... què posem? És justa? Per què?

D: Perquè pertany a una comunitat autònoma... amb la renda per càpita (RC) més baixa.

D'aquesta manera, acorden que a menor renda per càpita, més justa és la província en consideració. No obstant això, no expliciten una metodologia per determinar el valor de l'impost per tal que sigui considerat just en aquest context. En aquest punt de l'anàlisi de dades, els estudiants treballen amb una idea compartida, però que no han explicitat ni per a la qual desenvolupen un mètode de càlcul que permeti la seva concreció: la noció que ha d'existir una relació entre la renda per càpita en una província i els impostos aplicats als seus ciutadans.

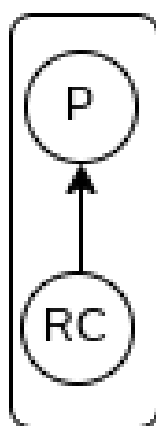
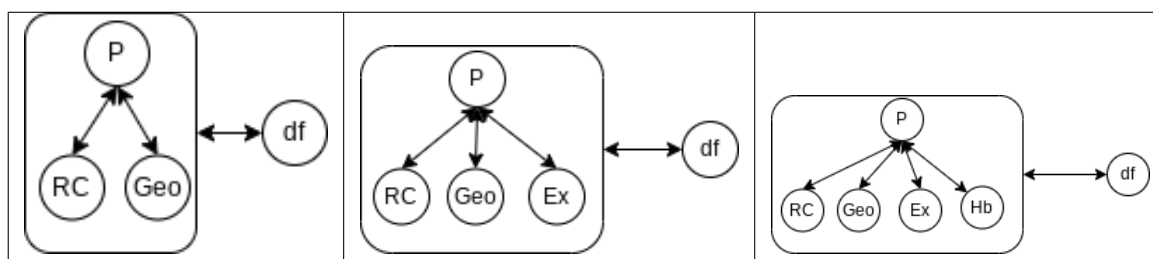


Figura 5.12: GEM2 Grup 3 (Primera Recollida)

Durant la discussió de diversos elements rellevants del context estudiat, els membres del grup van observant la complexitat de la situació i contemplen la possibilitat ampliar el conjunt de criteris considerats. Així, el model s'enriqueix afegint criteris geogràfics (*Geo), després de constatar que els impostos en les zones insulars els semblen més justos, així com també la situació de les ciutats autònomes. Consideren rellevant també l'existència de ciutats en les quals determinats tipus de vehicles estan exempts del pagament d'impostos (Ex) i, aquesta consideració també és presa com a indicador de justícia. El nombre d'habitants (*Hb) és l'últim criteri socioeconòmic utilitzat en el model.

Aquest grup desenvolupa un model basat a establir relacions entre el valor de l'impost i diverses variables socioeconòmiques de cada província, però evita l'anàlisi matemàtica de les dades, és a dir, no utilitza procediments de càlcul de cap mena. En lloc seu, recorren a assignacions intuïtives per determinar si un impost té un valor alt o baix basant-se en la comparació de les dades proporcionades a les taules. Per exemple, en el minut 07:30, decideixen que Badajoz és una província justa respecte al seu impost de circulació perquè pertany a una comunitat autònoma amb una de les rendes per càpita més baixes de l'Estat

Espanyol i el valor de l'impost s'ajusta a aquesta valoració (*df). En una situació similar, en el minut 09:05, decideixen que Ceuta és una ciutat justa perquè és una ciutat autònoma fora de la península Ibèrica, amb les dificultats econòmiques que això suposa (*df) per ells. D'aquesta manera l'evolució i el model amb el qual treballen finalment es mostra en la Taula 5.3.



Taula 5.3: Evolució Final dels GEMs Grup 03 (Primera Recollida)

A mesura que els membres del grup van estudiant casos concrets, perceben la complexitat de la situació i afegeixen noves variables al model, que no utilitzen de manera relacionada. Aquest mètode de treball, que no necessita càlculs específics, els permet avançar ràpidament en la resolució del problema. Aquest enfocament es reforça, ja que es divideixen el treball: dos estudiants revisen les dades i dicten al tercer la seva decisió. D'aquesta manera, les fases del cicle se superposen una vegada han entès la tasca, interpretant les dades sota el seu criteri i validant la conclusió entre ells.

Producció Grup 3 (Primera Recollida)

Aquesta producció reflecteix el model de manera molt precisa. Recordem els indicadors socioeconòmics en què es fonamentava el seu model: renda per càpita, situació geogràfica, les exempcions i nombre d'habitats. Totes són enumerades, sense connexió explícita, a la producció escrita.

Producció

L'impost de circulació: es una tasca que regula l'administració local, els ajuntaments, per tant l'import d'aquest import serà diferent a cada població.

El criteri de justícia en aquest cas estaria vinculat en la proporcionalitat de l'import.

Províncies més justes:

- Badajoz; l'impost d'aquesta ciutat és just perquè pertany a una comunitat autònoma amb la renda per càpita més baixa (diners que genera una comunitat autònoma, dividit pel número d'habitants).
- Càceres; el mateix criteri que Badajoz.
- Ceuta; és justa perquè és una ciutat autònoma fora del territori de la península ibèrica i té diferents costos.
- Melilla; mateix criteri que Ceuta.
- Santa Cruz de Tenerife; en aquest cas per criteris serien d'insularitat, el ser una illa.
- Las Palmas; el mateix criteri que santa Cruz de Tenerife.
- Soria; es justa per ser una de les províncies amb menys població i amb més problemes d'implantació poblacional.
- Pamplona; deixa exempts de l'impost als vehicles de 20c.

Hi ha una gran varietat de diferències en l'import de l'impost de circulació entre ciutats de la mateixa comunitat autònoma. A la comunitat autònoma de Catalunya pot ser on menys diferència hi ha entre els imports d'aquest impost entre les ciutats d'aquesta comunitat autònoma.

Informe:

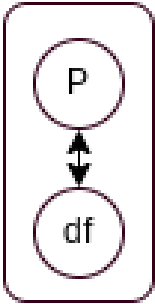
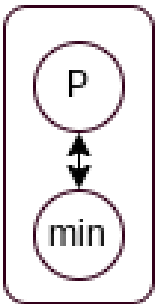
Una vegada revisada la taula d'imports dels impostos de circulació que paguen els ciutadans, és evident que les diferències d'import es notable. Els impostos com el cas del de circulació, són necessàries per mantenir l'estat de benestar en els països desenvolupats. Per tant, cal mantenir-los, el que si seria important seria, adequar-los i rebaixar la carga impositiva, és a dir baixar els impostos.

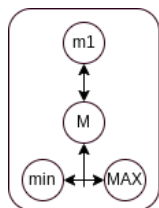
5.3.4 Grup 4 (Primera Recollida)

En els següents grups, anem explicant seqüencialment i amb exemples de les transcripcions els GEMs/Models elaborats pels nostres estudiants. Observareu que el temps indicat en l'aparició del model i el temps de les transcripcions pot ser que no sigui el mateix. Com ja s'ha comentat, els enregistraments es feien en dies diferents, en períodes de deu minuts, aproximadament, a demanda del grup. A les transcripcions posarem el temps real de

l'àudio, però indicarem el temps global.

Taula 5.5: Quadre resum dels GEMs del Grup 4 (Primera Recollida)

	Inicialment aquest grup entén el concepte de justícia com igualtat, per tant, cal que detectin les diferències. (P) es refereix a l'estudi de tota la població i (df) a l'estudi de diferències (04:57). 04:57 A: Vale chicas, hay que mirar cual es, tías, mireu de cada de cada comunitat si els preus estan igualtats. 06:42 C: Però de totes no Berta? 06:43 A: De totes.
	Canvien de "diferent" a "el més econòmic" (09:25), per tant, opten pel mínim. Observem com no es fa, encara, el pas al concepte matemàtic. 09:25 B dónde te sale más barato matricularlo -mentrestant van parlant i esmenten ciutats.



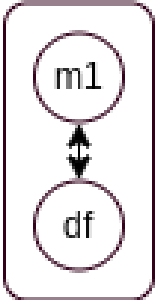
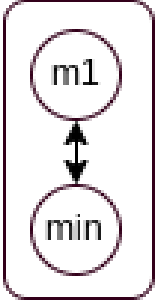
Calculen la mitjana dels turismes, establint una restricció i, per tant, acotant la mostra. A partir d'aquesta mitjana volen trobar el mínim i el màxim, ja comencen a utilitzar un llenguatge matemàtic (11:56). Malgrat això, encara no verbalitzen com identificaran quines són les províncies justes. Tot això es realitza sense usar ni calculadores ni ordinadors. Suposem algun ús de la calculadora, però el fet de no emprar-los, així com la manca de claredat sobre com tractar les dades que dona aquest model és el que ens fa abandonar-lo després d'un temps de treballar-hi.

01:54 LM: La mitja la mínima i la màxima

02:02 B: De cada columna Turismos haces lmnop dependiendo los caballos, de la l pues haces el mínimo y el máximo de la provincia de m también el mínimo y máximo de la provincia

02:13 JA: ¿Por qué no hacemos Almería y vamos por orden?

02:18 LM: Almería

	En començar un altre dia de treball (18:18), tot i que algun membre del grup recorda la idea inicial de realitzar càlculs de mínims i màxims, decideixen descartar aquesta opció i, en lloc d'això, busquen manualment el més econòmic dels automòbils (ells anomenen les quatre columnes). Tot i que suggereixen que volen abordar les motocicletes, no disposem d'indicis clars en les gravacions ni en la producció. 01:17 B: És això, las tenéis que mirar o sea que estas 4 primeras siguin, per exemple: 15 16 i 14, no 23 i 10, saps en plan que 01:30 A: ¿Cómo?¿Cómo? 01:32 B: Que sigui més seguits 01:34 JA: Vale 01:35 JA: Doncs a La Corunya no ¿eh? 01:37 JA: La Corunya no 01:41 L: Creo que sí 01:53 L: Ho hem d'acabar avui? 01:54 B: Nosaltres fem les motocicletes... buscar la máxima y la mínima no? 02:49 B: No, vale sí, però ho has de fer en general. Vull dir aquí això a La Corunya és barato però igual aquí hi ha un més barato crec a La Corunya.
	Finalment (22:24), decideixen revisar el valor mínim de la mostra intuitiva que havien seleccionat. 02:21 B: Vull dir que ... tampoco sé cómo explicarlo. 02:26 B: Òbviament hi haurà un o sigui hi haurà els que són més cars i els que són més baratos hem de buscar els més baratos.

Producció Grup 4 (Primera Recollida)

Es pot observar com apliquen el seu model, aquell en què busquen el valor mínim dins de la mostra proporcionada.

Producció

La primera província més justa es Melilla, després Zamora, S.C.Tenerife, Jaén. Per escollir la millor opció farem una llista de pros i contres i després traurem una conclusió: Pros: -segons la província o municipi on visquis et pot sortir més econòmic. -si vius en una on és més car pots anar a una altre a matricular te perquè et surti més barat -si no intervé l'estat tot seguirà com sempre, per tant és millor que no intervingui.

Contres: -el preu varia molt segons la província o el municipi on visquis -si vols que et surti molt més econòmic has d'anar a una altre ciutat, però els "gastos" de desplaçament faran que et surti al mateix preu o inclòs més car. -hi ha moltes desigualtats per províncies i municipis - és millor que l'estat intervingui perquè així tot es regularà i tots pagarem el mateix. La nostre conclusió és que és millor que l'estat intervingui ja que així tots pagarem el mateix i tot serà més just, una proposta per igualar tots els preus de matriculació seria fer una mitjana de tots els preus i que el número que ens donés fos el preu a pagar. D'aquesta manera tots pagarem el mateix i ningú es queixarà.

5.3.5 Team 01 (Segona Recollida)

Aquest grup ha implementat un model que ens va suposar un gran desafiament perquè tenien algun error de càlcul i, per tant, no mancava coherència entre l'explicació a la producció escrita, els àudios i els resultats que donaven en la resolució de la tasca. Una de les dificultats més evidents que va tenir el grup és el refinament de la mostra. Van començar considerant tota la taula donada en la notícia (N), recordem que eren la majoria de les ciutats capitals de província. Malgrat ser conscients de l'existència d'altres tipus de vehicles van centrar-se en estudiar cotxes i motocicletes m_1 . Posteriorment, van considerar estudiar per Comunitats Autònomes m_{11} , per més tard voler explorar per províncies m_{12} . Van tornar a considerar extreure conclusions de les Comunitats Autònomes, aquest cop només dels cotxes de menys de 8 cavalls fiscals m_{111} . Van especificar que ho farien per Comunitats Autònomes i per les cinc primeres columnes de la taula m_{112} . Van canviar a la m_{113} , de nou per comunitats autònomes però només els cotxes de menys de 8 cavalls fiscals i els de més de 20 cavalls fiscals. Finalment, van considerar també les motocicletes de 125 centímetres cúbics (ccc) i 1000 ccc m_{114} . Aquesta última mostra ja va ser implementada un cop ja tenien el model amb la m_{113} , és a dir, amb les cotxes de menys de 8 cavalls fiscals i de més de 20 cavalls fiscals.

És necessari detallar el model final utilitzat, ja que, revisant produccions i àudios, esdevé força confús i requereix un apartat propi. El grup disposa d'una taula amb les ciutats capitals de província i els cost dels impostos que van dels cotxes de menys de 8 cavalls de vapor fiscals (CVF) fins als de més de 20 CVF. Per cada Comunitat Autònoma enumeren les seves províncies i registren en un full el cost dels impostos de menys de 8 CVF i de més de 20 CVF. Escullen la ciutat que té el màxim del menys 8 CVF i el mínim de més de 20 CVF. Aquestes serien les províncies escollides (recordem que en realitat són ciutats). Ara tenim quatre valors, els dos valors de menys de 8 CVF (el màxim i el que acompanya al mínim de més de 20 CVF) i els dos valors de més de 20 CVF (el mínim i el que correspon al màxim de menys de 8 CVF). Fa la diferència entre els dos menors de 8 CVF i els dos majors de 20 CVF. De nou fa la diferència d'aquests dos valors i els ordena de menor a major, considera el mínim com el més just però té en compte els altres valors. En la imatge 5.13 es veu un exemple de la producció escrita.

$\frac{34}{51}$

Palma de Mallorca	23'61 - 224	→ Balears	
Palma de Majorca			
Ibiza			
Formentera			
Santa Cruz de Tenerife	18'72 18'72 - 172'40		Canàries
Palma de Gran Canaria	20'95 - 185'92		
			3.17 - 13'52
Avila	20'69 - 200'48		10.26
Burgos	23'19 - 205'80		
Leon	20'95 - 209'40		
Salamanca	25'12 - 224	Castilla y	
Palencia	18'04 - 22 200'97	Leon	
Segovia	24'32 - 224		
Soria	21'13 - 187'57		3.19 - 30'43
Valladolid	25'24 - 224		33.24
Zamora	12'62 - 188'16		
Merida	6'31 - 56	Extremadura	
Guadalajara	23'99 - 212'93		
Toledo	20 23'18 - 223'10		
Audace	23'98 - 217'27	Castilla la Mancha	
Ciudad Real	25'24 - 224		1.25 - 11'07
Uenca	22'09 - 224		9'82

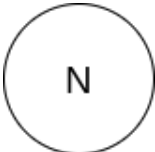
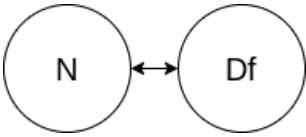
Figura 5.13: Part de la producció escrita pel Team 01 (Segona Recollida)

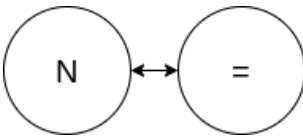
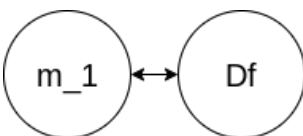
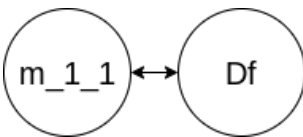
En aquesta imatge, es destaquen dues comunitats autònomes: Castella i Lleó i Castella-la Manxa. Castella i Lleó és una de les comunitats que té un error en el càlcul. El grup ha triat Segovia i Sòria com a "províncies" amb què aplicaran el model, argumentant que Segovia té el valor màxim dels turismes de menys de 8 CVF i Sòria, el valor mínim dels turismes de més de 20 CVF. Però en realitat, el mínim dels turismes de més de 20 CVF

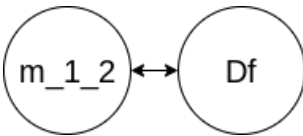
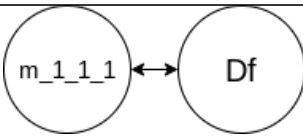
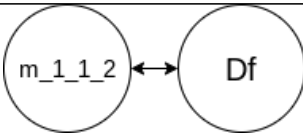
és Zamora. Amb Castella- la Manxa no hi ha hagut cap error. No han marcat les dues províncies escollides, només una, Ciudad Real, però l'altra és Guadalajara. De Guadalajara tenim els següents valors: 23,99 pels turismes de menys de 8 CVF i 212,93 pels turismes de més de 20 CVF. A Ciudad Real en tenim 25,24 per turismes de menys de 8 CVF i 224 per turismes de més de 20 CVF. Fem la diferència entre 25,24 i 23,99 i n'obtenim 1,25. Fem la diferència entre 224 i 212,93 i n'obtenim 11,07. I la diferència entre aquests dos valors és 9,82. Aquest valor de 9,82 serà l'indicador fet servir per comparar. Observem que amb les comunitats autònomes que només tenen una província o bé són ciutats com Melilla i Ceuta només assenyalen els valors.

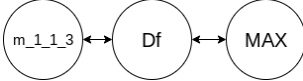
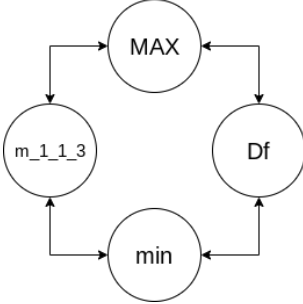
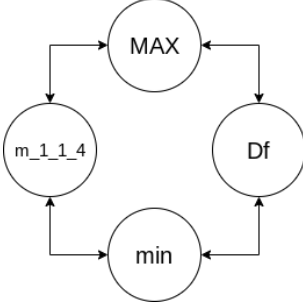
A continuació descriurem els models que han sorgit al llarg del procés de resolució de la tasca a la Taula 5.7

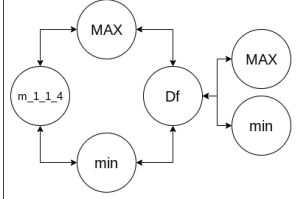
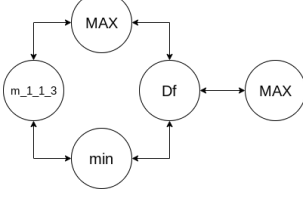
Taula 5.7: Quadre resum dels GEMs del Team 01 (Segona Recollida)

	Apareix el concepte de població, el nombre total de dades en el minut 13:08 (durant el segon àudio). 02:21 A: Pues se tiene que calcular de cada provincia,
	Entenen que de cada província és necessari calcular la diferència, tot i que encara no han definit la manera concreta de fer-ho; no obstant això, el concepte apareix clarament al minut 13:21. Posteriorment, al minut 15:03, tornen a reprendre aquest model després de qüestionar-se el concepte d'igualtat. 02:27 D: Madre, madre, madre, pero ¡qué! 02:30 A: se tiene que calcular de cada provincia, ehm, la diferencia.

	Els membres del grup continuen sostenint la idea de l'anàlisi dels impostos de tota la població (és a dir totes les poblacions oferides a la tasca) per determinar quines són les províncies més justes. La seva noció de justícia és que els impostos són molt similars (gairebé iguals), però realment no disposen d'una metodologia específica per a aconseguir analitzar o quantificar aquesta igualtat (14:20). 03:33 A: Pues tenemos, que tenemos ... todas las ciudades que hay dentro de una provincia y calcularlas después entre provincias compararlas y de ahí sacar las más, las más, ¿cómooooo? las más iguales y ahí compararlas con dentro del país. 03:46 D: Todo, todo, todo, todo.
	De nou, seleccionen la diferència com a indicador de la justícia, però aquest cop només per a motocicletes i cotxes, això ho indiquem amb (m_1). (15:37) 04:50 D: En coches y motocicletas ¿no? En las dos cosas. 04:52 A: Claro, diferencia, después, Madrid tal, pues no sé qué, tal, pues no sé qué, tal.
	Seguidament acoten el seu estudi a les comunitats autònomes (15:51), per tant, tenim una nova mostra. 05:04 D: Sí, por comunidades.

	(16:08) Novament, volen fer el càlcul per províncies però a diferència de l'anterior moment, ara el procés està limitat als cotxes i motocicletes. 05:11 ...calculamos provincias, Cataluña ¿qué es? Una comunidad autónoma 05:14 D: AR: Sí. A: A mí la geografía se me da fatal, provincia 05:18 AR: Comunidad Valenciana D: A: Vera pues, venga comienza por Cataluña 05:20 A: No, espera, no calculamos, calculamos, provincias, después, dentro de las provincias comparamos
	(18:58) Treballen per Comunitats Autònomes amb els turismes de menys de 8 CVF. 08:11 A: entonces cómo lo queréis? vale podemos entonces hacer como vamos a hacer de menos de 8 calcular las por aquí después nanananana.
	En el minut 19:02 decideixen treballar amb els cinc valors que apareixen a la columna dels turismes, és a dir, amb els valors dels impostos dels turismes de menys de 8 CVF fins als de més de 20 CVF. 08:19 D: No, en Cataluña ponemos Barcelona y los cinco números.

	En aquest punt, tot i que ja han desenvolupat el seu model, no el comuniquen de manera explícita. A continuació, es descriu el que ells expressen en els àudios. 10:30 D: aquí es lo que te piden o sea el máximo precio es 7 € de diferencia. 10:36 A: ¡Ah! ¿Te pide el máximo? 10:36 D: ¿Cuáles son las más justas?¿Sabes?
	08:19 D: no en Cataluña ponemos Barcelona y los cinco númerosy ya está 08:23 A: y cómo calculas el final que tiene que ser un número no 80? 08:26 D: Pues pones del primero al último 08:29 o sea este es más barato este es el más caro eso está clarísimo, espérate que he subido sin querer.
	Seguidament, amplien l'anàlisi, passant dels turismes de menys de 8 CVF i de més de 20 CVF a les motos, abarquant des de les de 125 centímetres cúbics fins a les de 1000 centímetres cúbics. 01:56 D-AR: Las motos 01:58 A: No, no, no, pues 01:59 D: Vale, no hacemos las motos 02:01 A: No, no, da tiempo 02:03 AR: Venga, vamos a hacer las motos

	Després de calcular les diferències, aborden la decisió final sobre si triar el valor màxim o mínim. Retornen a l'enunciat per verificar les instruccions i assegurar-se de prendre la decisió correcta. 00:49 A: Tenemos que coger el que menos diferencia tenga ¿no? 00:53 D: ¿Uhm? 15, 17 01:02 A: Tú ¿Se tiene que coger el que menos diferencia tenga? 01:03 D: Espérate A. 08:35 A: Tíos ho estem fent al revés, 08:36 A: Posa: Quines províncies. Quines províncies són més justes [Llegeix l'enunciat]. Y hemos calculados la que menos justa es.
	En un moment del discurs parlen de la màxima diferència com allò que caracteritza el més just, però no és el model final.

La seqüenciació dels models que han anat apareixent requereix, indiscutiblement, el context en què s'han desenvolupat per donar sentit al model. Aquesta necessitat és evident quan, per exemple, els estudiants han de tornar a l'enunciat per validar el seu model. Per tant, els models, sense el procés explícit, no ofereixen una informació completa.

Producció Team 01 (Segona Recollida)

Aquest grup té una producció per escrit que hem escanejat, de la qual ja hem mostrat alguns fragments anteriorment. Destaca en la seva producció escrita perquè inicialment, fan un resum de les idees més importants de l'enunciat (Figura 5.14)

CORRES

- impuestos de circulación - impuesto de vehículos de tracción mecánica.
- obligatorio (ITV)
- Ayuntamiento (gestión)
- varía el precio según el territorio (7 veces superior) 1990
- paraíso fiscal (motor)
- recaudación de dinero para, aparatos, vías de circulación, vie pública
- ~~se~~ registro el coche en una provincia más barata
- equidad fiscal
-

20 caballos fiscales (sea melilla 44,81)	
	(burgos 205,50)
"	(guadalupe 290'61)
	(molinos 140'4)
	) 5km

- quenda quiere regularlo porque piensan que se usa de manera abusiva
- desequilibrios en los fondos por una mala gestión económica.

Figura 5.14: Pàgina 1 de la producció del Team 01 (Segona Recollida)

Tot seguit redacten l'enunciat i els passos que volen fer per resoldre la tasca. Immediatament comencen amb els càlculs. (Figura 5.15)

① A l'article diuen que dins de la mateixa i fins i tot la mateixa província són diferents. Quines províncies són més justes i per tant més iguals en una població o en un altre no gràfic un comparatiu.

"Calculamos provincias

"Comparamos para solo el resultado de la C. Autónoma

"Y después no comparem con los otros C. Autónomos

15

Barcelona : 23'47 - 2017'28	}	Cataluña	7'28
Leida : 25'24 - 224			
Taragona : 25'24 - 224			
Girona : 25'24 - 224			
			<u>76'128</u>

Alicante 22'28 - 204'75	}	Valencia	- 201 - 17'01 = 15
Castellón 24'29 - 221'76			
Valencia 21'20 - 219'01			

Almería 23'12 - 205'11	}	Andalucía	2'12 - 18'89 = 16,77
Cádiz 24'90 - 270'60			
Córdoba 24'22 - 224			
Granada 25'24 - 224			
Huelva 25'24 - 224			
Jáen 17'67 - 224			
Málaga 24'35 - 216'25			
Sevilla 22'33 - 224			

Figura 5.15: Pàgina 2 de la producció del Team 01 (Segona Recollida)

Continuen amb els càlcul aplicats als turismes: Figures ??, 5.17 i 5.18. En la pàgina 5 trobem la conclusió a què han arribat.

$\frac{34}{51}$

Palma	23'61 - 224	→ Balears	
Palma			
Ibiza			
Formentera			
Santa Cruz de Tenerife	18'72 18'72 - 172'40		Candide
Palma de Gran Canaria	20'95 - 185'92		
			3.27 - 13'52
Avila	20'69 - 200'48		10.26
Burgos	23'19 - 205'80		
Leon	20'95 - 209'40		
Salamanca	25'12 - 224	Castilla y Leon	
Palencia	18'04 - 224		
Valladolid	24'32 - 224		
Segovia	24'32 - 224		
Salamanca	21'13 - 187'57		3.19 - 36'43
Valladolid	25'24 - 224		33.24
León	12'62 - 188'16		
Palma	6'31 - 56	→ Mallorca	
Madrid	23'99 - 212'93		
Toledo	23'18 - 223'10		
Audace	23'98 - 217'27	Castilla la Mancha	
Ciudad Real	25'24 - 224		1.25 - 11'07
Valencia	22'09 - 224		9'82

Figura 5.16: Pàgina 3 de la producció del Team 01 (Segona Recollida)

99,4	
Leiria 12'60 - 112	Leiria
nuesca 23'98 - 212'80	Aragón 1'26 - 11'2 9,94
Barrozo 22'50 - 224	
Teruel 25'24 - 224	
Logroño 21'41 - 189'94	ARAGÓN LA RIOJA
Pamplona 20'02 - 150'17	Navarra
Caceres 17 - 140	Extremadura 2'95 - 3'6,18 33,33
Badajoz 19'85 - 176'19	
Madrid : 20 - 224	Madrid
Ourense 21'35 - 22'18'10	Galicia 1'43 - 33'19 31,71
Lugo 21'72 - 224	
Pontevedra 20'29 - 190'86	
Orense	
193,37	
Murcia 22'30 - 216'90	Murcia
Oviedo 23 - 224	Asturias 2'31 - 23'52 2121
Gijón	
Astoria 20'69 - 200'40	
Melilla : 6'31 - 56	Melilla

Figura 5.17: Pàgina 4 de la producció del Team 01 (Segona Recollida)

Santander - 25'16 - 223'33 } Cantabria
Álava
Gipuzkoa
Bizkaia 27'50 25'12
San Sebastián 27'50 - 351 } País Vasco 2,09 - 4'3
Vitoria 27'21 - 355'80 2,71

País Vasco tiene la diferencia más justa con
un 2'71 y le sigue Cataluña con un 7'22
la menos justa en Extremadura con un 33'33

Figura 5.18: Pàgina 5 de la producció del Team 01 (Segona Recollida)

Van seguir el mateix procediment amb les motocicletes, sintetitzant el procés en dues pàgines (Figures 5.19 i 5.20). A la pàgina 7, les conclusions són presentades de manera concisa i breu.

FOTOS	
(*) Coruña	6,65 → 121,15
(*) Albacete	7,87 → 107,83
(*) Alicante	8,44 → 111,34
(*) ALMERIA	8,10 → 110,88
(*) AVILA	8,13 → 119,34
(*) BADAJOZ	6,95 → 95,29
(*) BARCELONA	8,39 → 127,53
- Bilbao	10,08 → 155,04
[] Burgos	8,13 → 111,32
(*) Cáceres	7,80 → 84
(*) Cantá	8,80 → 119,60
(*) CASTELLÓN	8,75 → 119,95
(*) Ceuta	4,40 → 60,60
(*) Ciudad real	8,84 → 121,16
(*) Córdoba	8,57 → 117,53
(*) Cuenca	7,84 → 106,01
(*) Girona	8,84 → 121,16
(*) Granada	8,84 → 121,16
(*) Guadalupe	8,40 → 115,18
(*) Huelva	8,84 → 121,16
(*) Huesca	8,84 → 121,16
(*) Jaén	6,63 → 121,16
* Las Palmas	4,42 → 100,36
[] León	8,84 → 121,16
• Logroño	7,50 → 102,75
(*) Lugo	7,32 → 104,16
(*) Lleida	6,83 → 121,16
Madrid	7,00 → 121,00
(*) Malaga	6,55 → 117,00
(*) Melilla	2,21 → 30,29
Murcia	7,65 → 119,95
(*) Orense	7,45 → 107,15
(*) Oviedo	8,00 → 121,16
[] Palencia	6,73 → 116,49
Palma Mallorca	8,84 → 121,16
(*) Pamplona	5,04 → 99,01
Cataluña	7,12 → 117,53 8,84 → 121,16
Aragón	8,80 → 121,16 8,84 → 121,16
Ceuta	→ 4,40 → 60,60
Melilla	→ 2,21 → 30,29
Extremadura	6,95 → 84 8,30 → 95,29
Andalucía	5,59 → 110,88 8,84 → 121,16
Galicia	6,65 → 103,24 7,45 → 121,15
Canaria la Verde	7,74 - 107,83 8,84 - 121,16
C. Valenciana	7-30 - 111,39 8,75 - 121,16
Asturias	8,00 → 119,34 8,13 → 121,16
P. Vasco	9,14 - 135,04 10,65 - 170,82
Nueva León	5,70 - 78,15 7,84 - 111,6

Figura 5.19: Pàgina 6 de la producció del Team 01 (Segona Recollida)

Ⓟ Pontvedra	7,02 → 103,24
Ⓟ Salamanca	8,73 → 120,38
- San Sebastián	9,14 → 160,37
✗ 3 Cruz Teranga	6,03 → 82,69
Ⓟ Santander	8,81 → 120,80
Ⓟ Segovia	8,84 → 121,16
Ⓟ Sevilla	5,99 → 121,16
Ⓟ Soria	7,40 → 101,46
Ⓟ Tarragona	7,12 → 121,16
Ⓟ Teruel	8,84 → 121,16
Ⓟ Toledo	8,19 → 120,68
Ⓟ Valencia	7,38 → 121,16
Ⓟ Valladolid	8,84 → 121,16
- Witopia	10,65 → 170,32
Ⓟ Zamora	5,70 → 78,15
Ⓟ Zaragoza	8,20 → 121,16

G. Girona

4,42 → 82,69

6,03 → 100,36

Rioja

7,50 → 101,75

Madrid

7 → 121

P. Mallorca (Balears)

8,84 → 121,16

Cartagena

8,81 → 120,80

Navarra

5,04 → 99,01

La de menos diferencia es Melilla con

128,07

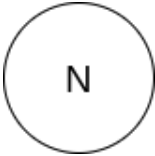
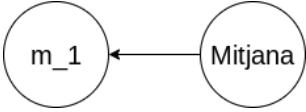
La que más es Madrid 114

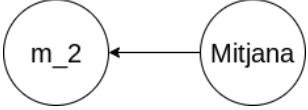
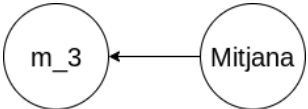
Figura 5.20: Pàgina 7 de la producció del Team 01 (Segona Recollida)

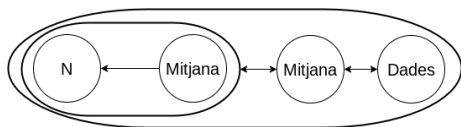
5.3.6 Team 02 (Segona Recollida)

Aquest grup treballa amb el full de càlcul adjunt. Simbolitzem amb N totes les dades donades a la tasca, però a diferència dels anteriors grups, aquí totes les dades significa analitzar totes les dades donades de totes les poblacions publicades en el full de càlcul donat a la tasca. Durant les converses en les gravacions, demostren coneixements per utilitzar el programa.

Taula 5.8: Quadre resum dels GEMs del Team 02 (Segona Recollida)

	Com ja hem comentat aquest grup treballa amb el full de càlcul. I decideix treballar, en primera instància amb totes les dades proporcionades. (9:58). 00:47 ...Vale, llavors agafem, jo el que faria seria agafar un (¿?) anar mirant poc a poc l'EXCEL i anar agafant, pues els preus.
	Canviem tarifes o impostos, les dades, per preus, just a la mateixa frase que hem citat anteriorment 00:55 ...agafant pues, els preus.
	Realitzen una primera restricció de la població seleccionant una mostra específica: cotxes m_1 i procedeixen a calcular la (Mitjana). 01:56 ...I anar a fer la mitja de tots, de tots, els de tots els cotxes.

	Decideixen fer una nova restricció per comunitats autònomes, ja que perceben un volum excessiu d'informació a tractar. 04:04 P: Per això, perquè si hi han un montón seria agafar de cada municipi, de cada província un montón de províncies 04:12 M: ¿No seria més de Comunitat Autònoma?
	Modifiquen la selecció de la mostra i considerant calcular la mitjana per a cada província. 04:28 P: Barcelona. 04:32 M: Llavors, jo que et faria, és fer una mitjana, diguem-ne, sats, per exemple de Cuenca, vale? 04:41 M: n'hi ha masses, llavors el que faria seria una mitjana de cada província.



El model final pren forma, però tornen a considerar totes les dades. Amb la intenció de calcular la mitjana per a cada província i comparar-la amb la mitjana global, expliquen el procediment utilitzant incorrectament el terme 'mediana' en lloc de 'mitjana', ja que es confonen amb els termes.

1:32 P: Jo crec que hauríem de fer tipus, no sé, jo crec que segons, no sé, si féssim un tipus d'Albacete.

11:49 M: La mitjana

11:50 P: Llavors valorar les províncies per... P: Sí de cada cosa o de tots no sé la mitjana, eh?

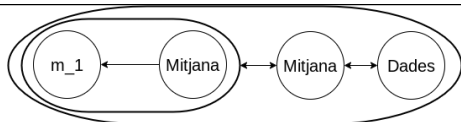
12:06 M: De cada cosa perquè són diferenciades, bueno, si fem la mitjana de cada cosa, de cada província.

P: Vale, el otro día que no estabas, eeeeh, llegamos a la conclusión que teníamos que hacer la mediana de todo esto.

A: ¿Sí?

00:32 P: De, o sea, de cada uno de estos de cada provincia. de cada municipio, de cada provincia, y después comparar, o sea, comparar, esto con la mediana

A: Val.



Prenen la decisió de limitar el mètode d'anàlisi als cotxes.

01:09 P: Ja, però podem per exemple, fem tipus
els cotxes i ho mirem els cotxes.

	Decideixen limitar el càlcul als cotxes als de menys de 8 CVF. 01:21 Els cotxes de vuit no sé que d'Albacete.
	El grup creu que és necessari ampliar lleugerament la mostra i se centren en les tres primeres columnes que contenen informació sobre els turismes en el full de càlcul proporcionat, amb l'objectiu de millorar la solidesa de la resolució de la tasca. 06:03 P: Però ja, no fa falta només ho fem de las tres columnes del cotxe i llavors ja tindrem una idea de la que es justa.
	Aquest model el descarten gairebé immediatament. Dubten sobre si la mostra és massa petita i volen afegir els autobusos. 08:55 P: Ehm M: ara faria els autobusos. Vale? 09:01 P: No sé jo crec que si fem dels cotxes.

Producció Team 02 (Segona Recollida)

Observem com a la seva producció breument exposen el model que han utilitzat quan justifiquen les seves conclusions: Considerem que la província més justa és Burgos, ja que té més localitats que s'acosten a la mitjana de l'impost per a tota la província.”

Producció entregada:

Albacete: 32

Alacant: 38

Almería: 36

Ávila: 224

Badajoz: 72

Illes Balears: 18

Barcelona: 78
Burgos: 329
Cáceres:79
Cádiz:13
Castella:35
Córdoba:27
Ciudad real:43
Coroña:27
Cuenca:177
Girona:55
Granada:77
Guadalajara:262
Huelva:17
Huesca:49
Jaén:30
León:168
Lleida:92
La Rioja:54
Lugo:54
Madrid:42
Málaga:27
Murcia:20
Ourense:79
Asturias:20
Palencia:174

Quines províncies són més justes i, per tant, el fet de matricular en una població o en una altra no suposa un greuge comparatiu pels propietaris dels vehicles.

La província més justa és Burgos per el fet de que té més localitats que s'acosten a la mitjana de l'impost de tota la província. Això vol dir que en aquesta província s'està calculant en base a mida, motor, cavalls de potencia, quilowatt, emissions de CO2 i el pes del vehicle amb això es determina l'import i no depenent de que vulgui l'ajuntament. Hisenda us demana un informe per avaluar aquesta situació i decidir si l'Estat ha d'intervenir. Ha d'incloure un recull de propostes que valorin diferents solucions. Creiem que l'Estat ha de intervenir per arribar a posar un preu general en base a tot el que tenen en compte i no en lo que cada ciutat decideixi. Si no el que passaria seria que la gent matricularia on fos més barat per així no pagar tant.

Aquí tenim (Figura 5.21) una mostra de la taula dinàmica que van utilitzar. Aquesta taula calcula les mitjanes dels impostos de circulació per províncies i es trobava en el full de càlcul proporcionat per treballar. Es presenta en una pestanya separada dins de l'arxiu entregat a la tasca.

	A	B
1		AVERAGE de l'
2		#DIV/0!
3	Albacete	16,21218391
4	Alicante/Alacant	17,13141844
5	Almería	15,85359223
6	Asturias	18,32179487
7	Ávila	13,09221774
8	Badajoz	15,24969697
9	Barcelona	22,13836013
10	Burgos	13,19681941
11	Cáceres	14,02251121
12	Cádiz	20,78136364
13	Cantabria	16,42186275
14	Castellón/Castell	15,79288889
15	Ceuta	25,24
16	Ciudad Real	16,69617647
17	Córdoba	18,40626667
18	Coruña, A	15,78419355
19	Cuenca	13,74642857

Figura 5.21: Fragment Full de Càlcul Team 02

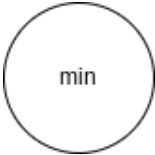
Un altre component del grup també tenia un full afegit al seu full de càlcul. Era un llistat de nombres, no sabem si són anotacions auxiliars.

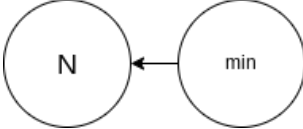
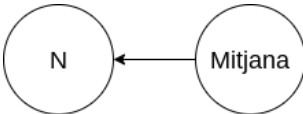
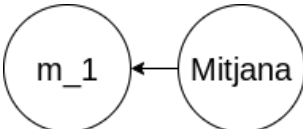
5.3.7 Team 03 (Segona Recollida)

Aquest grup va estar a punt de ser eliminat, ja que recurrentment cerquen informació a Google com a resposta a l'activitat. Però aquesta cerca estava basada en una visió del problema plantejat, potser inicialment sí, però després la cerca és una ajuda al model plantejat pel grup.

Aquest grup va estar a punt de ser exclòs, ja que sovint recorrien a Google per obtenir respostes a l'activitat. Malgrat això, aquesta recerca es basava en una comprensió del problema plantejat. Potser, inicialment sí que la cerca en Google era la cerca de la solució a la tasca, però més endavant, la cerca es va convertir en un suport per al model desenvolupat pel grup.

Taula 5.10: Quadre resum dels GEMs del Team 03 (Segona Recollida)

	En començar la tasca volen, directament, trobar la resposta en Google. 00:06 V: Pues vamos a buscar por Google.
	Cercar, el què? És quan escullen el mínim com a indicador de justícia. L'objectiu inicial de trobar la resposta exacta en Google es transforma en un procés de reflexió col·lectiva per determinar què consideren com a indicador de justícia. Finalment, coincideixen en la idea que l'indicador més adient per avaluar la justícia en aquest context és la cerca del valor mínim. 00:55 Pero ¿Cómo sabemos cuál es la más justa? En plan ¿Tiene que ser el número más pequeño? En plan, no sé.

	Així, opten per realitzar una cerca a través de Google per identificar a quina ciutat s'abona una quantitat menor d'aquest impost. . 01:11 V: Menos se paga por este tributo.
	Cessen la recerca a Google i, en canvi, se centren a examinar la taula proporcionada a la notícia. Aquest model és el definitiu, tot i que contempen altres possibilitats. 01:56 V: Esto lo hemos de buscar también eh! Aquí no está 05:39 A: Es que hemos de mirar aquí el que tenga menos precios
	Decideixen calcular la mitjana dels valors d'impostos que apareixen a la taula proporcionada 08:04 V: Yo haría una media de esto de todo los destos.
	Volien prendre una mostra, la qual descartaria aquells valors que ja són considerats elevats, és a dir, els màxims. 08:44 V: sí vale 08:44 A: Pero las que se ven que ya son caras no las hacemos C: Claro (descarten perquè no saben fer-ho).
	Acorden cercar el valor que es troba a la meitat com a indicador que assenyalava la frontera entre els costos més elevats i els més econòmics, és a dir, la mediana. 00:27 Que es la mitad como tampoco es muy caro es lo más barato pero lo menos barato.

Producció Team 03 (Segona Recollida)

De manera concisa, descriuen el seu procediment: revisar la taula i consultar altres fonts per trobar els valors mínims que consideren com els més justos.

Producció

Ceuta I Melilla és on menys es paga per aquest tribut. I a Zamora, Cáceres , València i Jaén també es paga poc.

Ho hem buscat en La Vanguardia y ho hem comprovat mirant la taula.

Nosaltres pensem que l'estat hauria d' intervenir perquè creiem que no és just que unes províncies hagin de pagar un impost de circulació més alt que altres.

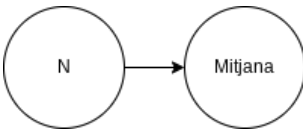
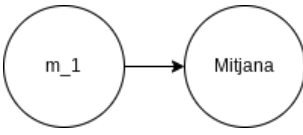
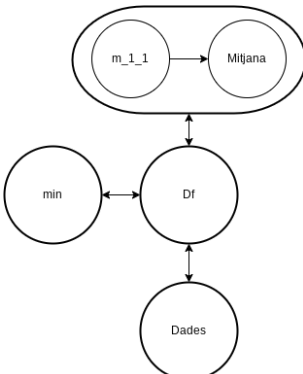
Propostes:

- Que els ciutadans es manifestin
 - Que l'estat canviï l'impost de circulació a un preu que no
 - Sigui ni molt car ni molt barat i que totes les províncies
 - Paguin el mateix impost
 - Que facin unes votacions cada província per decidir si canviar o no l'impost de circulació
-

5.3.8 Team04 (Segona Recollida)

Tot i que el grup (Team 4) ha desenvolupat un model, es destaca la manca de coneixements tecnològics necessaris per a la seva implementació.

Taula 5.12: Quadre resum dels GEMs del Team 04 (Segona Recollida)

	L'objectiu del grup és calcular la mitjana dels impostos per províncies. Cal recordar que la taula que apareix a l'article que s'ofereix als estudiats a la tasca apareix el valor de l'impost a les capitals de província. El grup identifica aquests valors com el valor de l'impost a les províncies. 02:44 M: Entonces, ehm, si hacemos una media de, en plan, por provincias.
	El seu objectiu és calcular la mitjana dels impostos específics dels turismes, aprofundint en la taula proporcionada que detalla els valors d'impostos per a diferents tipus de vehicles. 03:17 A: Cinco 03:17 M: Cinco tipos de coches que hay.
	En aquest GEM, il·lustrem la mitjana dels turismes amb menys de 8 cavalls fiscals (CVF). El grup revisa detalladament totes les dades i identifica aquell que s'aproxima més a la mitjana; el consideren el més just a partir de la mínima diferència. 03:32 N: Vale, entonces, y ¿Si, por ejemplo, cogemos todos los de Albacete de menos de 8 caballos lo sumamos todos hacemos la media y el que sea me ha parecido es el más justo?

<pre> graph TD subgraph Oval N((N)) --> Mitjana((Mitjana)) end Oval <--> Df((Df)) Df <--> Dades((Dades)) Df <--> min((min)) </pre>	Decideixen seguir la mateixa aproximació que en el model anterior, però a partir de totes les dades disponibles. 01:08 N: Yo creo que es lo que tendríamos que hacer es es sumar todo esto dividirlo entre todo y nos dará una media y entonces hacemos esto con esta media estos en plan esto son medias 01:18 Al fin y al cabo el resultado de aquí pues si cogemos el resultado de las medias y lo sumamos coches motos autobuses y tal lo sumamos, hacemos la media de todo y lo hacemos con todas estas el que esté el número más bajo decimos que es el más justo.
---	---

Producció Team 04 (Segona Recollida)

L'equip quatre presenta una solució justificada, tot i que no detalla el procés exacte que han utilitzat. A més, a causa de limitacions de temps i manca de coneixements tècnics per emprar eficaçment un full de càlcul, no han pogut completar la tasca i aplicar el seu model a totes les dades proporcionades.

Producció

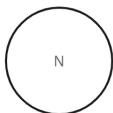
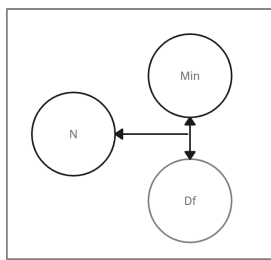
De les tres províncies que hem fet (Albacete, Almeria i Alicante) la més justa ha sigut la província de Almeria, ja que, en la majoria dels preus dels cotxes, autobusos i camions són pràcticament els mateixos. La ciutat on més coincideixen les mitges és la ciutat de Senés. La primera i única proposta seria igualar tots els valors de l'impost del vehicles per així poder trobar un preu raonable en tots els pobles.

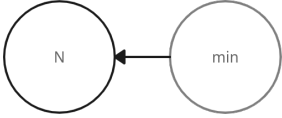
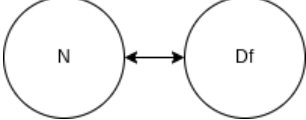
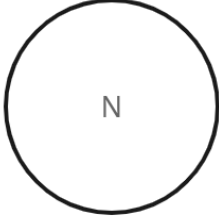
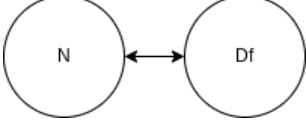
5.3.9 Team05 (Segona Recollida)

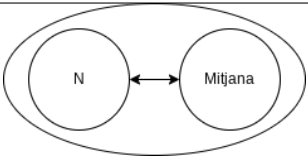
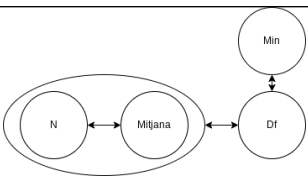
Aquest grup presenta diversos models que, malgrat ser proposats, no prenen vida i manquen de continuïtat. A causa de la complexitat i la falta de cohesió en el desenvolupament d'aquests models, no els hem inclòs com a Gràfics Exploratoris del Model (GEM) per tal de no emascarar el procés de desenvolupament, ja que el grup va generar diversos

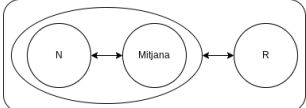
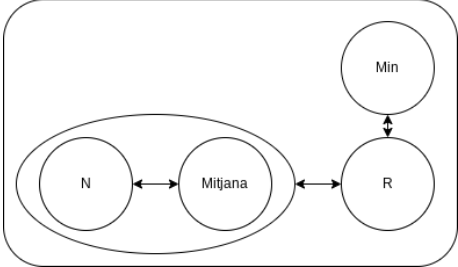
models vàlids. A més, ens enfrontem a una dificultat que ja hem trobat en altres grups durant el procés de transcripció: l'ambigüitat en el discurs, ja que hem enregistat només les veus sense poder visualitzar les accions reals dels participants. Durant les gravacions, es van utilitzar dos mitjans: gravadores d'àudio i els ordinadors dels estudiants membres del grup. Per mantenir l'anonimat, les càmeres no enfocaven els participants, així que només sentim les veus. Aquesta elecció ha generat algunes dificultats en la comprensió de referències com "això" o "allò" en les gravacions. Tot i que vam proporcionar indicacions, com es detalla en l'activitat, per explicar detalladament el procés de resolució de la tasca, no és trivial comprendre l'expressió escrita redactada pels estudiants. Inicialment, el fet que només treballassin en períodes curts de temps podria semblar un problema, ja que podria requerir que tornessin a l'enunciat, emascarant el procés real de modelització. No obstant això, aquesta pràctica ha resultat beneficiosa a l'hora de descriure els models. S'ha posat de manifest especialment en aquest grup, ja que les iteracions repetides sobre el mateix model han aclarit la seva estructura i, al mateix temps, han ajudat a validar-lo."

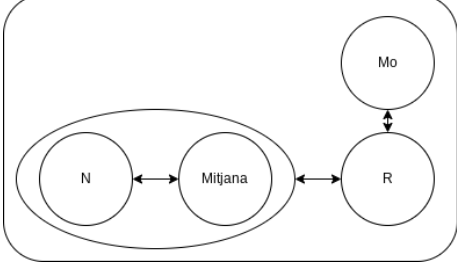
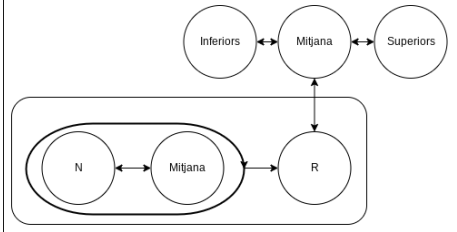
Taula 5.14: Quadre resum dels GEMs del Team 05 (Segona Recollida)

	Definim N com les províncies. Com ja hem comentat en altres grups, molts decideixen que la seva població d'estudi són les províncies que surten a la taula donada a l'article. 0:11:57 Mirar en cada província.
	Opten per seleccionar la mínima diferència entre les províncies. No obstant això, el model encara no està completament desenvolupat, ja que no han especificat què implica exactament de què fer aquestes diferències. 0:13:31 ...en plan dentro de la provincia o sea, aunque hay menos de diferencias.

	Decideixen cercar el valor mínim dels impostos entre les províncies 0:13:50 En plan, los que cuestan menos?
	Seguidament, consideren la possibilitat de calcular les diferències amb totes les dades proporcionades a l'article. 0:14:15 Todos los municipios de todas las provincias, las diferencias.
	Reintrodueixen la idea de buscar el mínim valor dels impostos. 0:14:29 Total 0:14:56 Hay que mirar dentro de la provincia
	Retornen al model anterior, tot i que es fa evident que no tenen clar com dur-lo a la pràctica. 0:15:15 L: Mirar dentro de cada provincia si los impuestos son más o menos iguales.

	La seva proposta consisteix a calcular la mitjana dels impostos de tots els turismes a motor per cada municipi. 0:21:58 Media de cada municipio de cada provincia de todos los turismos. La seva proposta consisteix a calcular la mitjana dels impostos de circulació exclusivament per als turismes de cada municipi, tot i que en les dades disponibles es proporcionaven valors per a diversos tipus de vehicles com autobusos, tractors, motocicletes, entre altres. 0:18:07 P: Media de estos y de estos.
	Proposen calcular la mitjana dels impostos de circulació per a tots els turismes en cada municipi de cada província (0:22:30). Posteriorment, consideren calcular les diferències, encara que no tenen clar com ni què implica realment aquest càlcul. 01:55 Tienes que comprar todas las medias de cada municipio y pues las que más se parezcan y que menos diferencias 02:03 M: calculas la diferencia ¿no? 02:05 E: Claro, sí, bueno M: Sí 02:07 E: Y cuanto menos diferencia haya en todas será la más justa porque en una misma provincia así pues sabes 02:14 M: Vale 02:16 E: Entonces, ahora habría que ponerse a calcular como locos.

	Després de deliberar sobre si han de prendre una mostra o començar de zero, opten per continuar amb totes les dades i busquen una funció per calcular les diferències (0:38:54). 0:31:31 A: Cogemos una muestra?... 0:31:42 P: Haremos una suma de todo?... 0:31:52 P: Haremos una media?... 0:37:35 P: Compararlo todo... 0:37:43 P: No tenemos que hacerlo todo ¿no?... 0:38:54 P: Una función para la diferencia o algo así?
	Cerquen una funció que correspongui al càlcul del rang, és a dir, la diferència entre el valor mínim i el valor màxim de les mitjanes. No obstant això, esmenten la preocupació de perdre informació sobre les dades situades entre els extrems (0:39:51). 0:39:00 P: Función para el máximo y el mínimo... 0:39:35 P: La diferencia entre el más pequeño y el más grande ... 0:39:51 P: El rango o algo así.
	(0:42:23) Ara destaquen la necessitat de trobar la mínima diferència entre el valor més petit i el valor més gran, és a dir, el mínim del rang. 0:42:23 E: esa es la diferencia entonces ahora tenemos que buscar el que tenga menos diferencia de todos estos.

	(0:42:23) Afegeixen que han de trobar la mínima diferència entre el més petit i el més gran, és a dir el mínim del rang. 0:42:23 E: Esa es la diferencia entonces ahora tenemos que buscar el que tenga menos diferencia de todos estos.
	(82:43) Cap al final, quan estan redactant les conclusions, s'adonen que l'anterior model no era correcte. Donen una primera explicació al minut 82:43, però sembla que fan la mitjana i classifiquen per sobre i per sota d'aquesta mitjana. Més endavant ho expliquen clarament: fan la mitjana dels rangs i classifiquen els valors per sota i per sobre d'aquesta mitjana, aproximadament en el minut 4:23 de l'últim àudio (minut 91). (82:43) 15:07 E: En verdad yo creo que lo hemos hecho mal porque lo que tendríamos que hacer en verdad ahora es coger todo esto y hacer la media y de esto los que estén para abajo son más justos y los que están para arriba son. (91:00) 04:23 E: Hem calculat el rang de tots els municipis de cada provincia ... 04:28 E: Vale, esto era la diferencia que había entre el más alto y el más bajo 04:34 M: Y ahora hay que hacer la media de las diferencias que hay entre el más alto y el más bajo y veremos cuál. 04:39 E: Hay que hacer la media de todos estos para ver cuál es el del medio y los que están por arriba son los más injustos.

Producció Team 05 (Segona Recollida)

Les tasques es podien entregar escrites a mà o digitalment. L'entrega digital es feia a través d'una plataforma on cada alumne pot penjar tota mena de documents. Les indicacions havien estat clares, només entregava un membre de l'equip de treball indicant el nom de tots els integrants del grup. D'aquest grup vam rebre dues entregues, cadascuna d'un membre del grup diferent. Aquests documents presentaven explicacions amb matisos diferents però amb la mateixa conclusió. En una entrega anomenaven diferència a la diferència entre el màxim i el mínim. En l'altre entrega, anomenaven diferència al rang.

Primer documento

Per poder arribar a la conclusió de quines províncies son mes justes i quines son mes injustes, hem fet la mitja dels preus dels diferents automòbils en cada municipi, i després hem calculat el rang de tots els municipis de cada provincia.

Aquests son els rangs de tots els municipis de cada provincias:

Albacete: 66,034 coins (máximo:128,1/ mínimo: 66.066)

Alicante: 64'05 (máximo: 128,1/ mínimo: 64'05)

Almería: 56,05 (Max: 120'1/ mínimo: 64'05)

Ávila: 49'28 (máximo:113'33/ Mínimo: 64'05)

Badajoz: 58'536 (máximo: 115'23/ Mínimo: 56,734'

Illas balears: 64'05 (Maximo: 128'1/ mínimo: 64'05)

Barcelona: 64'05 (Maximo: 128'1/ mínimo: 64'05)

Burgos: 53,74 (Máximo: 117,79/ mínimo 64'05)

Cáceres: 35'352 (Máximo: 99'402/ Mínimo: 64'05)

Cádiz: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)

Castellón: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)

Ciudad Real: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)

Córdoba: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)

A Coruña: 62'21 (Máximo: 122'26/ Mínimo: 64'05)

Cuenca: 58'12 (Máximo:122'17/ Mínimo: 64'05)

Girona: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)

Granada: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)

Guadalajara: 57'72 (Máximo: 121'57/ Mínimo: 64'05)

Huelva: 159'95 Máximo 224 Mínimo 64'05

Huesca: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)

Jaén: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)

León: 51'01 (Máximo 117'06/ Mínimo: 64'05)
 Lleida: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)
 La Rioja: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)
 Lugo: 52'65 (Máximo: 116'7/ Mínimo: 64'05)
 Madrid: 112'086 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 16'014)
 Málaga: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)
 Murcia: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)
 Ourense: 55'32 (Máximo: 119'82/ Mínimo: 64'05)
 Asturias: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)
 Palencia: 47'94 (Máximo: 111'99/ Mínimo: 64'05)
 Las Palmas: 51'23 (Máximo: 115'38/ Mínimo: 64'05)
 Pontevedra: 61,13 (Máximo: 125'18/ Mínimo: 64'05)
 Salamanca: 63'95 (Máximo: 128/ Mínimo: 64'05)
 Sta. Cruz de Tenerife: 46'39 (Máximo: 110'44/ Mínimo: 64'05)
 Cantabria: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)
 Segovia: 62,542 (max: 126,592 / min: 64,05)
 Sevilla: 60,716 (max: 128,1 / min: 67,384)
 Soria: 43,216 (max: 107,266 / min: 64,05)
 Tarragona: 64,05 (max: 128,1 / min: 64,05)
 Teruel: 64,048 (max: 128,098/ min: 64,048)
 Toledo: 60.236 (max: 124,286 / min: 64,05)
 Valencia: 75,5 (max: 128,1 / min: 53,6)
 Valladolid: 64,05 (max: 128,1 / min: 64,05)
 Zamora: 39,52 (max: 103,57 / min: 64,04)
 Zaragoza: 64,05 (max: 128,1 / min: 64,05)

De todas las provincias, hay 20 que están por encima de la media de la diferencia de precios (62,7), en cambio hay otras 26 provincias que están por debajo.

Las más justas son concretamente: Almería, Ávila, Badajoz, Burgos, Cáceres, A Coruña, Cuenca, Guadalajara, León, Lugo, Ourense, Palencia, Las Palmas, Pontevedra, Sta. Cruz de Tenerife, Segovia, Sevilla, Soria, Toledo, Zamora.

Cáceres, Zamora y Soria son las tres provincias más justas de España en cuanto al impuesto de circulación de los turismos.

b) Según nuestro punto de vista el Estado debería intervenir y por lo tanto bajar o subir el impuesto de circulación con tal de que sea igual o parecido en todas las provincias.

Segundo documento

Diferencia de precio de cada provincia:

Albacete: 66,034 coins (máximo:128,1/ mínimo: 66.066)

Alicante: 64'05 (máximo: 128,1/ mínimo: 64'05)

Almería: 56,05 (Max: 120'1/ mínimo: 64'05)

Ávila: 49'28 (máximo:113'33/ Mínimo: 64'05)

Badajoz: 58'536 (máximo: 115'23/ Mínimo: 56,734'

Illas balears: 64'05 (Maximo: 128'1/ mínimo: 64'05)

Barcelona: 64'05 (Maximo: 128'1/ mínimo: 64'05)

Burgos: 53,74 (Máximo: 117,79/ mínimo 64'05)

Cáceres: 35'352 (Máximo: 99'402/ Mínimo: 64'05)

Cádiz: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)

Castellón: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)

Ciudad Real: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)

Córdoba: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)

A Coruña: 62'21 (Máximo: 122'26/ Mínimo: 64'05)

Cuenca: 58'12 (Máximo:122'17/ Mínimo: 64'05)

Girona: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)

Granada: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)

Guadalajara: 57'72 (Máximo: 121'57/ Mínimo: 64'05)

Huelva: 159'95 Máximo 224 Mínimo 64'05

Huesca: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)

Jaén: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)

León: 51'01 (Máximo 117'06/ Mínimo: 64'05)

Lleida: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)

La Rioja: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)

Lugo: 52'65 (Máximo: 116'7/ Mínimo: 64'05)

Madrid: 112'086 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 16'014)

Málaga: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)

Per poder arribar a la conclusió de quines províncies son mes justes i quines son mes injustes, hem fet la mitja dels preus dels diferents automòbils en cada municipi, i després hem calculat el rang de tots els municipis de cada provincia.

Aquests son els rangs de tots els municipis de cada provincias:

Albacete: 66,034 coins (máximo:128,1/ mínimo: 66.066)

Alicante: 64'05 (máximo: 128,1/ mínimo: 64'05)
Almería: 56,05 (Max: 120'1/ mínimo: 64'05)
Ávila: 49'28 (máximo:113'33/ Mínimo: 64'05)
Badajoz: 58'536 (máximo: 115'23/ Mínimo: 56,734'
Illas balears: 64'05 (Maximo: 128'1/ mínimo: 64'05)
Barcelona: 64'05 (Maximo: 128'1/ mínimo: 64'05)
Burgos: 53,74 (Máximo: 117,79/ mínimo 64'05)
Cáceres: 35'352 (Máximo: 99'402/ Mínimo: 64'05)
Cádiz: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)
Castellón: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)
Ciudad Real: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)
Córdoba: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)
A Coruña: 62'21 (Máximo: 122'26/ Mínimo: 64'05)
Cuenca: 58'12 (Máximo:122'17/ Mínimo: 64'05)
Girona: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)
Granada: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)
Guadalajara: 57'72 (Máximo: 121'57/ Mínimo: 64'05)
Huelva: 159'95 Máximo 224 Mínimo 64'05
Huesca: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)
Jaén: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)
León: 51'01 (Máximo 117'06/ Mínimo: 64'05)
Lleida: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)
La Rioja: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)
Lugo: 52'65 (Máximo: 116'7/ Mínimo: 64'05)
Madrid: 112'086 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 16'014)
Málaga: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)
Murcia: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)
Ourense: 55'32 (Máximo: 119'82/ Mínimo: 64'05)
Asturias: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)
Palencia: 47'94 (Máximo: 111'99/ Mínimo: 64'05)
Las Palmas: 51'23 (Máximo: 115'38/ Mínimo: 64'05)
Pontevedra: 61,13 (Máximo: 125'18/ Mínimo: 64'05)
Salamanca: 63'95 (Máximo: 128/ Mínimo: 64'05)
Sta. Cruz de Tenerife: 46'39 (Máximo: 110'44/ Mínimo: 64'05)
Cantabria: 64'05 (Máximo: 128'1/ Mínimo: 64'05)
Segovia: 62,542 (max: 126,592 / min: 64,05)

Sevilla: 60,716 (max: 128,1 / min: 67,384)
 Soria: 43,216 (max: 107,266 / min: 64,05)
 Tarragona: 64,05 (max: 128,1 / min: 64,05)
 Teruel: 64,048 (max: 128,098/ min: 64,048)
 Toledo: 60.236 (max: 124,286 / min: 64,05)
 Valencia: 75,5 (max: 128,1 / min: 53,6)
 Valladolid: 64,05 (max: 128,1 / min: 64,05)
 Zamora: 39,52 (max: 103,57 / min: 64,04)
 Zaragoza: 64,05 (max: 128,1 / min: 64,05)

De todas las provincias, hay 20 que están por encima de la media de la diferencia de precios (62,7), en cambio hay otras 26 provincias que están por debajo.

Las más justas son concretamente: Almería, Ávila, Badajoz, Burgos, Cáceres, A Coruña, Cuenca, Guadalajara, León, Lugo, Ourense, Palencia, Las Palmas, Pontevedra, Sta. Cruz de Tenerife, Segovia, Sevilla, Soria, Toledo, Zamora.

Cáceres, Zamora y Soria son las tres provincias más justas de España en cuanto al impuesto de circulación de los turismos.

b) Según nuestro punto de vista el Estado debería intervenir y por lo tanto bajar o subir el impuesto de circulación con tal de que sea igual o parecido en todas las provincias.

A més, disposem d'un full de càlcul (Figura 5.22), el qual van utilitzar com a suport per a la realització dels càlculs.

Ayuntamiento	Provincia	Turismos					MEDIA	cr	media cr	
		< 8 CV	De 8 a 11,99 CV	De 12 a 15,99 C ¹	De 16 a 19,99 C ¹	> 20 CV				
Abengibre	Albacete	17,04	46	97,12	120,97	151,2	86,466	63,034	62,7	
Alatoz	Albacete	12,62	34,08	71,94	89,61	112	64,05	64,05	20	más pequeño de 62,7
Albacete	Albacete	23,98	64,75	136,69	173,84	217,28	123,308	56,05	26	más grande que 62,7
Albatana	Albacete	15,12	41,4	86,4	108	135	77,184	49,28		
Alborea	Albacete	15,14	40,9	86,33	107,53	134,4	76,86	58,536		
Alcadozo	Albacete	15,14	40,83	86,32	107,53	134,4	76,844	64,05		
Alcalá del Júcar	Albacete	17,64	47,61	100,52	125,2	156,49	89,492	64,05		
Alcaraz	Albacete	16,41	44,3	93,52	134,42	168	91,33	53,74		
Almansa	Albacete	19,2	51,88	143	179	224	123,416	35,352		
Alpera	Albacete	15,03	39,07	81,74	109,99	133,27	75,82	64,05		
Ayna	Albacete	14	38	79	98	125	70,8	64,05		
Balazote	Albacete	20,96	56,45	119,07	148,29	185,54	106,062	64,05		
Balsa de Ves	Albacete	13,88	37,49	79,13	98,57	123,2	70,454	64,05		
Ballesteros (El)	Albacete	13,88	37,49	79,14	98,57	123,2	70,456	62,21		
Barrax	Albacete	15,8	41,6	87,95	110,3	126,22	76,374	58,12		
Bienservida	Albacete	13,88	37,48	79,13	98,63	123,2	70,464	64,05		
Bogarra	Albacete	14,49	39,15	82,64	102,94	128,66	73,576	64,05		
Bonete	Albacete	12,62	34,08	71,94	89,61	112	64,05	57,72		

Figura 5.22: Fragment Full de Càlcul Team 05

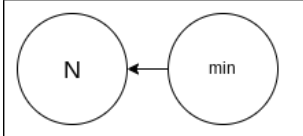
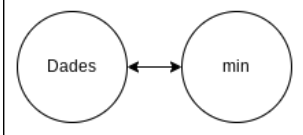
El problema amb aquesta taula, que sembla tenir els càlculs realitzats a primera vista,

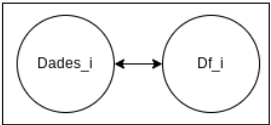
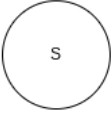
és que, en revisar més a fons, només mostra la continuïtat a la columna de mitjanes. No es va presentar cap altre full de càlcul, tot i que els rangs estan disponibles a la producció. Per tant, al final, considerem que podem atorgar credibilitat al model creat.

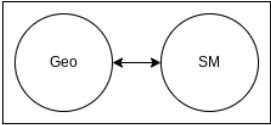
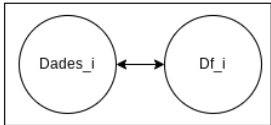
5.3.10 Team09 (Segona Recollida)

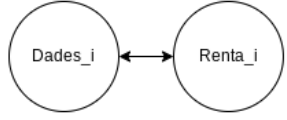
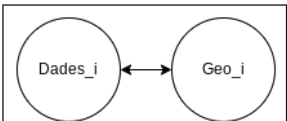
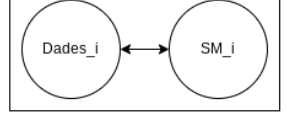
Aquest grup va dedicar més temps i esforç al segon apartat de l'informe que al primer. Per això, probablement, proporciona exemples de manera constant. S'assembla al tercer grup de la primera recollida en la utilització d'indicadors socioeconòmics. Les dades de la taula, com l'impost de circulació, es converteixen en part integrant del model, utilitzant-les com a exemples.

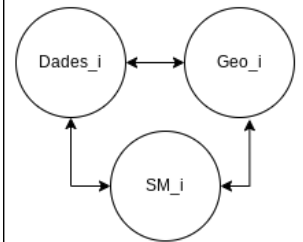
Taula 5.17: Quadre resum dels GEMs del Team 9 (Segona Recollida)

	N representa les dades proporcionades en una taula. Decideixen utilitzar com a model matemàtic el mínim, és a dir, la ciutat on l'impost és més econòmic. 0:20:21 La más barata (Ceuta, la tabla)
	(0:28:00) Encara que durant el procés mencionen la comunitat més barata", els exemples que citen i llegeixen són de províncies. Hem optat per utilitzar "Dades" en lloc de "N", ja que examinen les dades una a una, però es podria mantenir el terme original si es prefereix. 04:42 ...la no sé qué, la comunidad más barata, que es...Ceuta A: Melilla 04:49 J: Melilla porque todo costaba muy poco

	(0:30:58) Estableixen una diferència entre dos exemples: el sou pot ser un factor decisiu. Tot i que podria referir-se al que es cobra pels impostos, després d'uns minuts aclareixen que, en aquest context, 'cobrar' es refereix al sou. 07:40 M: En Palencia cobran mucho, me lo invento, ¿eh? Palencia es lo primero que he visto J: Palencia en plan, yo conozco Valencia no Palencia 07:47 A: a lo mejor, lo más barato no es lo más no sé. 07:53 J: La más justa A: No sé 07:53 J: Esa era, no nos da más pista, la más justa ¿En cuánto a qué? 07:56 A: Claro es que es eso. 07:57 J: Puede ser la más justa para el Estado cobrar más porque le sale del no sé, o más justa o ¿Yo qué sé por qué? ¿Qué es justo?
	Com hem mencionat anteriorment, el salari emergeix com un model decisor (0:33:18). 10:00 J: Yo pongo sí, ha d'intervenir perquè cobro molt poc. M: Pero podemos poner la opinión, que ha de intervenir porque no nos parece justo ¿eh?

	((0:36:24) En un moment determinat, algú opina que un factor important és el que pagui molt pel seu cotxe. No obstant això, no queda clar si es refereixen al cotxe en sí, al seu preu, o a l'impost. L'explicació s'ofereix com si, en aquest cas particular i context, haguessin de trobar una solució a aquesta qüestió. 02:13 J: Entonces, ¿Qué tenemos que dar nuestra opinión? Bueno, poniéndonos en la piel de un hombre que paga mucho dinero por su coche. Després concreten la seva idea afegint el salari que havien considerat abans i la situació geogràfica (0:38:20) 03:38 J: Hola, vale, a ver Albacete, por ejemplo, podemos poner yo vivo en Albacete y cobro tanto me cobran demasiado por el coche porque lo compré en Almería, algo así, no sé. 03:56 A: Sí, sí, si. 03:57 J: Entonces pues decimos esto y después propuestas. Oye pues como lo compré en Almería y en Almería a Albacete no hay tanto pues y cobro tanto este sueldo, soy de sueldo medio bajo pues que me descuenten los kilómetros porque yo que sé.
	Utilitzen exemples concrets per il·lustrar la diferència, una pràctica que es repeteix en diversos moments del procés. (0:41:15) 07:04 M: Pues que hi ha algunes, por ejemplo, en Melilla ... J: Es el más barato ... M: Y en Málaga cobran 24,85 07:17 Entonces que hay mucha diferencia

	(1:03:19) Segueixen treballant amb exemples i pensen que la distribució de la renda i els impostos a pagar estan relacionats. 00:11 Eh! Qué fem? Una persona, ponemos de Barcelona y de Valencia y podemos poner ... J: Precios, su diferencia 00:23 M: Sí 00:36 J: De la distribución de la renta.
	Posen dos exemples on la justificació es fonamenta en motius geogràfics (1:07:49). 04:27 J: Podemos poner que los de Cáceres dicen que es justo lo que hacen, como que defender que lo suyo sea más barato, básicamente porque les va mejor, es lo que pasa, básicamente. M: No pero no creo que sea así. A los de Cáceres también les da rabia ...04:57 J: Pero si comparamos Cáceres con Salamanca ... no vamos a meter más provincias
	Segueixen utilitzant els exemples, tot i que amb algun lapsus, referint-se al salari mitjà (1:13:22). 10:24 El salario medio de Melilla, por ejemplo, ¿eh? si el salario medio de melilla es más bajo que el de Barcelona, es justo que paguen menos ¿sabes?

	factors geogràfics, el salari mitjà i les dades relatives als impostos (1:16:43) 19:55 M: Bueno M ¿qué tal? ¿Has puesto lo de los salarios? 19:57 M: Sí 20:09 M: Venga te lo digo,J, dime a ver qué os parece, vale: (lee) depende de cada persona y opiniones diferentes ...teniendo en cuenta del salario medio...por ejemplo en Cáceres-espera espera- el salario medio ...el impuesto sería justo de 100 euroscon esto queremos decir que es justo que una persona que cobra menos ...posiblemente no tiene dinero suficiente para pagar los impuestos
---	---

Producció Team 09 (Segona Recollida)

S'han lliurat dos informes, destacant-se un d'ells pel nivell de detall, tot i que ambdós segueixen fidelment el model establert. Cal recordar que l'objectiu consistia a proporcionar exemples de les diferències incorporant diversos indicadors socioeconòmics.

INFORME : En la tabla podemos observar que según la ciudad en la que nos encontramos hay una tarifa u otra , por ejemplo en BCN por un de menos de 8 CVF se paga una cantidad de 23,47 ; en cambio en Melilla se paga 6,31 , consideramos que esta diferencia de precio es exagerada teniendo en cuenta la ubicación de cada ciudad y que es desequilibrado , si nos metemos en el papel de una persona de BCN con impuesto de circulación nos indignaría la diferencia de precios

INFORME: En la tabla podemos observar que según la ciudad en la que estás domiciliado, hay una tarifa u otra; por ejemplo, en Barcelona la cuota de un vehículo de menos de 8 CVF es de 23,47€; en cambio en Melilla sería de 6,31€. A continuación hemos añadido una tabla en las que podemos observar diferentes casos:

PROVINCIAS	De 8 a 12 CVF
Cáceres	100 €
Salamanca	143,88 €

Como podemos observar, entre Cáceres y Salamanca, dos provincias que están más o menos a 200 km, hay una diferencia de 23.88€. Y más o menos es la misma situación con otras Provincias.

Depende de cada persona hay opiniones diferentes frente a este tema.

Teniendo en cuenta el salario medio de cada provincia, sería justo o no pagar más, o menos.

Por ejemplo, en Cáceres el salario medio es de 1.400€ (al mes) por lo tanto sería justo que el impuesto sea de 100€, menos que en Salamanca, donde el salario medio es de 1.450€. Con esto queremos decir que es justo que una persona que cobra menos, pague menos, ya que posiblemente no tiene dinero suficiente para pagar los impuestos.

Pero claro, si pertenecemos al grupo de los de Salamanca, también algunos verán injusto que esas personas paguen menos que ellos. Pero puede existir la opción de que haya gente a la que no le importe. Todo depende de la persona...

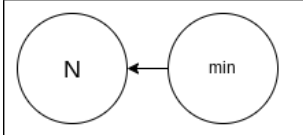
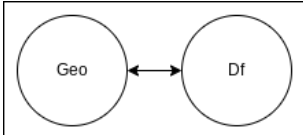
Nosotros consideramos que la Ley reguladora de las Haciendas Locales, en parte, ha hecho bien. Ya que han valorado las diferentes posiciones de los habitantes. Posiblemente a algunos no les parecerá bien, pero no llueve a gusto de todos.

En conclusión creemos que la Ley en general está bien, pero podrían bajar un poco los impuestos e igualarlos un poco para así todos quedarse conformes con la situación.

5.3.11 Team 10 (Segona Recollida)

Aquest grup va fer dues entregues. En una d'elles, van seguir el model matemàtic que van desenvolupar durant el procés de resolució de la tasca. Al contrari, l'altra producció va ser copiada d'un altre grup, per la qual cosa no hem tingut en compte el seu plantejament matemàtic.

Taula 5.20: Quadre resum dels GEMs del Team 10 (Segona Recollida)

	N representa les dades donades en una taula. Decideixen utilitzar la ciutat on l'impost és més econòmic com a model matemàtic, prenent com a referència el valor mínim d'impost a aquesta ciutat, considerant-la la ciutat més justa. 04:36 M: Vale tenemos que mirar en la tabla, creo, cual es la más barata.
	(0:22:31) Consideren injust que l'impost variï segons la localització del municipi. Tot i que contemplen la possibilitat d'utilitzar motius geogràfics com indicador de les diferències, al final decideixen basar el model en el criteri econòmic, prenent el valor mínim de la taula com a referència. 04:08 AL: Que suban por diferentes, en plan ... 04:11 M: Por la localización. 05:35 AL: O sea que es justo pero a la vez es injusto, porque cobran demasiado, o sea, es un exceso 05:44 M: Vale

Producció Team 10 (Segona Recollida)

Com hem mencionat, tenim dues entregues. En aquesta primera entrega, no es fa ús del model descrit, ja que s'ha copiat d'un altre grup. El grup decideix consultar amb un altre grup després d'arribar a la conclusió que utilitzarien el valor mínim com a referència.

L'article deixar clar que cada Ajuntament decideix quin és el valor de l'Impost i que l'Estat només dicta quins són els automòbils que n'estan exempts. A l'article diuen que dins de la mateixa comunitat i, fins i tot, la mateixa província les diferències són evidents. Quines províncies són més justes i, per tant, el fet de matricular en una població o en una altra no suposa un greuge comparatiu pels propietaris dels vehicles.

La provincia más justa entre las 3 que hemos investigado, que son Albacete, Alicante y Almería es Hellín. Hemos dado con la conclusión calculando la media de las tres medias, es decir hemos hecho la media de Albacete, la media de Alicante, la media de Almería y con los resultados de cada media hemos hecho otra media la cual hemos utilizado para ver cuál era la más justa. Entre todas las provincias la más justa es Albacete y dentro de Albacete el pueblo más justo es Hellín.

Hisenda us demana un informe per avaluar aquesta situació i decidir si l'Estat ha d'intervenir. Ha d'incloure un recull de propostes que valorin diferents solucions.

Proponemos que los impuestos deben estar al alcance de todo el mundo es decir, seas más rico o más humilde que puedas pagar todos los impuestos que se necesitan para circular y tenerlo todo en orden.

Aquesta segona entrega és totalment coherent amb la tasca que l'equip va desenvolupar durant la primera part de les gravacions.

L'article deixar clar que cada Ajuntament decideix quin és el valor de l'Impost i que l'Estat només dicta quins són els automòbils que n'estan exempts.

A l'article diuen que dins de la mateixa comunitat i, fins i tot, la mateixa província les diferències són evidents. Quines províncies són més justes i, per tant, el fet de matricular en una població o en una altra no suposa un greuge comparatiu pels propietaris dels vehicles.

-Les províncies més justes son Melilla i Ceuta.

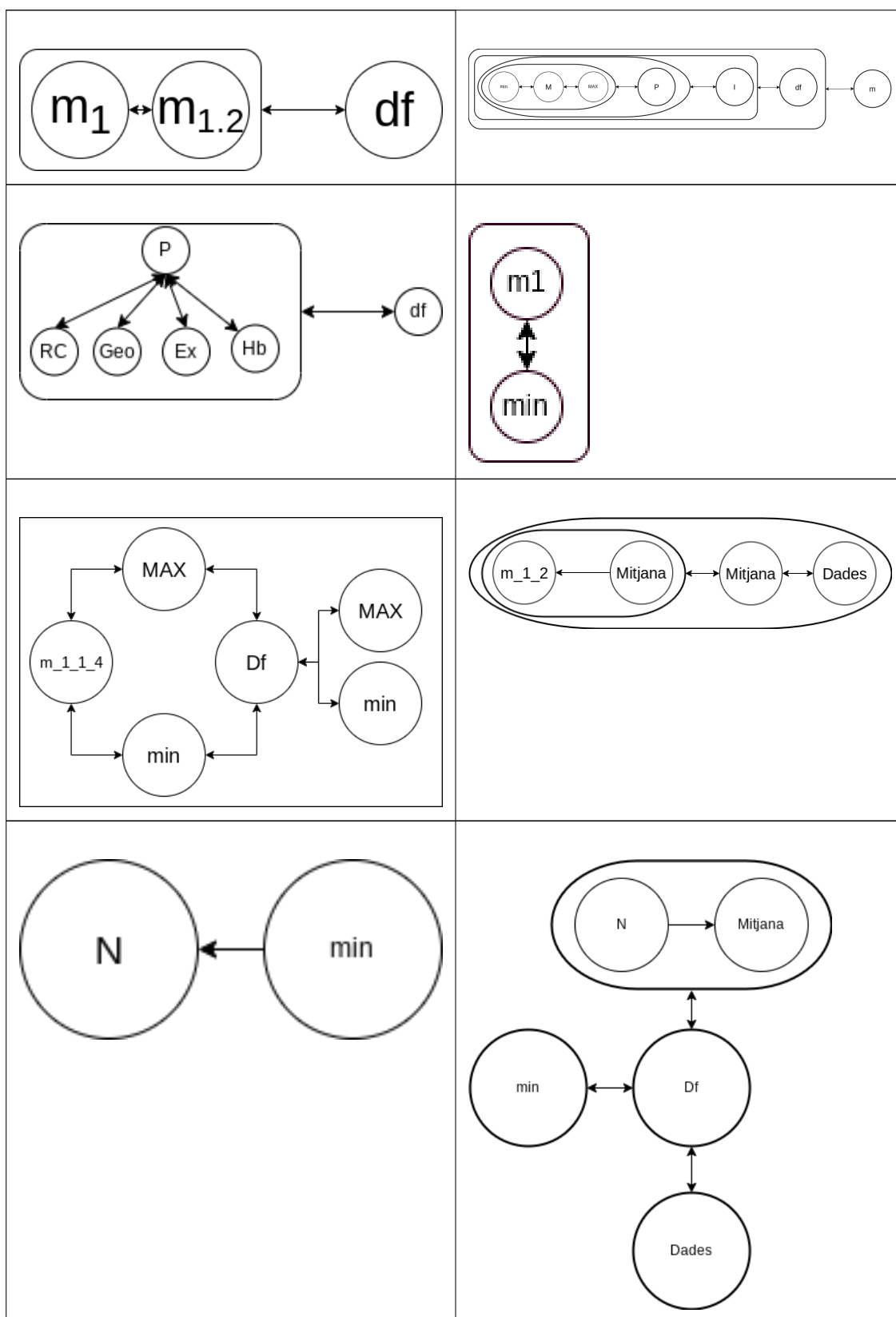
Hisenda us demana un informe per avaluar aquesta situació i decidir si l'Estat ha d'intervenir. Ha d'incloure un recull de propostes que valorin diferents solucions.

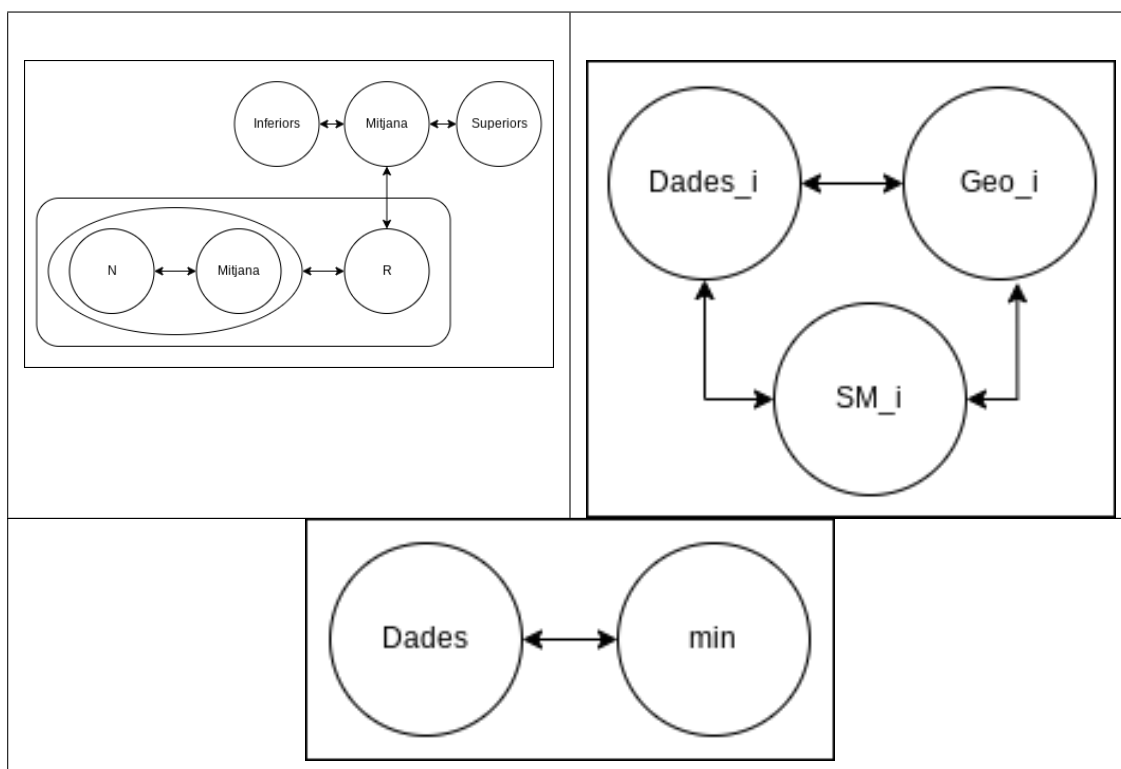
-Evidentment l'estat ha d'intervenir Per les següents raons: Creiem que no és just la diferència tan gran d'impostos però comprenem que hi hagi més impostos per la localització, una possible solució seria queixar-se perquè baixin el impost.

5.4 Resultats del tercer estudi

Elaborem una taula amb tots els models finals per facilitar la comparació i poder observar els resultats. Tots els models agrupats ens ajuden a obtenir conclusions.

Taula 5.23: Quadre Resum dels GEMs Finals





Observem que grups desenvolupen models matemàtics usant procediments específics per a donar resposta a la problemàtica plantejada. En conjunt, tot i que a primera vista poden semblar diferents, i de fet ho són, comparteixen semblances evidents i es poden agrupar en categories.

Hi ha una categoria que ha considerat que el que és just és pagar poc, per tant, el seu paràmetre és el mínim: G4, T03 i T10.

Per altra banda, és rellevant destacar que dos grups, concretament G3 i T09, van optar per l'ús d'indicadors socioeconòmics. Aquesta elecció es justifica pel context de la tasca, que es desenvolupava durant la classe d'Economia. No obstant això, és important assenyalar que considerar factors socioeconòmics és vàlid, ja que l'activitat era oberta i els indicadors seleccionats responen a problemàtiques socials i econòmiques abordades des d'una perspectiva matemàtica. Un exemple d'això és la inclusió del salari mitjà com a element d'anàlisi.

La resta, de manera més o menys elaborada o eficient, ha intentat quantificar la diferència. Aquesta quantificació ha estat realitzada directament amb exemples o bé mitjançant intervals relacionats amb la mitjana. Han creat constructes per a la quantificació de la diferència, ja que aquest és el seu model de justícia. En general, la quantitat de dades ha estat un problema, ja sigui treballant amb la taula de l'article o amb el full de càlcul que conté totes les dades. Això ha obligat, en molts casos, a treballar amb eines informàtiques,

a simplificar el model o a plantejar-se l'opció de seleccionar només una mostra, o fins i tot uns pocs exemples, com en el cas del T09.

Recordem el tercer objectiu d'aquest treball: caracteritzar els models matemàtics desenvolupats pels alumnes. Els GEMs han permès categoritzar els models creats i observar la seva evolució al llarg del procés de modelització. Per tant, queda palès que s'han creat models i que la resolució d'aquesta activitat segueix les fases del cicle de modelització, com s'ha indicat en les seccions anteriors. Tanmateix, genera la necessitat d'estudiar nocions estadístiques clau per a la comprensió de conceptes fonamentals en l'estadística, en aquest cas, la variabilitat.

5.5 Síntesi de resultats del tercer estudi

En aquest capítol es presenta un estudi que utilitza la mateixa activitat presentada al capítol previ. En aquest cas, l'anàlisi es centra en caracteritzar els models matemàtics que creen els estudiants durant l'activitat. En el passat havíem utilitzat uns diagrames de caracterització de models (Albarracín, Aymerich & Gorgorió, 2017) que hem reajustat en aquest estudi.

Els resultats d'aquest estudi posen de manifest que els estudiants desenvolupen models diferenciats entre ells per a resoldre la mateixa activitat. Des del punt de vista de l'anàlisi, la nova proposta dels Gràfics Explicatius dels Models -GEMs- (Aymerich & Albarracín, 2021) permet mostrar els elements conceptuals que estructurin el model considerat i, especialment, comparar l'evolució dels models al representar quins elements s'afegeixen o es retiren en cada moment.

Els DAM, emprats en el segon estudi, ens permetien observar el procés de resolució de la tasca i localitzar l'aparició dels models elaborats pels estudiants. Però, presenten la limitació de no proporcionar informació detallada sobre el model i ens mancava aquesta informació que permetia una anàlisi profunda del procés.

Els GEMs que hem analitzat en aquest estudi són talls transversals del procés en un moment donat. Aquests gràfics representen de manera simplificada el model.

Combinant les dues eines obtindrem una visió completa i profunda del procés i dels models generats pels estudiants de manera que podrem trobar un interval centrat en el model i d'amplada variable on es podran identificar els episodis clau que han provocat l'aparició del model, la seva modificació o la seva desaparició. Això permetrà aprofundir

en les característiques intrínseques de la tasca que condueixen a la generació de models i en la capacitat d'aquests per a descriure la variabilitat de les dades.

Capítol 6

Quart estudi: Combinació de MADs i de GEMs)

Si recopilem els estudis presentats fins a aquest punt, en primer lloc hem dut a terme un estudi exploratori que posa de manifest la capacitat de l'alumnat per abordar tasques estadístiques que implica la quantificació de la variabilitat. La caracterització de l'activitat de modelització de l'alumnat, realitzada amb l'ajuda dels Diagrames d'Activitat Matemàtica -DAM- (Aymerich & Albarracín, 2022; Ärleback, 2009; Czoher, 2016; Pla-Castells et al., 2021), ofereix una visió clara del procés seguit, si la comparem amb l'ús del cicle de modelització (Blim & Leiss, 2006). A més, utilitzant els DAMs, es poden representar els models matemàtics creats pels estudiants de manera esquemàtica. Els estudiants desenvolupen models matemàtics amb certa complexitat en aquest context, els elements conceptuals i procedimentals dels que es componen el models matemàtics generats es poden visualitzar de manera esquemàtica mitjançant els Gràfics Explicatius dels Models -GEMs- (Aymerich & Albarracín, 2021) .

Recordem aquí els objectius de recerca proposats a l'inici de la tesi doctoral:

- **OBJ1.** Caracteritzar l'activitat de resolució del treball d'estudiants de secundària en una activitat estadística contextualitzada en termes de modelització matemàtica.
- **OBJ2.** Caracteritzar l'activitat modelitzadora dels alumnes al treballar en activitats estadístiques contextualitzades.
- **OBJ3.** Caracteritzar els models matemàtics que desenvolupen els alumnes.

Així hem anat desgranant els tres primers objectius al llarg del treball. Però quan descrivíem els GEMs, els models, al llarg de tot el procés realitzat pels grups d'estudiants,

no els podíem situar de manera eficaç en el moment en què apareixien. Podíem especificar si apareixien en una fase d'interpretació, planificació, càlcul, exploració de les dades o a la redacció de conclusions, però per veure la veritable evolució dels models al llarg del procés calia ajuntar les dues eines en una única forma de representació. En aquest capítol mostrarem la combinació de les representacions fetes en fusionar els MADs i els GEMs en una sola imatge representat el treball de cada grup. Així es pretén mostrar específicament la vida i evolució dels models matemàtics considerats pels estudiants al llarg del procés de resolució de la tasca.

Tanmateix, farem una comparativa de totes les representacions conjuntament per poder arribar a identificar els episodis on canvien els models utilitzats pels alumnes, per poder entendre quines característiques intrínseques de la tasca promouen aquesta evolució, o bé, els va fer desaparèixer. La primera versió d'aquesta anàlisi conjunta es va presentar a la comunicació de congrés Aymerich & Albarracín (2023).

Durant la primera recollida de dades i elaboració dels MADs vam utilitzar el programa de la representació dels models en la seva versió inicial (MADTaskTracker). Aquesta versió no permetia introduir marques que indiquessin els punts on emergia un model. Recordem que aquestes marques es poden utilitzar indistintament per indicar qualsevol moment on es cregui important remarcar quelcom que ha passat durant el procés de realització de la tasca, com per exemple, la realització de preguntes o bé la intervenció del professor o professora, si s'escau. Per això aquest programa esdevé una eina d'anàlisi molt potent en el camp de la didàctica de les ciències i de les matemàtiques.

Però en la segona versió del programa, presentada a Pla-Castells i García-Fernández (2020) i que és la que es va utilitzar per l'anàlisi de la segona recollida de dades, sí que permetia indicar gràficament els punts que volíem marcar: aparició, evolució o desaparició del model matemàtic. Òbviament, es va pensar en refer els primers diagrames, on les marques es van haver de posar manualment, però ja s'havia elaborat l'anàlisi en base a aquests diagrames i s'havien escrit articles, pendants de publicació. Per tant, per ser coherents amb el procés d'anàlisi dels resultats, la primera recollida de dades, conserva els DAMs inicials.

Creiem que la interacció dels DAMs i els GEMs en una sola representació ens ajudarà a observar quins són els episodis on es creen, canvien, o desapareixen els models, sent, per tant, fàcil d'identificar quins elements de l'activitat són clau perquè es desenvolupin els models (**OBJ4**)

- **OBJ4.** Identificar els elements clau de l'activitat per promoure la generació de models matemàtics.

A partir d'aquí és presenta el gràfic combinat de MAD+GEM per a cadascun dels grups de treball analitzats en els dos capítols anteriors. En cada cas es presenta el gràfic generat i l'explicació de l'anàlisi del treball dels estudiants que ha portat a generar el gràfic.

6.1 Estudi de combinacions de MAD i GEM

6.1.1 Grup 1 (Primera Recollida)

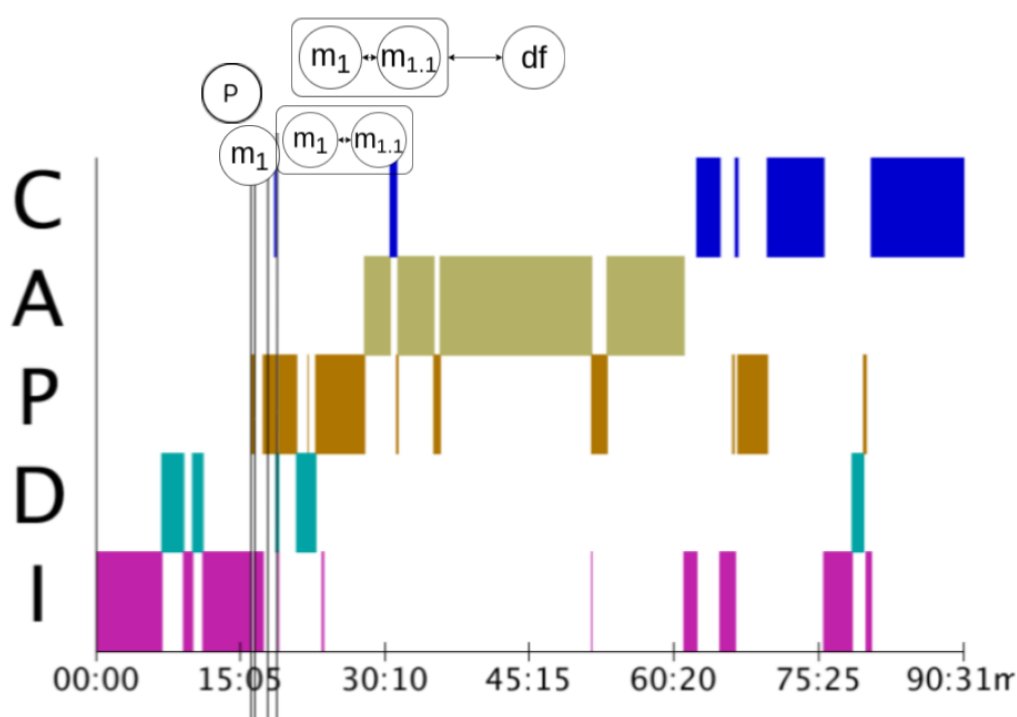


Figura 6.1: MAD i GEM Grup 1 (Primera Recollida)

El grup comença interpretant l'enunciat. Es van intercalant períodes on juguen amb les dades per fer-les seves (als 6:58, 10:05 i 10:58 minuts). En aquesta primera fase al minut 15:07 decideixen treballar amb totes les dades (P) però moments després, 15:14 minuts, s'adonen que és impossible (amb els recursos de què disposen) i agafen una primera mostra que seria totalment informal (m_1) però que esbossa una característica pròpia de les mostres: l'aleatorietat.

Aquí apareix la necessitat de triar una mostra concreta quan conjuguem la gran quantitat de dades i un coneixement limitat en l'ús d'eines digitals. Tornen a discutir sobre què demana l'enunciat durant un minut i mig perquè alguns conceptes no els tenien

clars. Llavors refinen la mostra que utilitzaran, ja que no només escolliran províncies a l'atzar, sinó que se centraran en l'impost d'un tipus de cotxe. Per a ells és important que la mostra fos representativa i això ho indiquen perquè a l'hora d'escollir quins casos estudiaran volien que fossin vehicles que utilitzessin la majoria de les persones. Aquest grup és molt coherent quan tenen l'eina que volen fer servir, ja que planifiquen l'estratègia que acompanya a la seva utilització. La seva primera idea de mostra es veu ampliada amb una submostra, seguint uns criteris (d'aleatorietat intuïtiva) similars. Aquests criteris són molt discutits pel grup.

A partir d'aquí comencen a extreure algunes conclusions, però observen que necessiten una eina més, aquesta és la diferència de valors. Una diferència entre els valors de les dades que seleccionen com a mostra i que analitzen a ull nu, a partir de càlcul mental. A partir d'aquí el procés és cíclic. Cerquen noves mostres, observen les diferències, treuen conclusions parcials, planifiquen les següents mostres. És un grup disciplinat i que va avaluant els resultats per saber si tenen prou coherència i, per això, periòdicament revisen l'enunciat.

6.1.2 Grup 2 (Primera Recollida)

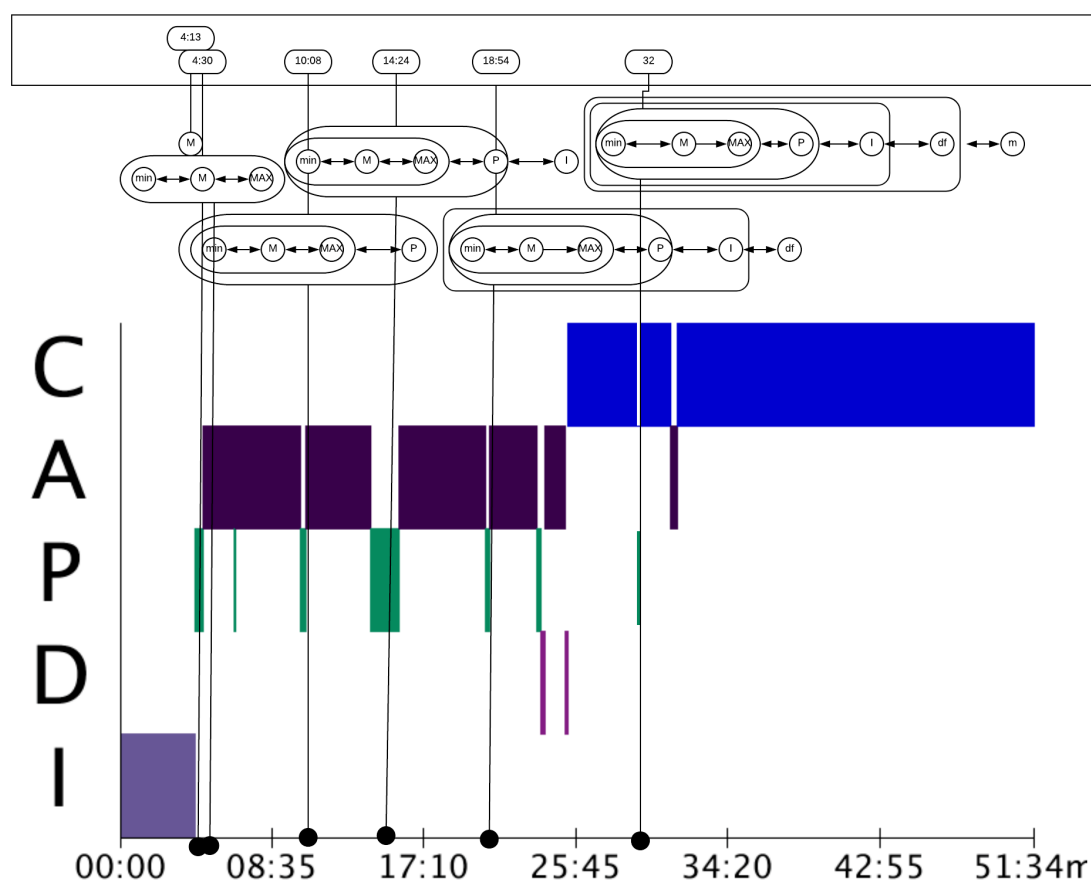


Figura 6.2: MAD i GEM Grup 2 (Primera Recollida)

Aquest grup és un grup sembla segur d'ell mateix i de l'estratègia que segueixen, perquè una vegada trobat el camí i definit el pla d'acció no tornen a l'enunciat per validar. Utilitzen una estratègia complexa però sense utilitzar tècniques matemàtiques o estadístiques avançades. Després d'un període de temps dedicat a entendre l'enunciat plantegen una estratègia inicial on fan ús de mitjanes dels màxims i mínims de cada província (minut 4:30). Fan servir totes les dades perquè utilitzen el full de càlcul com a eina tecnològica. Abans d'acabar el procés, s'adonen que el resum que fan de les dades no els permet comparar la variabilitat així que defineixen un interval (minut 14:35), diferent per a cada província, centrat en la mitjana que han calculat. L'elecció de l'amplada de l'interval depèn de l'observació de les semblances o diferència entre les dades.

A partir d'aquí classifiquen metòdicament les dades depenent si són dins de l'interval o fora de l'interval. Durant aquest procés es veu que es mouen entre la planificació i

l'anàlisi. Quan comencen a treure conclusions s'adonen de la necessitat de treballar a partir d'establir una mostra. És a dir, la necessitat de no agafar totes les dades i testar una part que puguin interpretar, ja que el seu procés és lent i meticulós i tenen davant una gran quantitat de dades. Tots els membres del grup van aportar idees, però es veia un lligam clar entre cap a on anaven les decisions preses a la conversa i l'eina escollida.

Posteriorment arriba la proposta de treballar per intervals per estudiar la dispersió de les dades. Aquest concepte que podria assemblar-se als intervals que s'utilitzen en els tests de normalitat i que va sorgir esporàdicament com a proposta d'un integrant del grup. El primer model apareix en les primeres fases de la interpretació del problema. En el primer cas hi ha una necessitat d'explorar les dades i fer-les seves; en el segon cas identifiquen la quantitat de dades amb la necessitat de fer servir estadística per resumir-la.

6.1.3 Grup3 (Primera Recollida)

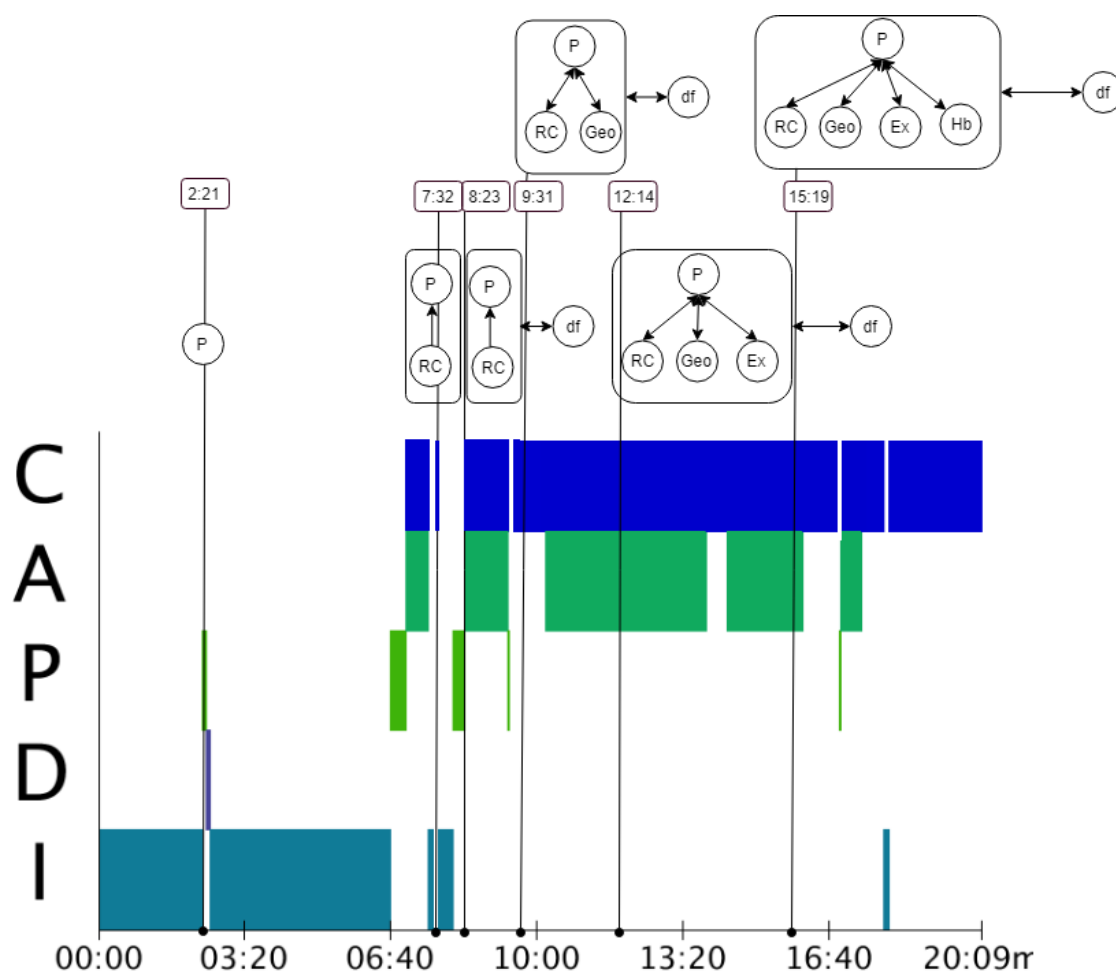


Figura 6.3: MAD i GEM Grup 3 (Primera Recollida)

Aquest grup treballa de forma segura i decidida a l'hora de definir l'estratègia escollida a l'hora de solucionar l'activitat, ja que no torna a revisar l'enunciat com mostra la barra horitzontal buida en la dimensió D. Una de les integrants del grup té molt clara la forma de treballar i dediquen poc temps per decidir la planificació a seguir una vegada l'han definit. Aquest grup esquivia l'anàlisi matemàtica i fa servir un conjunt d'explicacions basades en variables socioeconòmiques, possiblement inspirats en la matèria en què es trobaven fent a tasca. Per exemple, en el minut 7:30 decideixen que Badajoz és una província justa respecte al seu impost de circulació perquè pertany a una comunitat autònoma amb una de les rendes per càpita més baixes de l'estat Espanyol. O bé quan en el minut 9:05 decideixen que Ceuta és una ciutat justa perquè és una ciutat autònoma fora de la península Ibèrica. Podem observar que utilitzen les següents variables i característiques: la renda per càpita,

ser ciutat autònoma fora de la península Ibèrica, tenir exempts de pagament certs vehicles, ser una illa i tenir poca població. Un extracte de la conversa on es mostra aquesta forma de treballar és el següent:

A i B: Soria.

A: Soria.

B: Soria es porque es una de las provincias con menos población y con más problemas de implantación de población.

A: Población no vale.

B: Entonces sería, pones es justa: per ser una amb menys

B i A: Població.

B: És justa per ser una de les províncies amb menys població.

A: Siim

B: I amb més problemes d'implantació poblacional, amb més problemes d'implantació poblacional ... Problemes, problemes, ale, vamos bien. D'implantació poblacional, entesos, perdó.

Segueixen revisant diverses províncies i ciutats on observem que a mida que avancen en l'anàlisi incrementen el número de conceptes que consideren al model. Observem que són variables adequades i que poden ajudar a respondre la tasca i completar l'activitat. És un dels equips més ràpids i organitzats analitzats ja que anaven escrivint les conclusions quan encara estaven analitzant i a l'hora planificaven, sobre la marxa, ja que si no trobaven una explicació amb l'indicador que estaven fent servir el completaven amb un altre. El seu MAD+GEM mostra un treball on simultàniament analitzen i treuen conclusions.

6.1.4 Grup 4 (Primera Recollida)

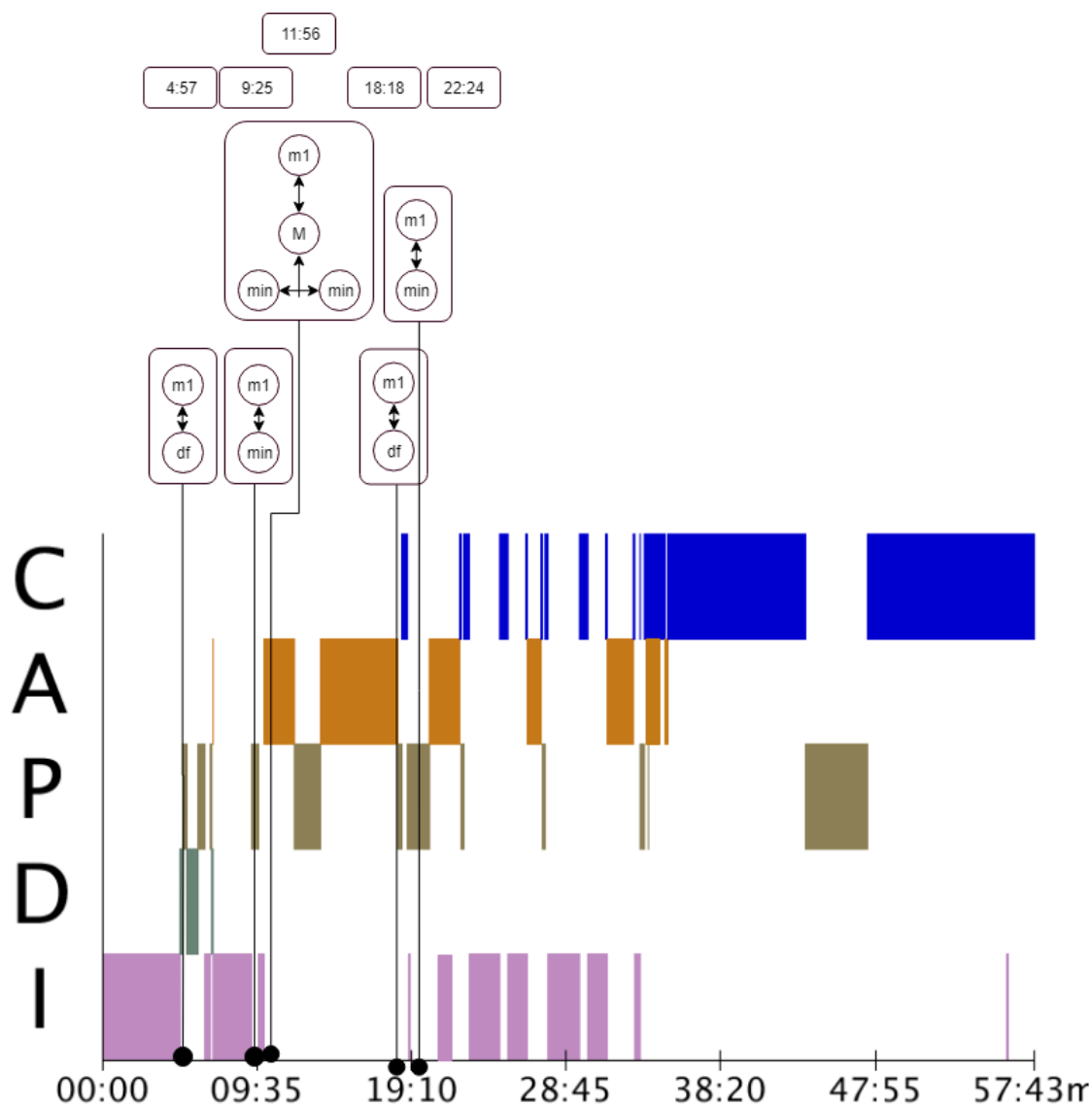


Figura 6.4: MAD i GEM Grup 4 (Primera Recollida)

En el treball d'aquest grup podem veure superposades algunes parts del procés de modelització. Hi ha dues raons principals que expliquen aquest fenomen: 1) utilitzen l'observació directa quan estan traient conclusions i al mateix temps que estan analitzant, i 2) el grup separa les seves activitats entre els seus membres, alguns membres del grup estan fent les conclusions d'un apartat mentre que l'altre hauria de fer l'anàlisi. Una part del grup no demostra iniciativa pròpia i està pendent de què diu la persona que actua com a líder del grup. Aquest grup necessita tornar a la fase de la lectura de l'enunciat diverses vegades durant l'activitat. El grup es manté ferm amb l'estratègia escollida a l'inici, encara

que hi ha moments de dubte. En aquests casos, en comptes de canviar l'estratègia a seguir, modifiquen la seva interpretació de la realitat. En un moment donat volen afegir més variable per fer la interpretació més complexa, però no aconsegueixen sortir-se'n i mantenen la seva proposta inicial.

Al minut 11:56 comencen a treballar amb un model més complex, però després de l'exploració de les dades i d'una nova interpretació de l'enunciat, el desestimen. Una de les raons que podrien explicar aquest canvi és que el grup es replanteja el seu treball amb molta freqüència amb el que definitivament retornen al model considerat anteriorment basat en utilitzar el mínim (l'import més econòmic) com a concepte bàsic del model a utilitzar. El següent extracte de la conversa mostra el moment en el que descarten el model més complex:

02:06 B: En plan ara has de mirar -les xifres- si s'apropen o sigui si la tarifa semblant si s'apropen

02:18 A: S'apropen a què?

02:21 B: Vull dir que, tampoco sé cómo explicarlo

02:26 B: Òbviament hi haurà un, o sigui, hi haurà els que són més cars i els que són més baratos hem de buscar els més baratos

02:37 A: Sí, la mínima i la màxima

02:38 A: és que això ja es veu no? 02:40 B no has de buscar de quina província i de quina és millor fer-ho

02:44 A: ¡Ah! ¡Vale! En todo, hasta 125, buscar la máxima y la mínima ¿no?

02:49 B: No, vale, sí però ho has de fer en general. Vull dir, aquí això a La Corunya és barato però igual aquí hi ha un més barato, crec, a La Corunya

02:59 B: Així que el que tu has de buscar és quina en general 03:04 A: En motocicletes quina és la millor ¿no?

03:06 B: Sí quin és surt més barato

Es corrobora doncs, que van treballar en el model dels mínims i màxims de les mitjanes de cada província, i que el van acabar descartant tot i no fer-ho explícit, ja que tant als àudios com a la producció escrites finals final, les conclusions es basen en el mínim de les dades.

6.1.5 Team 01 (Segona Recollida)

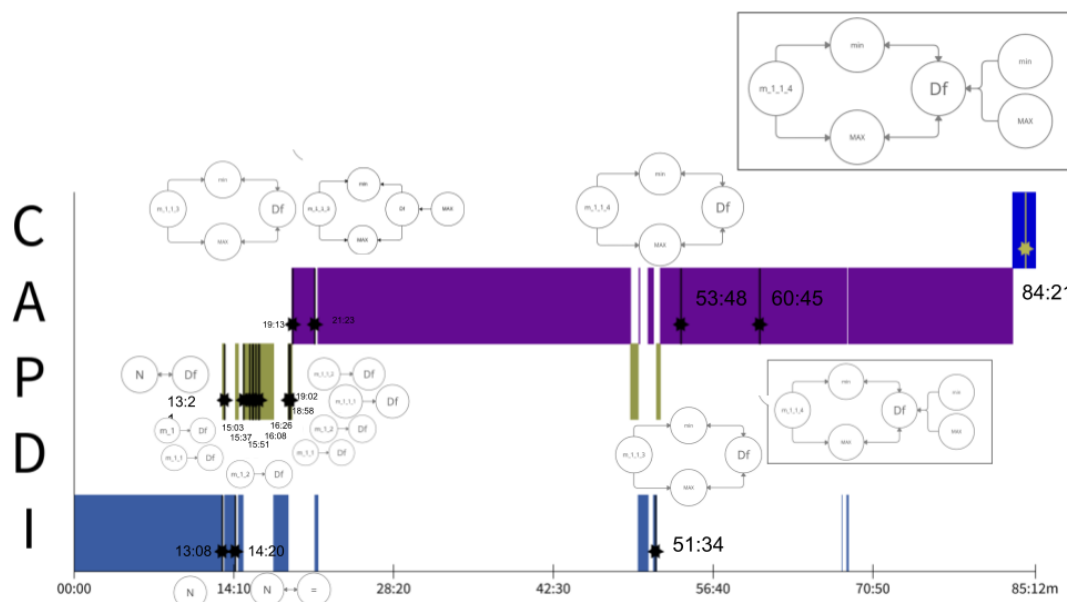


Figura 6.5: MAD i GEM Team01 (Segona Recollida)

En l'anàlisi que detallem a continuació és important remarcar que la taula que van elaborar i amb la què va treballar el grup mostrava un resum dels impostos de les capitals de província. En la seva gran majoria es diuen igual que la província en si. Ens referirem a ells com ho va fer el grup, com a província, no com a ciutat.

El grup Team 01 es proposa estudiar les diferències en l'impost considerant les dades de totes les províncies i comptant amb tots els tipus de vehicles. Ja en la primera fase en la qual consideren l'enunciat acaben concretant la necessitat de triar una mostra per a treballar (15:37) i es marquen com a objectiu estudiar la diferència dins de les categories de turismes i motocicletes. Just després s'adonen que amb els seus mitjans no és possible abordar el treball de manera efectiva i delimiten comparant les dades de les diferents comunitats autònomes (16:26). Per a això, trien a la ciutat capital de cada comunitat autònoma com a representant per a la comparació del valor dels impostos. Posteriorment trien treballar únicament amb les dades dels vehicles de menys de 8 cavalls fiscals (CVF) i els de més de 20 CVF, que són les categories de vehicles que tenen el valor mínim i el màxim per a l'impost estudiat.

Tot aquest procés s'engloba en l'activitat d'interpretar l'enunciat i no desenvolupen un

treball específic sobre les dades, al contrari, la quantitat de dades proporcionades en el full de càlcul proporcionat els fa treballar en la direcció d'esquivar-los. El que s'observa és la necessitat de triar una mostra de les dades proporcionades, en un procés en el qual es van determinant mostres diferents que puguin ser abordables en el seu treball. A partir d'aquest moment (19:13) comencen a calcular la diferència entre els impostos dels vehicles de 8 CVF i els de 20 CVF per a cada ciutat triada. Busquen després el màxim i el mínim d'aquestes diferències. Llavors identifiquen els que tenen la diferència màxima i la diferència mínima. Una vegada tenen identificades aquestes províncies resten el mínim i el màxim entre els turismes de 8 CVF i els de 20 CVF, i tornen a calcular la seva diferència. Així tenen un només un valor per comunitat autònoma per a poder comparar-les.

La Figura ?? mostra les dades triades pel grup i el procediment usat per a estudiar la situació per a les comunitats de València i Andalusia. El grup T1 destaca amb punts les ciutats representants de les províncies triades quan hi ha moltes províncies dins de la comunitat autònoma. A València no, ja que només té tres províncies i no ho necessiten. Anoten els valors dels impostos per a turismes de menys de 8 CVF (22,28; 24,29 i 21,20 a València) i els valors per als impostos dels turismes de més de 20 CVF.

Alicante	22'28 - 204'75	}	- 2.01 - 17'01 - 15
Castellon	24'29 - 221'76		
Valencia	21'20 - 219'01		
			Valencia
Almeria	23'12 - 205'11	}	
Cadiz	24'90 - 220'60		
Cordoba	24'22 - 224		2.12 - 18'89 - 16,77
Granada	25'24 - 224		
Huelva	25'24 - 224		
Jaen	17'67 - 224		
Málaga	24'35 - 216'25		
Sevilla	22'33 - 224		
			Andalucía

Figura 6.6: Fragment de la producció de l'equip Team 01

Els alumnes calculen les diferències entre aquests dos valors que es troben en un altre full. Trien la major i la menor d'aquestes diferències per a tenir-les en compte. En l'exemple mostrat, Alacant té una diferència entre aquests dos impostos en la mateixa

ciutat de 182,47 i Castelló de 197,47, en canvi València està en 188. El primer serà triat per ser la mínima diferència i el segon serà triat per ser la major diferència. Llavors calculen les diferències entre aquestes províncies d'un mateix impost, per a la comunitat de València calculen la diferència entre 24,29 i 22,28 que els dona un resultat de 2,01. I també calculen la diferència entre els valors extrems dels impostos dels vehicles de més de 20 CVF, 221,7 i 204,75 en el cas de València, i resten els dos valors. En aquest cas és 15, aquest valor és l'indicador que els permetrà comparar amb la resta de comunitats autònomes. Aquest mateix model (Figura ??) el van aplicar a les motocicletes.

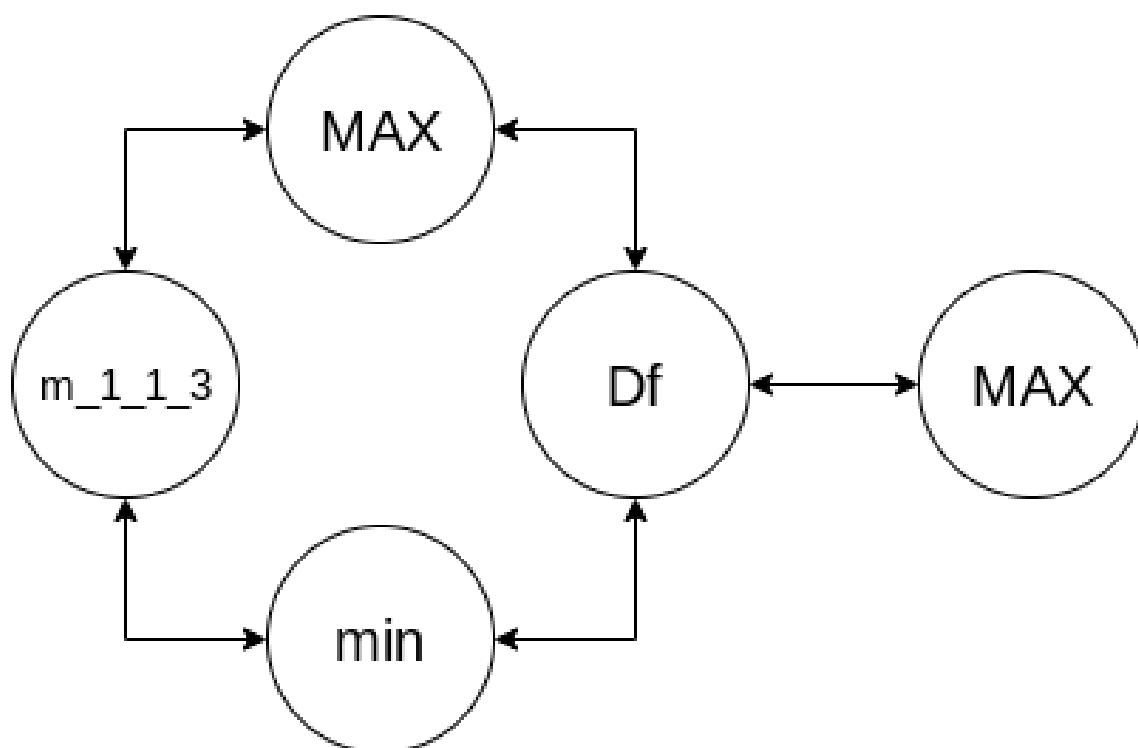


Figura 6.7: Model Final de l'equip Team 01

És un grup que es va prendre el seu temps per a entendre el problema. De fet van prendre anotacions de les paraules clau i d'allò que els semblava important de l'enunciat de la tasca. No els va interessar explorar les dades i van utilitzar la majoria del temps en aplicar el pla decidit, ja que ho van fer tot a mà, només ajudant-se de la calculadora. Observem canvis del model quan planifiquen. En el primer període de planificació tornen molt a l'enunciat, també ocorre el mateix en el segon període de planificació. On es dona la concentració major de models és en el primer període de planificació/interpretació. Però també sorgeixen durant l'anàlisi (càlcul) i es ratifica en les conclusions.

6.1.6 Team 02 (Segona Recollida)

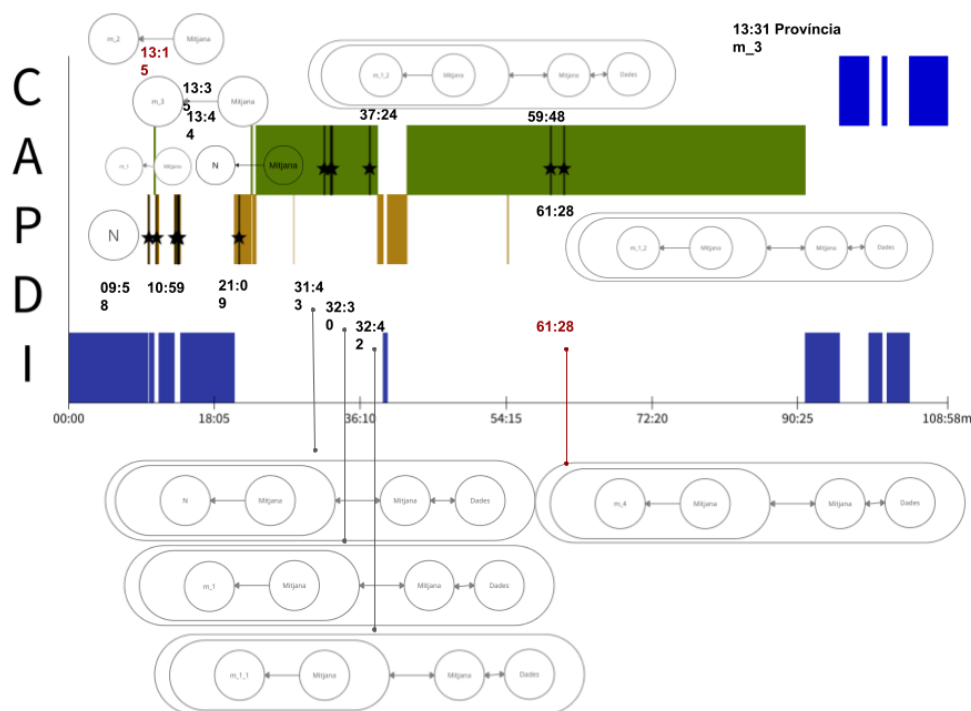


Figura 6.8: MAD i GEM Team02 (Segona Recollida)

L'equip Team 02 vol utilitzar totes les dades que tenen disponibles (9:58), però després especifiquen que faran servir la mitjana dels impostos de cotxes. En un moment donat (13:15) consideren comparar només comunitats autònomes, però ho descarten. Així tornen a marcar-se la mitjana com a concepte de referència però calculada per províncies (13:35). Consideren després la possibilitat de calcular la mitjana de cada tipus de vehicle diferenciat per províncies (21:09). En el minut 31:43 decideixen fer la mitjana de cada municipi de cada província i comparar-la però en el 32:30 ja decideixen de nou que només ho faran per als cotxes i en el 32:42 que seran els cotxes de menys de 8 CVF. Hi ha un moment en què decideixen també fer autobusos però ho descarten.

Aquest grup torna a revisar l'enunciat quan estan planificant i també al final, quan generen les conclusions. Però no només hi ha canvis del model considerat quan estan en el procés de planificació/interpretació, també durant la fase d'anàlisi. Aquest grup no ratifica o crea un model nou en les conclusions però sí que visita l'enunciat diverses vegades durant el procés de redactar les conclusions.

6.1.7 Team 03 (Segona Recollida)

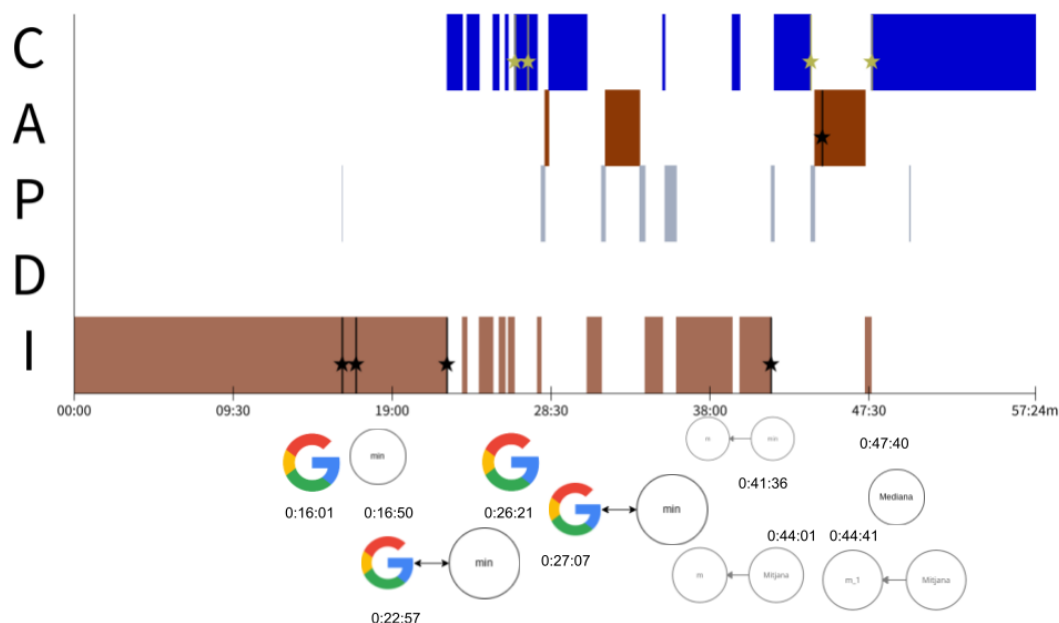


Figura 6.9: MAD i GEM Team03 (Segona Recollida)

L'equip Team 03 (T3) centra, inicialment, el model en cercar la solució de l'activitat en Google. Però no cerquen literalment la solució, primer plantegen l'estratègia, que serà buscar el mínim entre els impostos. No busquen aquest mínim a les dades proporcionades a la tasca, ho fan al cercador de Google. Però cap al final del seu treball decideixen cercar el mínim a les dades donades. Posteriorment al minut 44 volen calcular la mitjana de les dades de la taula i després la mitjana traient el màxim, però ho descarten perquè no saben com fer aquest càlcul. En el minut 47 decideixen trobar la mediana, encara que no ho expressen explícitament.

00:24 V: Pues vale, pues mira lo que podemos hacer es que todo el mundo cobre como Jaén que **es la mitad** como tampoco es muy caro es lo más barato pero lo menos barato.

6.1.8 Team 04 (Segona Recollida)

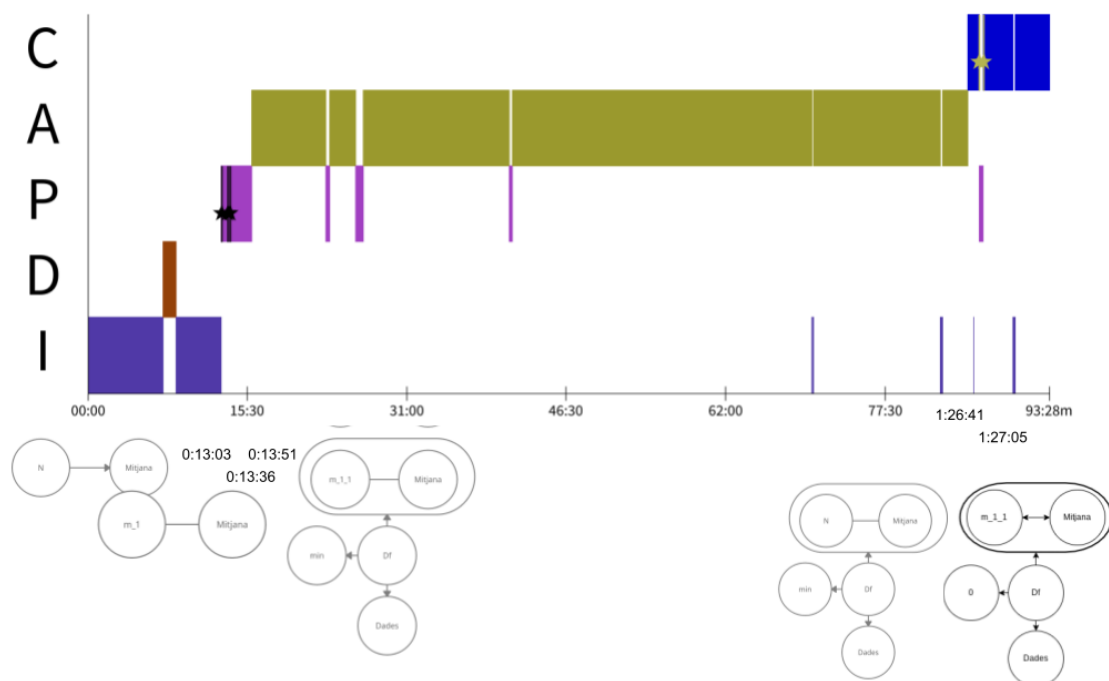


Figura 6.10: MAD i GEM Team04 (Segona Recollida)

Els grups que generen un model que suposa un càlcul important i que utilitzen, o no, les eines informàtiques del full de càlcul implica un període d'anàlisi llarg en comparació a altres fases. Aquest equip, Team 04, n'és un clar exponent. A més, és d'un dels pocs grups que té una fase àmplia i intensa d'Exploració de les Dades:

N: Mira Barcelona, a ver busca Sant Cugat, Sant Cugat del Vallés (M: Sant Cugat del Vallés). Sí 89000 personas

07:26 M: Pon arriba que entonces no se ve esto

07:27 N: 89000 personas somos

Després de la interpretació, en el minut 13 en la fase de planificació decideixen fer la mitjana dels impostos de les diferents províncies:

02:40 N: Ya pero, ¿En qué nos basamos?

02:41 M: En esto

02:44 N: ¡Ah, vale!

02:44 M: Entonces, eh, si hacemos una media de en plan por provincias.

Aviat s'adonen de la immensitat de la feina que han decidit. De fet, gairebé és automàtic que no facin la mitjana de tots els tipus de vehicles i que es centrin en els turismes:

02:56 M: Ehm, si hacemos, en plan, una media de por tipo hacemos, eh, los turismos, todos los coches desde el ayuntamiento este de Algengibre de Albacete, hacemos una media de lo que pagaría entre los cuatro, un, dos, tres, cuatro, cinco.

03:17 A: Cinco

03:17 M: Cinco tipos de coches que hay

03:18 N: Uhm

A: ¡Vale!

03:18 M: Entonces eso no sea un número

03:20 N: Pero a ver cada cuánto sale Albacete, aproximadamente.

03:25 A: Es que hay muchos ¿eh?

03:30 M: Es que hay un montón.

03:30 A: Un montón.

03:30 M: Pero ¿Cómo te basas sinó?

03:32 N: Vale, entonces, y si, por ejemplo, cogemos todos los de Albacete de menos de 8 caballos lo sumamos todos hacemos la media y el que sea me ha parecido, es el más justo

03:43 A: ¡Ah! También vale

M: Vale

03:45 N: Así, con todos, con todos.

Així que agafen només els turismes de menys de 8 CVF i calculen només aquesta mitjana. Llavors proposen, en el minut 14 aproximadament, identificar les dades que més s'assemblin. El procediment específic no queda explicitat. Després d'estar calculant mitjanes amb el full de càlcul, al final, s'adonen que el pla inicial de revisar les diferències no es possible i escullen com a valors de referència el mínim, la mitjana més baixa i la província més barata per als impostos de cotxes. Aquest canvi es deu a que han vist la quantitat de treball necessària per implementar aquest model a totes les dades. Finalment, només apliquen el model en tres províncies. El següent extracte mostra aquest procés de decisió.

00:35 N: A ver, ¿Cómo sabemos cuál es la más justa? Es que no sé

00:37 M: Se ve en este o... Almería porque es es la la cosa esta sale igual

00:44 N: ¿Cómo que sale igual? No entiendo lo que sale igual.

00:47 M: Pero sino ya lo envío yo en plan que lo envío mira.

00:52 M: A ver de las tres provincias que hemos hecho Albacete Almería y Alicante la más justa ha sido la provincia de Almería ya que...

01:01 M: O sea, que ¿qué estábamos mirando?

01:02 N: Los precios.

01:05 M: Ya pero de los (M intenta hablar pero N no la deja o no la escuchan) coches, autobuses y camiones...

01:08 N: Yo creo que es lo que tendríamos que hacer es es sumar todo esto dividirlo entre todo y nos dará una media y entonces hacemos esto con esta media estos en plan esto son medias, al fin y al cabo el resultado de aquí pues, si cogemos el resultado de las medias y lo sumamos coches motos autobuses y tal lo sumamos, hacemos la media de todo y lo hacemos con todas estas el que esté el número **más bajo** decimos que es el más justo.

01:30 N: Pues es que es el más barato

01:32 M: ¿No sería más justo Almería porque lo tiene todo igual?

01:35 N: ¡Ah! Pues también.

01:38 N: Bueno es que tampoco, no tiene todo, todo, bueno sí solo tiene, sí sólo tiene tres solo tiene tres distintas. Vale pues, ponlo, eso

01:43 N: Di: porque la mayoría de los precios en autobuses coches y camiones es prácticamente el mismo

01:50 M: La mayoría de los precios de los coches, autobuses y camiones

02:01 A: prácticamente los mismos.

02:05 M: prácticamente los mismos.

6.1.9 Team 05 (Segona Recollida)

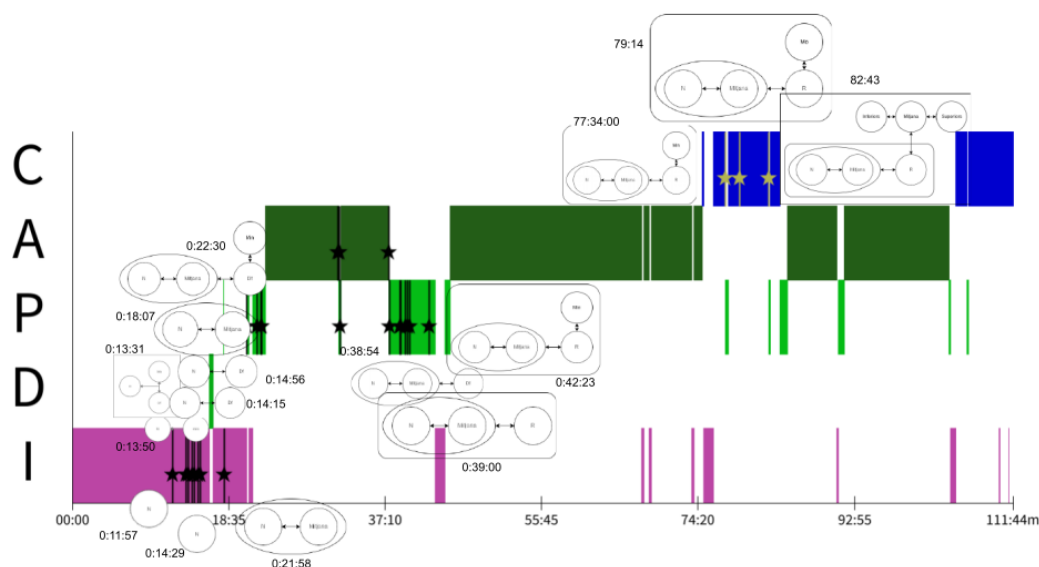


Figura 6.11: MAD i GEM Team05 (Segona Recollida)

Aquest equip, Team 05 concentra una creació elevada de models. També tenim un període de temps comprès entre el minut 0:31:31 i el minut 0:37:43 on es distingeixen alguns models que no hem representat amb GEMs. Com vam explicar al capítol anterior, aquests models no prenen vida, ni es discuteixen. L'últim model considerat és només conceptual i els estudiants no deixen clar com ho podrà implementar. Comencen a aplicar el model calculant mitjanes i determinant rangs, el que suposa la implementació d'una part del model. Com utilitzar aquests valors per definir quines són les províncies on els impostos són més justos, ho deixen per a la fase final. Només tenen clar que hauran de veure les diferències obtingudes.

En dues ocasions identifiquen mancances del seu model per a proporcionar la resposta a la pregunta plantejada. Raonen que el rang no és la millor mesura per definir la dispersió de les dades, perquè no descriuen com es disposen les dades entre el mínim i el màxim de la distribució. Aquest fet es mostra al següent extracte de la discussió del grup.

07:31 M: Lo malo de si hacemos esto es que, yo qué sé, puede haber unos justo, súper, un número súper grande y uno súper pequeño y luego, luego restos entre el medio

07:40 E: Ya pero da igual

07:41 M: pero bueno no se puede hacer nada

Aquest grup calcula la mitjana de tots els impostos de cada població utilitzant el full de càlcul. Després calculen el rang d'aquestes mitjanes per províncies. Aquí volen veure les diferències d'aquests rangs però no saben com fer-ho. Pensen en el mínim dels rangs com l'indicador de província justa, però el descarten. Després opten pel rang que més es repeteix, però també descarten aquesta via. Per últim decideixen calcular la mitjana dels valors centrals dels rangs. Les províncies que estiguin per sota serien les justes, les províncies que estiguin per sobre, serien injustes.

Podem identificar diversos episodis en què apareix el model o canvia:

- En la interpretació redefeixen l'enunciat i el simplifiquen, el que implica establir un primer model intuïtiu.
- Quan ja tenen definits aquests models intuïtius planifiquen la feina. Quan comencen a fer càlculs implementen una part del model.
- Parlen de Diferència com a paraula clau sense especificar a què es refereixen. Posteriorment l'han de concretar en un procediment, però es troben que no és només calcular la resta de dos nombres, així que es trobem amb la necessitat de definir quins valors (com a representant de les variables rellevants) han de restar. És a dir, observen la necessitat de quantificar la diferència i endarrereixen la presa de decisions.

6.1.10 Team 09 (Segona Recollida)

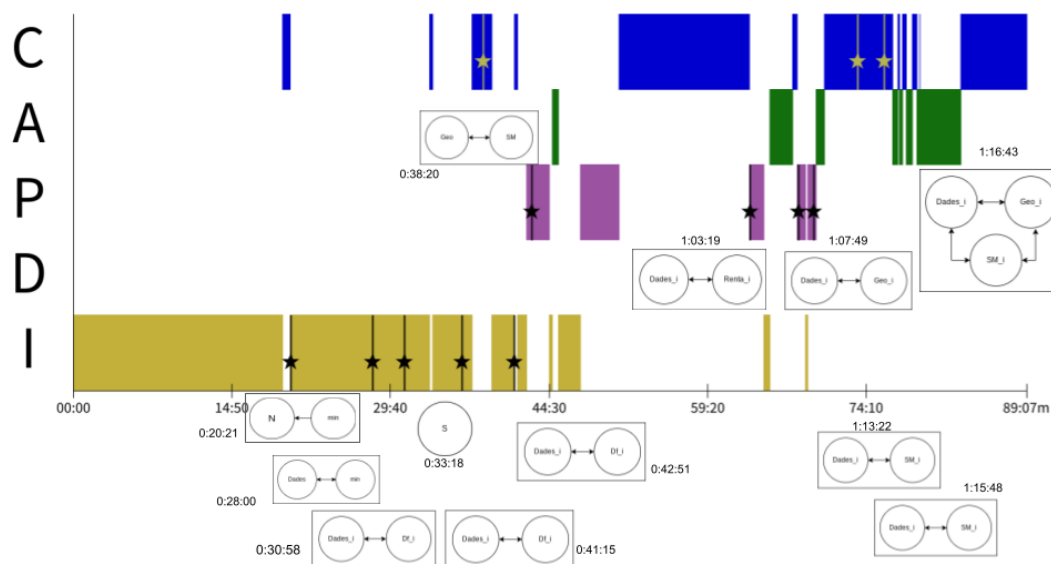


Figura 6.12: MAD i GEM Team09 (Segona Recollida)

Aquest grup tenia tres membres, com tots els altres grups, però a la primera part de la sessió de treball no va estar present una de les components del grup. Inicialment van decidir que l'impost més econòmic era el més just, és a dir, el mínim dels valors de les dades de l'article era el just. Quan es va incorporar la tercera integrant del grup van decidir començar de zero, van tornar a llegir l'enunciat i acorden que les províncies més justes no havien de ser necessàriament les més barates, i per tant, comença una discussió entre les integrants del grup per saber què fer.

En aquest grup l'anàlisi és especialment complex, ja que és difícil separar la planificació de la interpretació i, a la part final, la interpretació de les conclusions, ja que per comunicar el seu pensament fan servir exemples constantment. Això demostra una gran dependència de les dades i un nivell d'abstracció conceptual baix. De fet, la solució explicitada a l'informe passa per exemplificar el que elles creuen que està passant.

Així al minut 30 pensen que el salari pot ser un factor decisiu, posant l'exemple comparant entre dos províncies. En el minut 36 consideren que la localització territorial també és un factor a tenir en compte, encara que no queda clar que aquesta localització tingui implícit un significat econòmic. Per exemple, en el fragment següent comparen

entre Albacete i Madrid pensen que hi ha un diferència no només geogràfica sinó de caire econòmic. No escullen els exemples a l'atzar. De fet l'exemple comença amb Albacete i Almeria i passen a discutir sobre Madrid.

04:09 Soy de sueldo medio bajo pues que me descuenten los kilómetros porque yo que sé, es que no sé, es que no tengo ni idea, o sea...

04:21 M: O por ejemplo, Valencia, yo soy de Valencia pero me tengo que ir a trabajar a Madrid

J: Pues claro entonces dices que me lo descuenten porque...

04:35 M: Entonces el coche lo compré en Madrid pero como vivo aquí estoy haciendo diferencia (...)

04:41 J: Sí, vale, pues hacemos lo de Valencia-Madrid que es fácil.

04:43 A: Vale.

04:46 M: O vivo en Madrid y me voy a Valencia, da igual.

04:47 A: Vale.

J: Informe: escribes tú mejor ¿vale? porque con que escriba uno si ponemos cada distintas va a ser un lío.

...

07:04 M: pues que hi ha algunes, por ejemplo, en Melilla

J: Es el más barato.

En el següent fragment volen seguir el treball començat anteriorment, però afegeixen la distribució de la renda. S'expliquen entre elles el model amb exemples o, simplement, el model són els casos particulars. És a dir, cerquen dues poblacions a priori diferents, ja que tenen un impost diferent entre elles i miren la distribució de la renda com a justificant.

08:17 Por ejemplo, Barcelona, La Coruña, no sé qué de menos de 8 CVF, se paga una cantidad de 23,47, en cambio en Melilla se paga 6,31, consideramos que esta diferencia de precios es exagerada.

08:32 Teniendo en cuenta la ubicación de cada ciudad y que es desequilibrada

08:37 Si nos metemos en el papel de una persona de Barcelona con el impuesto de circulación nos indignaría la diferencia de precios. 08:44 J: Eso es lo que hicimos el último día.

12:45 J: sería justo o no pagar más, mejor poner ejemplos que sinó, teniendo en cuenta,

por ejemplo, teniendo en cuenta el salario mínimo medio, perdón, de Cáceres

Així trien el salari mitjà com a element diferenciador. No queda clar si hi ha motius geogràfics i econòmics o només econòmics.

M: Y en Salamanca.

15:30 J: Por tanto es justo que cobren menos que en Salamanca que el salario medio al año ...no?

A: ¡Ah! O sea, que depende del salario.

15:39 J: Claro, depende del salario puedes pagar más o menos por eso también en función de la provincia A: ¡Ah! ¡Claro!

6.1.11 Team 10 (Segona Recollida)

No té els temps

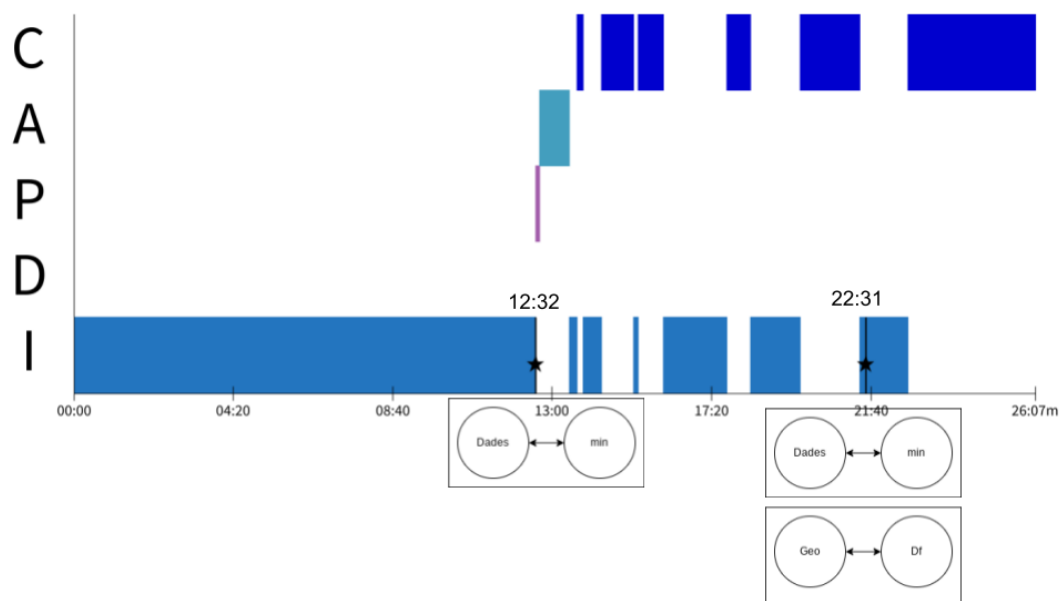


Figura 6.13: MAD i GEM Team10 (Segona Recollida)

El grup Team 10 inverteix poc temps per a la planificació, en conseqüència va tornant a l'enunciat durant tot el procés en què redacten o expliciten les conclusions. Durant el treball apareixen dos models diferents. En el minut 12:32 apareix el primer model que es basa en considerar el mirar el mínim de les dades donades. Per a ells les províncies més justes són

les que tenen l'import més baix. Al final del procés s'adonen que la localització és important:

04:25 AL: Porqué, en plan, no es lo mismo utilizar el coche en una ciudad, por ejemplo, yo que sé, Barcelona que utilizarlo por el campo, no es lo mismo

04:38 M: ¿Por qué?

04:38 AL: No sé, es mucho más diferente

AR: Son cosas distintas.

04:41 AL: Puedes ir por un sitio donde es mucho más famoso y hay muchas más cosas, en cambio en el campo sólo ¿cómo no quieras parar a tomar un café en una gasolinera? Je, je, je

04:54 M: Vale.

04:56 M: ¿Ves? Sí que es justo.

Acaben trobant just que es cobri diferent però injust que la diferència sigui tan elevada. Ambdós models conviuen però sense interrelacionar-se. A la fi, la producció entregada, té en compte el primer model.

L'article deixar clar que cada Ajuntament decideix quin és el valor de l'Impost i que l'Estat només dicta quins són els automòbils que n'estan exempts.

A l'article diuen que dins de la mateixa comunitat i, fins i tot, la mateixa província les diferències són evidents. Quines províncies són més justes i, per tant, el fet de matricular en una població o en una altra no suposa un greuge comparatiu pels propietaris dels vehicles.

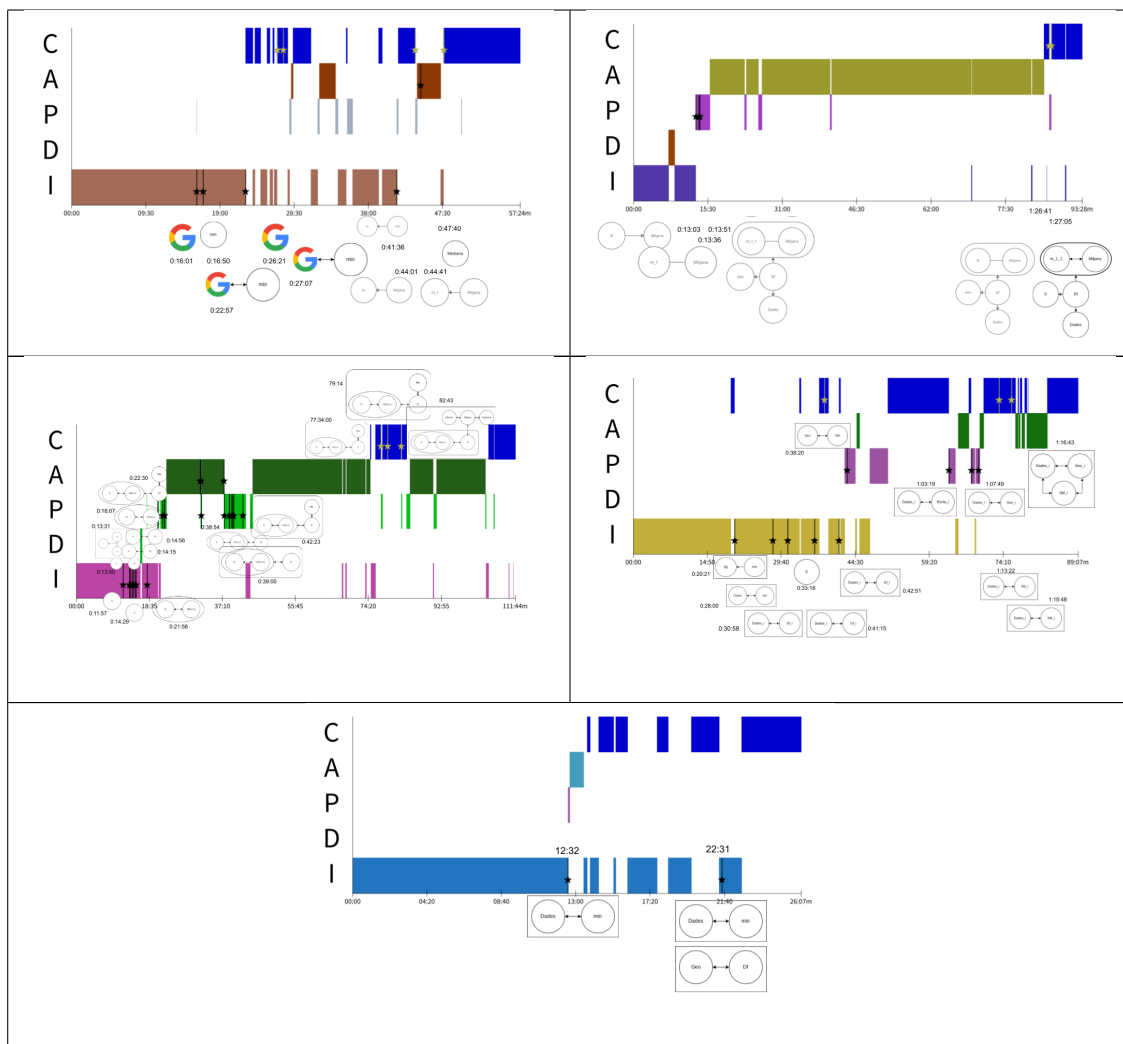
-Les províncies més justes son Melilla i Ceuta.

Hisenda us demana un informe per avaluar aquesta situació i decidir si l'Estat ha d'intervenir. Ha d'incloure un recull de propostes que valorin diferents solucions.

-Evidentment l'estat ha d'intervenir Per les següents raons: Creiem que no és just la diferència tan gran d'impostos però comprenem que hi hagi més impostos per la localització, una possible solució seria queixar-se perquè baixin el impost.

Taula 6.2: Quadre resum dels diagrames que combinen els MADs i els GEMs





La realitat és que quan posem totes les representacions juntes, en una primera observació no trobem cap similitud. Cada grup ha seguit uns temps, uns models i distribució de fases ben diferents. Primer procurem relacionar les fases del procés i la creació de models:

- Es crea, refina o canvia el model en la fase de planificació? Hauria de ser així sempre ja que la fase de planificació està pensada per això, per definició: Decideixen l'estratègia a seguir. Tots els grups, excepte un grup (T10), ja tenen el models en la fase de planificació, però no tots els models sorgeixen en aquesta fase. En la taula 6.3 podem veure un resum de la distribució dels models al llarg de les fases.

Es pot observar que el més freqüent és que es formin models a la fase de planificació. El següent estadi més freqüent és la d'interpretació. No obstant això, tots els equips de treball trobem models que s'han creat en el canvi d'una fase a l'altre, estan en el límit. I diversos, justament, els trobem al final de la interpretació. D'aquí podem

Equips	I	D	P	A	C
G1	2		2		
G2			4	2	
G3	1		1	2	1
G4		1	3	2	
T1	3		8	3	
T2			7	6	
T3	2		1		4
T4			3		2
T5	8		13	3	3
T9	5		4		3
T10	2				
T	23	1	46	18	13

Taula 6.3: Taula Models distribuïts per fases

concloure com una tasca amb un enunciat ambigu que faci discutir els participants i sense una solució clara, amb un context real, ajuda a crear l'ambient propici per a la participació de tots els membres de l'equip.

- Es crea, s'abandona, refina o canvia el model perquè no s'adapta a la solució que pensen què demana? Per tant, el model hauria de desaparèixer després de tornar a l'enunciat i ser substituït per un altre. A quants grups li passa això en un moment o en un altre del procés? Hi ha diversos grups (G1, G3, T1 (A-I), T3, T4, T5, T9 i T10) que una vegada desenvolupat el model torna a canviar o reaparèixer un antic quan estan fent i han de tornar a la interpretació o a l'inrevés.
- Hi ha fases de planificació en tots els grups. Podríem pensar que són petites quan el model és poc complex o basat en elements no matemàtics. Tenim diversos grups (G3, T3 i T9) que basen els models en indicadors o cerques per Internet en algun moment. Efectivament, els seus períodes de planificació, respecte a la resta de processos són molt breus. Però tenim grups, com per exemple el G2 amb un model complex però amb una fase de planificació curta. També és un clar exemple el T1 i el T2. Pensem, si mirem les característiques dels grups, que tant els que tenen models molt simples i que tot el grup està d'acord (G3, T3 i T9) en utilitzar-los, com els grups que posseeixen d'una bona base en la matèria tractada o idees (G2) que promouen la creació d'un model més sofisticat. Creiem que la base està en la idea de variabilitat que tenen els membres dels grups. En general, és una idea simple: diferència entre les dades donades. Molts la identifiquen amb una resta, però en trobar-se grans quantitats de dades no saben que restar. Alguns grups fan la diferència entre el màxim i el mínim, simplement. D'altres, com el T01, refinen el concepte. L'aparició

de l'interval apareix quan creuen que ha d'haver-hi un marge d'error (G2).

- Es crea, s'abandona, refina o canvia el model perquè el càlcul es complica, és llarg i feixuc. Això inclou: canviar la mostra, canviar els elements implicats o aplicar tecnologia. Així hauria d'haver-hi un canvi de model després d'un període llarg d'anàlisi (càlcul). Això és degut a la gran quantitat de dades que es donen en la tasca. Encara que hi ha pocs grups que aborden el problema amb les dades del full de càlcul i simplement utilitzen la taula, ja són suficients per a comprometre la seva anàlisi. És cert que a l'estudi exploratori, en haver menys dades, podien explorar-les intentant identificar patrons i associar-los al context. En aquest cas, les dades, són similars, però diferents, a ull nu, encara que en poca quantitat costa identificar les diferències. Per això i, com que l'article adjunt ja donava exemples, molts no exploren les dades. Com són ho explica la pròpia tasca.
- Si en comptes de tenir el temps a l'eix d'abscisses, tinguéssim el percentatge respecte al temps total utilitzat, canviaria molt la percepció de les gràfiques? És evident. La realitat és que aquesta representació és molt efectiva per analitzar individualment el treball. També per comparar les fases del procés de modelització, per fer lineal el cicle de modelització. Però per comparar entre ells, com que cada grup utilitza lliurement el temps que necessita, podem quedar enlluernats per una franja llarguíssima de temps d'un grup en la fase d'interpretació inicial: T3, 22:57 (amb una, gairebé imperceptible interrupció per planificar) en contra d'una curta interpretació inicial del T1 de 15 minuts (també amb dues petites interrupcions). Una vegada entès això, s'observa que comparativament amb tot el temps que s'utilitza, que la interpretació inicial és una part important del procés en la majoria de grups. Hi ha models complexos que determinen llargades d'anàlisi molt més elevades, i que fan que, comparativament, altres fases del procés realitzat semblin menors. Per tant, fases llargues emmascaren la comparativa que volem fer. Però al mateix temps són necessàries per a la interpretació del procés.

En els períodes d'interpretació inicial (períodes on d'entendre els enunciats quan es comença la tasca) acostumen a ser els més extensos de tots els intervals d'interpretació que es produeixen durant el procés de resolució de la tasca. Nosaltres dubtàvem que com els períodes de treball es restringien, en la majoria de casos a deu minuts, en dies diferents (podien passar d'una setmana a dos o tres segons les circumstàncies, recordem que a la segona recollida treballàvem sota el protocol COVID19) apareixerien més períodes d'interpretació de l'enunciat degut a l'oblit, però un cop consolidat el model i després d'alguns períodes de recordatori de què estaven fent, no, necessàriament, tornaven a

l'enunciat. Els períodes d'anàlisi difereixen en el temps segons la complexitat del model o bé la manca d'eines informàtiques. L'exploració de les dades ha aparegut però menys de l'esperat. Potser degut a què l'article periodístic ja posava exemples o bé perquè marcàvem molt el temps de treball i no es permetien distraccions, i explorar les dades mirant-les detalladament i fent paral·lelismes amb situacions reals o experiències viscudes podria considerar-se una distracció en el procés de resolució de la tasca.

Per a comprendre què promou l'evolució dels models matemàtics, és necessari incorporar els GEMs als DAM. Simplement marcar els models en els quals es treballa i els models definitius en els DAM no proporciona informació suficient sobre els factors que influeixen en la seva modificació.

6.3 Síntesi de resultats de la Combinació de MADs i de GEMs

En aquest capítol es presenta un estudi que combina l'ús de les eines d'anàlisi desenvolupades en els dos capítols anteriors (Aymerich & Albarracín, 2023), com són els DAM (activitat) i els GEM (producte construït). La combinació d'aquests dos utilitza la mateixa activitat i les mateixes dades presentades al capítol previ.

D'aquesta forma l'anàlisi combinada permet identificar els episodis de l'activitat en els que els grups d'estudiants incorporen conceptes als models que construeixen. L'anàlisi de les converses en aquests episodis permeten identificar els elements que han motivat els canvis en el model considerat en cada moment.

A continuació es mostren els episodis de l'activitat de cada grup en els que es modifica el model matemàtic considerat. Els canvis en el model s'obtenen de la necessitat de modificar el GEM i l'element clau que provoca aquest canvi s'observa retornant a l'anàlisi de dades del DAM i identificant els motius de la conversa que porten al canvi. Per a cadascun dels episodis es justifica la motivació darrera de la identificació de l'element clau corresponent.

6.3.1 Estudi dels episodis clau del Grup 1 (Primera recollida)

En el primer grup de treball hem identificat cinc episodis (en les fases d'interpretació, planificació i conclusió) al voltant de l'aparició o modificació del model. Els desenvoluparem i explicarem en els següents paràgrafs. Recordem que el model emprat finalment és escollir

una mostra representativa i calcular les diferències de l'impost de circulació.

Episodi clau ECG1 1

Característica clau: Gran volum de dades.

A2 (01:54) (I)

S: Pero...puedes usar, o sea, cualquiera de los dos?

I: Sí porque en el EXCEL yo creo que es lo mismo pero más grande.

S: Y ¿Cúal usamos?

I: Eeeh... El que quieras, es que da igual.

S: Pues usamos el del word. [Aquí es refereix a Word però miren el full de càlcul, suposem una errada en l'expressió]

En aquest episodi els estudiants estan organitzant tota la informació rebuda, per tant, reinterpretant la naturalesa de la tasca en ella mateixa. En el següent paràgraf es decideix amb quina quantitat de dades treballaran, reduint la complexitat de treballar amb totes les dades proporcionades, però estan íntimament relacionats, ja que sense escollir amb quines dades es treballa no es poden continuar decidint en definir els procediments que implementaran.

A2 (05:06) (P)

I:...entonces ahora ¿hay que mirar todos?

S: Sí y comparar

I: Vale eh...

S: O sea, yo pondría sí.

Acabat el segon període d'interpretació de l'enunciat on descobreixen que hi ha un full de càlcul i una taula, el grup valora si cal treballar amb totes les dades o bé si només cal treballar amb una part. Així, comença un període de planificació on, en un primer moment, es decideix utilitzar totes les dades.

Episodi clau ECG1 2

Característica clau: Gran volum de dades.

A2 (05:16) (P)

I: No, yo creo que todos no hay que mirarlos.

N: No hay que mirarlos, hay que mirar algunos los que queramos.

I: Cogemos los turismos de yo qué sé.

S: Pues cogemos un poco del norte del sur, un poco de Extremadura.

El grup no explica per què escullen treballar a partir d'una mostra de les dades. Podria ser degut al gran volum de dades, recordem que és un grup que ha explorat les dades, s'ha familiaritzat amb el full de càlcul i les dades que allà s'han recollit i són conscients de la quantitat de dades que hi ha, que superen la seva capacitat de gestionar-les.

Episodi clau ECG1 3

Característica clau: Enunciat obert (Context) i Gran Volum de dades

A2 (05:28) (P)

I: pero hay tipos de turismos o sea de coches y de todo eso está de más de 20 caballos fiscales, que no sé qué significa eso, más de uno.(P)

A2 (05:38) (I)

N: ¿Lo busco yo?

I: Más de 12.

N: Caballos fiscales.

I: Caballos fiscales.

S: Pues a ver la media, o sea la mayoría de la gente tiene tipo de coche...

I: Cuántos coches o sea la gente.

N: Mira pone.

S: O sea.

N: En muchos artículos mencionamos los caballos fiscales ya que afecta al pago de algunos impuestos

I: Vale es esto.

El grup ha decidit només estudiar una part de totes les dades, una mostra, i estan veritablement preocupats per la seva representativitat, fet que es pot inferir de la seva conversa. Consideren primer que han d'escollir unes poblacions diferenciades, però s'adonen que existeix una altra variable que influeix en els valors de l'impost: la potència expressada en cavalls de vapor fiscals. Pensen que és representativa aquella mostra que comptarà amb els vehicles (cotxes) amb una potència fiscal més freqüent. No es tracta de prendre una decisió d'escollir una mostra degut a la gran quantitat de dades, sinó perquè la tasca té un context complex, on no només apareix una variable implicada sinó diverses, així com que segons a què es doni prioritat, el mètode de resolució (model generat) serà molt diferent.

A2 (06:52) (P)

I: Sí, pero hay que mirar, por ejemplo, no podemos coger un tipo de caballo fiscal que menos de la mitad de la gente use.

S: Claro, osea, hay que buscar el que más.

I: Exacto.

S: Mayoritariamente.

Episodi clau ECG1 4

Característica clau: Gran Volum de Dades

A2 (07:44) (P)

I: Ah! Vale! En el otro en el otro no es lo mismo te ponen en plan ayuntamientos, por ejemplo hay un montonazo de Albacete porque son todos los ayuntamientos de Albacete, vale, vale, vale.

S: Pero claro, porque aquí miras la diferencia.(C)

En aquest fragment apareix explícit, a la fi, com han entès el format de full de càlcul en el que s'expressen les dades proporcionades. Justament, és immediatament anterior a l'aparició del concepte de "diferència" en la discussió, ja com a conclusió amb l'observació aparent de les dades. Aquest concepte serà afegit al model considerat.

Episodi clau ECG1 5

Característica clau: Enunciat obert (Complexitat del context de la tasca)

A2 (07:59) (P) [Seguint la conversa anterior]

S: Pero claro, porque aquí miras la diferencia es más ya.(C)

A2 (08:03) (P)

I: Entre, entre ayuntamientos ¿Cogemos los de Barcelona, no? ¡Qué sinó madre mía! Mira, mira, Badajoz.

S: Pero hay que buscar "quines províncies són més justes" osea no es sólo centrarnos sólo en una.(I)

I: Vale, claro, pero es que hay que mirar en plan...

S: Hay que mirar A Corunya con el precio que tiene es justa o no. I: Entre si cogemos no todas pero y si cogemos dos o tres de un municipio de una provincia.

S: Sí.

Durant una llarga fase de planificació es van intercalant fases d'interpretació i conclusió com es poden observar en el DAM d'aquest grup. En una d'elles tornen a l'enunciat i posen el focus en la paraula "Províncies" per poder decidir quin tipus de mostra escullen.

Per tant, podem concloure com un enunciat real, necessita diverses relectures al llarg del procés. L'enunciat té diversos detalls que reinterpreten la situació i fan optar per diferents camins a l'hora de treballar.

En el procés de resolució de la tasca s'identifiquen cinc episodis clau en diferents fases del procés: interpretació, planificació i conclusions. El gran volum de dades, explícit en diversos comentaris, fa que el grup esculli treballar a partir d'una mostra. Òbviament, aquesta elecció està relacionada amb el fet que no utilitzen eines digitals per a treballar amb les dades. El concepte de "mostra" queda implícit en els seus diàlegs, però no el fan explícit. A més, mostren preocupació al respecte que la seva elecció permeti ajustar-se a unes conclusions generals, és a dir, cerquen una mostra prou representativa. La seva idea de mostra és intuïtiva i, com a tal, no exempta de concepcions errònies. Per una altra banda, es fa palès com un enunciat obert amb un context real darrere i plantejant una situació complexa, obliga al grup a diverses relectures i a tornar a l'enunciat (a la fase d'interpretació) en diversos moments del procés. Aquest fet enriqueix substancialment els models elaborats pels estudiants.

6.3.2 Estudi dels episodis clau del Grup 2 (Primera recollida)

El segon grup de la primera recollida també té cinc episodis clau que desenvolupament en aquest apartat en les fases d'interpretació, planificació, anàlisi i conclusió. El seu model final plantejava treballar amb uns intervals al voltant de la mitjana, de manera que les províncies que tenien els impostos fora d'aquest marge siguin considerades com a justes.

Episodi clau ECG2 1

Característica clau: Enunciat obert (Justícia)

A1 (3:16) (I)

M: Claro el informe sería el apartado b.

D: Sí.

A: Podemos poner que el impuesto de circulación implantado por las cada provincia es muy irregular ya que no todo el mundo tiene el mismo sueldo o calidad de vida y que el estado tiene que intervenir.

M, D i A: [Riuen] Ja, ja ja.

M: Vale, a ver.

D: Ya pero el hecho de ser una provincia que es muy justa en plan ¿qué límite tiene?

A: ¿Qué?

D: O sea, **¿cómo sé yo que una de éstas es justa?**

Aquest fragment és molt interessant perquè presenta una expressió que gairebé passa desapercebuda en la conversa, però que va ser molt difícil de classificar. Un integrant del grup, A, que posteriorment desenvolupa el model que utilitza el grup, ja està avançant una conclusió del treball i ja pronostica quins resultats obtindran: aquest impost és irregular. És a dir, després de llegir l'enunciat i l'article, A interpreta que estan afirmant que l'impost de circulació és evidentment diferent a cada província i que al final de procés només es podrà assolir una única conclusió. A més, segons la seva opinió, la situació plantejada a la tasca és normal, ja que els salaris i el que ell entén com de "nivell de qualitat de vida" varia a cada província i, per tant, són variables que influeixen en les diferències entre els valors dels impostos de circulació. Deduïm que té un concepte de justícia on aquesta és interpretada, no com un repartiment igualitari per a tothom sense distinció, sinó com un repartiment relatiu a unes categories preestablertes. En referència a categorització d'aquesta afirmació ens vam decantar per interpretació i no per categoritzar-la com a conclusió, ja que A exposa davant dels altres com interpreta la tasca, encara que la resta d'integrants del grup no desenvolupa aquest pensament.

El següent fragment important és ja la pregunta directa referida a la paraula "justícia". En aquesta pregunta dirigida als seus companys, D explicita la necessitat d'establir una eina matemàtica que li permet modelar el concepte de justícia. L'exemple que proposa i la pregunta directa sobre com interpretar matemàticament el concepte de justícia és immediatament anterior a l'aparició del primer model explícit. Des del punt de vista d'aquesta anàlisi, deixa de rellevància què fan, ja que en aquest fragment és més informatiu observar què es pregunten, que és el motor que fa avançar el model considerat. En aquest cas és clarament que el fet clau és que aparegui a la pregunta de l'enunciat el concepte de justícia i que aquest no estigui clarament definit ni en el seu sentit social com matemàtic.

A1 (04:13) (P)

[Continuació de la conversa anterior] M: A lo mejor hay que hacer la media o algo.

D: Porque abajo dice supongamos un vehículo con más de 20 caballos fiscales domiciliado en Melilla la tarifa de dicho impuesto será de 44.

A: Podemos hacer una media de la más alta y la más cara y esa la ponemos como la más equilibrada.

D: Vale M. por probar, a ver calculadoras.

Episodi clau ECG2 2**Característica clau:** Gran Volum de Dades

A1 (09:55) (A)(P)

M: Todas las columnas hemos hecho las de turismos estaremos ahora por las de ciclos y faltarán las de motocicletas.(A)

D: Vale ¿lo hacemos de todo?(P)

En aquesta conversa podem observar com es passa de l'anàlisi a la planificació. Han estat treballant en el seu model per a calcular la mitjana del màxim i el mínim. Han utilitzat el full de càlcul i les calculadores. El grup ha utilitzat tota la tecnologia al seu abast per anar tan ràpidament com li ha estat possible. Però en un moment donat es pregunten si ho fan tot i treballen amb totes les dades proporcionades. El fet important no és que optin per una mostra o per treballar tota la població, sinó que sorgeix una pregunta sobre la necessitat de decidir com es gestionaran les dades. A partir d'aquí aquest punt, el grup pren una decisió, però s'evidencia en aquest fragment com dotar a l'enunciat de la tasca d'una gran quantitat de dades els fa preguntar-se sobre com gestionar-les.

Episodi clau ECG2 3**Característica clau:** Enunciat Obert (Concepte de Justícia)

A2 (00:00) (P)

D: Ahora tenemos las medias

M: ¿Qué fem?

D: Ahora hay que mirar cuáles son más justas.

A: Podemos poner un margen y los precios que estén en ese margen pues los ...

M: O podemos hacer la media de todas

(00:16) A: ¿Para qué?

D: Bueno ¿Por probar?

M: (Riure) Ja, ja ja. Pero es que ...

D: Es que...

A: Es que no hacer la media de todas porque son como sectores diferentes, yo lo que quería era poner un margen.

M: Vale, vale sí.

A: Y los que estén dentro de este margen lo ponemos como como correcto.

M: Vale, vale. ¿Cómo hacemos el margen?

A: Pues...

M: ¿Cinco para arriba, cinco para abajo?

A: Yo estaba pensando como mucho 1,5 porque no varían mucho los precios en la primera.

D: Vale sí. Entonces las que ...

A: Bueno podíamos poner dos porque la mayoría son de veinte pico, 2 hacia arriba y 2 hacia abajo.

M: Vale. Pues 16,76, vale las más justas, A Coruña se pasa por...

D: O sea las que se pasen o las que no lleguen contarían como justas.

M: No, yo creo que justas son las que se quedan en el margen.

A: Sí las que están dentro del margen.

D: ¡Ah! Vale, vale, vale.

L'alumne A té la visió clara del model a seguir. En el primer episodi observem com l'alumne A no és qui es pregunta sobre la paraula "justícia", però sí que és qui té clar que la justícia no consisteix en donar a tothom el mateix. No obstant això, sí que recull del seu company D que ha d'haver-hi uns límits o condicions a complir. Així que ara repren aquest concepte de límits en forma de "marge", que nosaltres hem identificat com a Interval. S'ha generat un model matemàtic del concepte de justícia propi.

Episodi clau ECG2 4

Característica clau: Enunciat Obert (Context)

A2 (04:29) (A) (P) D: la otra media A: A ver ¿cuál es la media? 44 ¿me dejas un momento por favor? M: Es que son casi todas de 60 excepto alguna que se queda muy abajo. (A) A: Ponemos 15 hacia arriba y 15 hacia abajo que al menos va entrar alguna más que la otra (P) D: Vale A sería emm ... el máximo sería y el mínimo ...eh pon 30. D: Vale. M: Vale, vale, empezamos

En aquest episodi es fa una petita rectificació del model considerat: l'amplada de l'interval varia per adaptar-se a la informació numèrica que ells mateixos han calculat de cada província. Aquesta necessitat sorgeix d'un escenari proposat complex i basat en dades reals.

Episodi clau ECG2 5

Característica clau: Gran Volum de Dades

A3 (0:00) (C)(A)

A: Pon esto que es muy irregular como te dice que, ehm, que van valorar diferentes soluciones, podemos poner dentro del informe que una de nuestras

soluciones es poner unos márgenes.

M: Vale, vale.

D: Pues empieza a redactar el informe (C)

D: Pero el resto de las columnas? Lo hemos hecho.

M: No.

A: No, no, no hace falta porque es mucha cosa y vamos por la tercera. del primero, de la de los coches.

En aquest episodi els estudiants s'adonen que tenen molta informació, però no només en el sentit de tenir moltes dades per treballar, sinó de generar més dades per analitzar. Recordem que de cada província la resumeixen amb un paràmetre propi (mitjana del màxim i mínim) però al mateix temps això fa augmentar les dades per analitzar i extreure conclusions.

Podem observar com l'enunciat és el protagonista. Recordem que la tasca verifica les característiques de les MEA's, això significa que és real i, per tant, el context juga un paper important, no només a l'hora de validar la resposta (ECG2 5) sinó a l'hora de modificar el model (ECG2 4). El gran volum de dades donades i generades protagonitza dos episodis. Finalment, l'ambigüitat del concepte de justícia, sobretot en l'àmbit matemàtic marca també els models d'aquest grup.

6.3.3 Estudi dels episodis clau del Grup 3 (Primera recollida)

Aquest tercer grup utilitzava diferents índexs socioeconòmics per decidir quines províncies eren justes. A mesura que el procés de resolució de la tasca avançava el model s'anava ampliant. Descriurem els sis episodis clau identificats durant el procés en les fases d'interpretació, planificació, anàlisi i conclusió.

Episodi clau ECG3 1

Característica clau: Enunciat Obert (Justícia)

A1 (01:21) (I)(P)

A: Vale a ver yo creo las tarifas de esto es el impuesto de circulación una tasca que en plan que regula como la administración local los ayuntamientos y por lo tanto el importe de este importe será diferente a cada población y ...

B: Ah! Vale, pues ...

- A: Y aquí tienes justicia que en plan ¿qué es?
 B: Sería....eeeh...mmmm estaría vinculado a la proporcionalidad del importe.
 A: Vale. ¿qué preguntas nos ...? Vale a ver.
 B: A partir de ahí hay unas “desto”.
 A: Supón, vale, lee esto, a ver qué dice.
 B: Espera. Espera.
 A: Entonces dice que tas...un vehículo...la tarifa sería...
 A: Vamos a mirar las tarifas? (P)

Aquest grup comença creant un concepte d'impost just com el proporcional. No fan referència encara a què ha de ser proporcional, no defineixen el model matemàtic però si que miraran totes les tarifes proporcionades.

Episodi clau ECG3 2

Característica clau: Enunciat Obert (Justícia)

- A1(07:30)
 A: ¿Qué ponemos? (A) És justa porque ¿qué?(I)
 B: Porque pertany a una comunitat autònoma... amb la renda per càpita més baixa. (C)
 A1 (07:40) (I)
 A: Què és la càpita tio?
 B: Són els diners que genera una comunitat autònoma [ho llegeix] dividit pel número d'habitants.
 A: Vale pues..¿lo has entendido?
 C: Sí, sí.
 A: a ver... vale... aha... perfecto... vale... (08:05)(P) ponlo en amarillo que destaque más.

El grup va enumerant en veu alta els valors dels impostos que consideren. El concepte de justícia apareix de manera recurrent per justificar les seves decisions. I el context real i obert inclòs a l'enunciat ofereix la possibilitat que la tasca es resolgui tenint en compte recursos d'altres matèries. Tot i així, la formulació d'aquests recursos es fa en termes matemàtics, ja que els indicadors socioeconòmics emprats estan basats en conceptes matemàtics, com pot ser la proporció i així ho utilitzen els estudiants.

Episodi clau ECG3 3**Característica clau:** Enunciat Obert (Context)

A1 (08:20) (A)

B: Barcelona tampoco porque no.

A: No, 23 es muy alto. [Diferència]

B: Bilbao.

A: Bilbao...

B: Tampoco.

A i B: Burgos...

A: Cáceres!

B: Sí.

A: Sí, Cáceres.

B: Cáceres sí, ¡Qué ilusión!

La diferència apareix de manera implícita com a variable discriminant en el procés de selecció. Recordem que "diferència" apareix en l'enunciat i que diversos grups l'associen a la resta i d'altres, com és el cas d'aquest grup, a la diferència com a concepte diferenciador.

Episodi clau ECG3 4**Característica clau:** Enunciat Obert (Justícia)

A1 (08:52) (A)

A: ¿Cuál habías dicho tú, C, qué era justa?

C: ¡Ah! Eeeh, Ceuta.

A: ¡Ah! Voy a mirar.

B: ¡Ah! Vale.

A: No creo vamos a mirar si ...

B: Sí que lo es porque es una ciudad autónoma de fuera del territorio de la península ibérica y tiene diferentes...

A: Vale, pues costes va pon porque es justa pon: es justa

A1 (09:19) (P)

B: Lo ponemos todo en catalán ¿no?

A: Sí, sí, sí.

A1 (09:23) (C)

A: ¿Por qué? ¿Qué has dicho? Vale porque es una ciudad autónoma.

B: Espera te lo digo.

A: Mmm.

B: Te lo digo en catalán.

A: Vale.

B: Sería ...

A: Escribe C.

B: És justa ... perquè és una ciutat autònoma fora de territori de la península.

Aquest grup fa molt evident com influeix el concepte de justícia en la presa de decisions. Com que no tenen un model matemàtic clar i definit, de manera recurrent tornen a preguntar-se sobre què és la justícia. Això ens ha permès observar clarament com és d'important per al procés de resolució i la construcció del model l'ambigüitat en els enunciats.

A1(13:51)(C)

A: Entonces ¿Cómo lo pondríamos?

B: Osea pondrías ... : “en aquest cas per criteris eeeh per criteris sería d'inso-laritat”. Pones una coma y ...

A: Pones una i ...vale espera lo subrayo ..vale.

Volem exemplificar que utilitzen el model més endavant quan també classifiquen les illes com a províncies amb distribució d'impostos justa per motius geogràfics.

Episodi clau ECG3 5

Característica clau: Enunciat Obert (Context)

A1(2:06)(A)

A: Pamplona no. Pontevedra.

A: Sí, Pamplona sí, porque yo creo, es que creo: “Perquè deixa exemptes” del impuesto los vehículos de 20 caballos por eso está en rojo.

Un context real aporta molts matisos a l'hora d'interpretar l'enunciat. En aquest cas la taula marcava amb asterix algunes ciutats i la interpretació que fan és que no paguen l'impost, sense consultar ni comprovar-ho externament.

Episodi clau ECG3 6

Característica clau: Enunciat Obert (Context)

A1(15:18)(A) A: Soria.

B: Soria es porque es una de las provincias con menos población y con más problemas de implantación de población. A: Población no vale.

B: Entonces sería, pones “és justa per ser una amb menys [a la vegada amb A] població”.

B: “És justa per ser una de les províncies amb menys població”.

Aquest paràgraf, novament, és mostra de com aquest grup fa girar tota l'activitat en l'àmbit social i com, el concepte de justícia es va ampliant al llarg del procés de resolució de la tasca.

Aquest grup, de manera recurrent, defineix el concepte de justícia que s'exposa a l'enunciat de la tasca. El context real, on han d'interpretar un article publicat i el context econòmic evoquen als membres del grup a utilitzar els indicadors econòmics.

6.3.4 Estudi dels episodis clau del Grup 4 (Primera recollida)

Aquest darrer grup de la primera recollida va descartar un model més complex basat en màxims i mínims per simplement triar una mostra i trobar el mínim de l'impost, és a dir, la localitat on l'impost és el més econòmic. Durant el procés hem identificat cinc episodis que descrivim a continuació en les fases d'interpretació, planificació i anàlisi.

Episodi clau ECG4 1

Característica clau: Gran Volum de Dades

A1 (02:07) (I)

A: Hem de buscar la província que és en plan ...tots els preus estiguin igualats.

C: Hi ha un quadre ¡Ah, sí!

A: Está gravant? ¡Ah, sí!

[...]

A: ¡Eh! Tia ho hem de buscar al link que ha posat ella o a la taula?

A: Aquest link és el mateix.

C: Sí.

A: Val.

[llegeixen en veu baixa]

B: Pues tenemos que buscar comunidades autónomas que más o menos porque sólo hay la carta de productos.

C: ¿No? És més caro en Girona que en Barcelona.

A: Espera, pero aquí...

C: Esto son por comunidades.
 A: Ya, pero mira cuántas hay ¿Eh?
 B: Ya, ya ...Ostres!
 A: Sí, hi ha un montón.
 A: N'hi ha moltíssims.
 B: Mira todos los de Alicante.
 A: Els de I?
 A1 (04:50) (D)
 C: Hay Barcelona?...
 A: Barcelona. Arenys...
 C: Aquí está Sant Cugat.
 A1 (04:57) (P)
 A: Vale chicas hay que mirar cuál es, tías, mireu de cada de cada comunitat si els preus estan igualtats.
 C: Ho apuntem en paper.
 B: I per què no fem Catalunya i ja està? Que son 4.

El grup quan està interpretant l'enunciat s'adonen de la gran quantitat de dades. En aquest primer moment volen ser exhaustius però hi ha un membre del grup que es pregunta si cal tot. Aquest és el fet distintiu, no que decideixin o no treballar amb tota la població o només amb una mostra. L'important és plantejar-se, com en el primer grup, l'opció de no treballar amb totes les dades.

Episodi clau ECG4 2

Característica clau: Gran Volum de Dades

A1 (06:42) (P)
 C: Però de totes no A?
 A: De totes.
 A1 (06:52) (A)
 A: Albacete.
 A1 (06:54) (I)
 C: A ver tirad para allí ¿Qué hay que mirar?
 B: Del impuesto de circulación ... turismo es un tipo de coche autobuses ... camiones... [estan mirant el full de càlcul].
 C: Sigue, sigue...del impuesto de circulación ...
 B: Este ¿ves? turismos.

Aquest fragment que continua durant alguns minuts conclou en l'elecció del mínim com a model matemàtic. De nou l'important és generar les preguntes i torna a ser evident que es plantegen fer servir totes les dades. A més, prenen consciència que no només tenen un llistat, que tenen una taula de doble entrada amb moltes més dades de les que inicialment havien observat.

Episodi clau ECG4 3

Característica clau: Interferència d'un altre grup

A2 (01:51) Vale hacemos Barcelona.

A: ¡Qué más da!

B: La mitja, la mínima i la màxima (de fons la X del G2) de cada columna Turismos.

En un moment donat, el grup consulta a un altre grup i segueix el model proporcionat per aquest grup.

Episodi clau ECG4 4

Característica clau: Enunciat Obert (Context)

A3 (01:17) (P)

B: És això, las tenéis que mirar osea que estas 4 primeras siguin per exemple 15 16 i 14, no 23 i 10, saps? En plan que...

A: ¿Cómo? ¿Cómo? B: Que sigui més seguit.

A: Vale.

En aquest fragment es pot veure com utilitzen exemples concrets en aquesta fase per crear el model matemàtic, a l'hora d'explicar i entendre què han de fer utilitzen exemples amb menys valors.

Episodi clau ECG4 5

Característica clau: Enunciat Obert (Context)

A3 (02:26) (P)

B: Òbviament hi haurà un o sigui hi haurà els que són més cars i els que són

més barats hem de buscar els més baratos.

A: Sí la mínima i la màxima, és que això ja es veu, no? B: no has de buscar de quina província i de quina és millor fer-ho.

A: ¡Ah! Vale, en todo, hasta 125 buscar la máxima y la mínima ¿no?

B: No, vale sí, però ho has de fer en general. Vull dir aquí això a la corunya és barato però igual aquí hi ha un més barato crec a la Corunya.

B: Així que el que tú has de buscar és quina en general.

A: En motocicletes quina és la millor, no?

B: Sí quin és surt més barato.

El grup havia intentat incorporar el model d'un altre grup, però no va quallar. Hi ha dos grups, un és aquest i un altre és de la segona recollida, el Team 3, que intenten utilitzar el model creat per un altre grup, però, a la fi, ho descarten. Aquest fet es pot doanr per diversos motius, però un d'ells és que la complexitat de la tasca fa que models aliens, que no han desenvolupat els integrants del grup, no els fan seus, no els poden portar a la pràctica perquè no l'entenen i no troben relació entre els conceptes i procediments utilitzats i la realitat. Cada grup s'ha format la seva idea de justícia, ha entès el problema segons els seus cànons i, en una tasca complexa com aquesta, és molt difícil reproduir models elaborats i pensats per uns altres grups. Aquí s'observa com la noció de justícia com el més econòmic pren força i s'imposa pel context plantejat.

Queda palesa la dificultat de la tasca per a l'alumnat. El fet de demanar a un altre grup quin model fa servir denota inseguretat en la seva proposta. Però el fet que renunciïn a la solució proposada per l'altre grup ens indica que el model de l'altre grup no casa amb com han entès l'enunciat. La tasca és oberta a diferents propostes de solucions, més o menys complexes o elaborades. Adoptar un model aliè implica entendre el raonament amb què el grup ha arribat a aquest model i no entrava dins de la concepció del problema d'aquest grup, per les característiques pròpies de la tasca. La realitat és que apareixen models que utilitzen conceptes similars en diversos grups, ja que adopten el concepte d'impost just com l'impost més econòmic, però models més elaborats no s'adapten a altres grups que els vulguin realitzar.

6.3.5 Estudi dels episodis clau del Team 1 (Segona recollida)

El primer grup de la segona recollida té un model on escullen una mostra, calculen màxim i mínims per província i avaluen diferències màximes i mínimes. Hem identificat sis episodis clau durant el procés de resolució de la tasca en diferents moments: interpretació, planificació i anàlisi.

Episodi clau ECT1 1

Característica clau: Gran Volum de Dades

A3(02:21) (P)

A: Pues se tiene que calcular de cada provincia.

D: Madre, madre, madre, ¡Pero qué!

A: Se tiene que calcular de cada provincia, ehm...

A: ...la diferencia.

D: Pero esto es muy largo

El grup Team1 ha necessitat dos períodes de temps (un total de 10 minuts) per llegir i interpretar l'enunciat de la tasca. Al cap de dos minuts de començar el tercer període de treball comencen a planificar la tasca entenent, per la seva interpretació de l'activitat, que cal estudiar totes les províncies. Immediatament, sorgeix la pregunta de què cercar i com fer-ho. Calcular les diferències és el model matemàtic que s'afegeix a l'estudi de totes les províncies. S'adonen que és un procés molt llarg, tot i que no hauria de ser un càlcul complex, però incorporar totes les províncies, que són les dades que ells consideren en aquell moment, es torna un procés llarg i tediós.

Episodi clau ECT1 2

Característica clau: Gran Volum de Dades

A2 (P) 03:12

D: Tenemos que hacer el comparativo , tenemos que hacer de cada de esto? O sea ... Ávila, Alicante y todo eso?

MA (Professora): Tenéis que tomar decisiones. Estáis en Economía sois unos economistas de pro.

D: Es que hay mucha cosa.

(I) 03:26 A: Son ciudades de, lo que hay aquí ¿Son ciudades? o ¿qué son estos?

D: Esto son Barcelona, Burgos tipo así.

A: Ciudades, vale, pues.

(P) 03:33 A: Pues tenemos que tenemos... todas las ciudades que hay dentro de una provincia y calcularlas después entre provincias compararlas y de ahí sacar las más las más comoooo las más iguales y ahí compararlas con dentro del país.

D: Todo, todo, todo, todo.

Durant aquest tercer àudio el grup Team 1 fa consultes a la professora. La consigna és que no es podia ajudar a l'alumnat, es donaven pistes genèriques, com és el cas, que es mostra en l'exemple: han d'utilitzar tot el que saben. Això sí, en aquest cas, se situa en el context de l'aula, ja que no volíem que l'alumnat se sentís pressionat sabent que el projecte era un estudi dels models matemàtics elaborats en una activitat amb context econòmic. Aquí és molt distintiu el fet que per ells, tota la població és la taula donada en l'article, no s'adonen de l'existència del full de càlcul adjunt. I, molt important, no parlen de comparar impostos, parlen de comparar ciutats, que les ciutats siguin iguals.

Episodi clau ECT1 3

Característica clau: Gran Volum de Dades

A3 (03:59) (I)

D: Y ya está mira.

AR: ¿Arriba?

D: Aquí vete a la foto aquí salen todas ya.

AR: ¡Ah! Vale, vale, vale.

AR: ¡Ostras! Es que el otro.

04:12 (P)

A: No es de cada provincia tipo de cada ciudad comparar dentro de las provincias tipo de, ehm, la provincia de Tarragona ¿Tarragona es una provincia?

D: Sí, sí, Tarragona está aquí.

A: Vale pues, ehm, calcularlas las provincias de tarragona, Lleida, Girona y Barcelona y calcularlas, las que, como, las diferencias que haya tipo cómo te lo digo...el que menos diferencias haya es como si entre ellas.

D: Es el más rentable ¿no?

A: Claro sí entre ellas solo a se llevan 2 € o un 2% vale entonces lo calculas lo ponemos Cataluña un 2% después Madrid.

D: En coches y motocicletas ¿no? En las dos cosas.

A: Claro, diferencia, después Madrid tal, pues no sé qué tal, pues no sé qué tal

y si es todo Europa, ¿Europa? ¿Mundo?

D: Esto es España.

A: Pues si es España lo hacemos por Comunidades Autónomas.

D: Sí, por comunidades.

A: Pues ya está.

AR: Pues ya está.

D: Ya está.

A: A ver vamos a apuntarlo, calculamos provincias, Cataluña ¿Qué es? Una Comunidad Autónoma.

D-AR: Sí.

A: A mí la geografía se me da fatal provincia.

AR: Comunidad Valenciana.

D: A vera, pues venga comienza por Cataluña.

A: No espera, no calculamos, calculamos provincias después dentro provincias, comparamos.

AR: Cada uno, Barcelona.

A: Para sacar el resultado.

AR: Girona.

A: Calla, es que no calla, me estresa, el resultado ...

AR: Lleida.

A: Callaaaa para sacar resultado.

D: Son 4 o 5 en Cataluña.

A: De la comunidad [Simultani]

AR: 5 creo.

A: Autónoma.

D-AR: Vale.[Simultani]

AR:Lleida, Tarragona, Barcelona Tarragona 4 falta una no creo que son 4 Tarragona Lérida Girona Barcelona 4 son 4 son 4 Cataluña.

D: Calculamos.

A: Espera, després ho comparem amb les altres comunitats.

AR: Comunidad Valenciana ahora las apuntamos.

A: qué más? llevamos que tiene que quedar bonito.

D: Hacemos tabla.

A: Barcelona.

D: A ver AR ves diciéndome los nombres Barcelona, Lleida, Tarragona, Girona, venga va dime Barcelona liga Girona Barcelona en la de Cataluña está Barcelona Tarragona Lleida Girona vale Barcelona este papelito luego me lo

subís también eh o si no me lo das y lo escaneo yo ¿eh?

6:53 (I)

D: En Barcelona ponen coches en coches claro es que hay diferentes tipos en coches.

AR: hay diferentes cilindradas.

D: Las motos.

A: No es de contaminación ¿Eso no será?

D: No, no, no, esto es lo que tienes que pagar.

AR: Ya, ya, pero en turismos o sea de coches.

A: Barcelona. D: Turismos si son coches tal y estos son de las motos por eso.

D: Estos son de...

A: Pero CVF ¿Qué es?

D: Esto es...

A: ¿Son los años?

D: No, no, no, no.

A: Esos son los años que tiene el coche.

D: No, no, que no.

AR-D: Que no, que no, que no.

D: Que sale aquí.

A: Sinó lo buscas por Google.

D: Que no que sale aquí eran caballos por... tú ves.

AR: Lo de las motos es la potencia será las cilindradas.

D: Sí AR: y la de los turismos...

D-A: Son caballos fiscales.

D: Sí, caballos fiscales, eso caballos fiscales.

AR: Eso ¿Qué es?

A: Y ¿Qué es eso?

D: Caballos fiscales, pero que te sale ahí lo que es caballos fiscales.

A: A ver pero vamos a ver.

D: Es la carga impositiva de se aplica un vehículo o sea es la potencia del motor.

AR: Es lo que se le resta.

A: La potencia del motor, lo que sea no va a entender de coches.

AR: ¿Es lo que se le resta la potencia al motor no?

D: Sí.

08:11 (P)

A: Entonces ¿Cómo lo queréis? Vale podemos entonces hacer como vamos a

hacer de menos de 8 calcular las por aquí después nanananana.

D: No en Cataluña ponemos Barcelona y los cinco númerosy ya está.

A: Y¿Cómo calculas el final que tiene que ser un número no 80?

D: Pues pones del primero al último o sea este es más barato este es el más caro eso está clarísimo, espérate que he subido sin querer.

En un període breu de temps, d'uns 4 minuts aproximadament, passen per 6 models que es van refinant, modificant i completant. Canvien de voler estudiar províncies, ciutats, comunitats... parlen de com quantificar la diferència, apareix el màxim i el mínim com el més econòmic i el més car (província, ciutat...). S'adonen que els cavalls fiscals són un element més a tenir en compte. Acorden que, encara que estan treballant en un context econòmic, han de resumir la informació en un únic número per poder comparar.

Episodi clau ECT1 4

Característica clau: Enunciat Obert (Context)

A3 09:45 (A)

D: Después a ver Islas Baleares.

A: Una cosa una cosa están estás flipando mucho de aquí ¿Qué queréis hacer?

D: Tú espérate lo que sale en el enunciado.

A: Pero, pero, pero ¿Cómo?

A: A ver Cataluña.

D: Vale yo creo que se deduce que es Cataluña, esto...

A: Entre esto no hay de diferencia.

D: Diferencia hay 7 € sabes tampoco ...

A: A qué 224€ amigo.

D: Y aquí 217,7 € de diferencia. Aquí es lo que te piden o sea el máximo precio es 7 € de diferencia.

10:36 (I)

A: ¡Ah! ¿Te pide el máximo?

D: ¿Cuáles son las más justas sabes?

A: Te pide.

D: Que digamos cuáles son las más justas. Por ejemplo en Melilla por ejemplo son 60.

A: 7 € con 28.

AR: ¡Buah!

D: En Melilla son 60 € solo, sabes? 56 €.

L'equip Team 1 havia decidit el model que havia de fer en el minut 8:19. Es tractava de calcular les diferències entre el màxim i el mínim (el rang) en una mostra determinada. La clau d'aquest model podria estar en els factors: grans quantitats de dades aportades a l'activitat i la paraula "Justícia" enunciativa de manera ambigua. En el fragment anterior podem observar com han de tornar a l'enunciat per justificar què és just per a ells. Respecte a la quantitat de dades, durant el procés han hagut d'anar acotant la mostra per poder treballar-hi.

Episodi clau ECT1 5

Característica clau: Enunciat Obert (Context)

Finalment, donat que el grup observa que el seu model és més ràpid d'aplicar i prou eficient per treure conclusions, amplia la mostra a l'impost de motocicletes.

A6 01:50 (A)

D: Está todo aquí está todo está todo y al...

01:56 (P)

D: Vale y ahora ¿Qué hacemos?

D-AR: Las motos.

A: No, no, no, pues...

D: Vale, no hacemos las motos.

A: No, no, da tiempo.

AR: Venga vamos ha hacer las motos para acabar el primer día.

D: Madre llevamos 2 minutos ya, pues hacemos sólo la a venga pues, hacemos solo los coches, haz los coches.

A: Ya hemos acabado los coches.

D: ¿No tienes que poner diferencia de cada uno? Eso eso estoy vas a poner ...

A: Dame un subrayador.

D: Que no tengo subrayador que no me pellizques el brazo AR: tengo este te sirve amarillo verde venga Catalunya, apunta.

Per a saber si continuen amb els impostos de les motocicletes o el seu model ja el vàlid per resoldre la tasca, tornen a l'enunciat on es troben amb el fet es demana la redacció d'un informe. Llavors veuen que falten càlculs i resultats. Un membre del grup té molt

clar com acabar (D) i un altre insisteix a considerar les motocicletes, ja que també és un vehicle (AR). Un enunciat on els protagonistes són els lectors que interpreten, perquè és prou ambigu. A més demana en un apartat la verificació d'un fet que apareix a la notícia, o bé, l'aclariment del concepte. I en un segon apartat, en forma d'informe, una reflexió sobre el primer apartat, així els estudiants poden realment validar el seu procés

A7 (I) 02:37

AR: Ens demanar un informe per avaluar si l'estat a intervenir ha de recollir diferents propostes per donar solucions .

02:44 (A)

A: Tú chico ¿lo puedes calcular? No sé calcular.

02:45 (I)

D: No, lo calculas tú que yo estoy haciendo el B, con el A.

A: Tonto.

D-AR: [Leen para sus adentros el b. murmurando]

A: Que yo no puedo calcularlo yo no sé cómo se calcula, no sé cómo se tiene que calcular.

AR: Si l'Estat ha d'intervenir.

A: Una calculadora.

D: El B. tiene que ver con el a creo, tiene que ver con el a. AR: Ha d'incloure un recull de propostes...

D: ¡Uuuuh! Je, je.

AR: A ver está...

D: Pasamos del B.

AR: Espera está que era a ver, vale.

03:31 (A)

A: (D) Intenta calcular estos tres ¿Cómo quieres calcular esto?

D: Pones el mínimo de este y el máximo de este, este.

A: Pero esto si ya lo tengo hecho pero esto qué o ...¿Cómo que 7,28?

A: Sí ...

D: Pues haz lo mismo aquí elige el 4 o el 21 al más pequeño el más grande.

A: No lo entiendo (después de un rato de estar en silencio).

D: J. el número más pequeño de aquí con el más de las restas, restas este menos este no es complicado.

04:00 (I)

D: ¡Uuuuh!

AR: Vale. [(AR) Llegeix l'enunciat en veu baixa]
D: Vale pues es lo mismo la b que la a. Más o menos sí.
AR: Pues ya está.
D: Informe es esto.
04:17 (P)
AR: Tú, vamos a empezar lo de las motos que llevamos 4 minutos.
D: No, no, no, que son vehículos no motos.
AR: Ah! es en general, no las motocicletas.
D: Pero aquí pone vehicles sólo ¿eh?
AR: Vehículos, está dentro ...
D: Dame un papel (A) porfa.
AR: Una moto es un vehículo ¿eh?
D: Vale.
AR: ¿Me explico?

Episodi clau ECT1 6

Característica clau: Enunciat Obert (Context)

A7 (00:18) (A)
A: ¿Qué tengo que hacer?
D: Tú tenías que hacer la diferencia.
A: Ya he hecho la diferencia.
D: Pues entonces tenemos que acabar esto.
A: Pero ¿cómo quieres que haga la diferencia de esto? ¿Cómo hacer la diferencia de esto?
D: Ya está la tienes ahí.
A: Pues ya está ya lo tengo hecho ¿Qué hago?
D: ¿En cuál nos quedamos?
AR: En Madrid, Madrid, Madrid.
D: Madrid empieza el 27.
AR: A ver espérate estos de las motos.
D: 15, 21.
A: ¿Tenemos que coger el que menos diferencia tenga no?
D: ¿Uhm? 15, 17.
A: Tú ¿Se tiene que coger el que menos diferencia tenga?
D: Espérate Aina, 30-32.

Dins del grup, D tenia molt clar el model a seguir però la interacció amb el grup és essencial. Les preguntes d'A i les intervencions d'AR posen a prova el model. Aquestes preguntes provenen d'un enunciat obert a múltiples opcions de resposta i a interpretacions diverses de la tasca a realitzar.

A7 (07:53)(A)

A: Ceuta, solo está Ceuta.

D:4 40 y 60,60, Melilla.

A: Melilla, solo está Melilla.

D:Hombre hasta ahí llevo no hay más 2,21 3,29.

08:09 (I)

A: Primera, Primera pregunta ¿Qué pone la primera pregunta?¿Cuál es?

08:25 (A)

AR: ¿Dónde estamos?

D: Extremadura

D:¿Cuántas hay?¿Cuáles hay?Pero ¿dónde estás? Aquí. Cáceres y Badajoz, vale. Cáceres 850.

08:35 (I)

A:Tíos ho estem fent al revés.Posa: Quines províncies. Quines províncies són més justes. Y hemos calculado las que menos justa es...

08:42(A)

D: Badajoz, Cáceres y Badajoz 785, 850, 9584,entonces está 64 y 95-99.

A: ¿Creo que es Cataluña la más justa eh?

D: Extremadura.

A: Con Aragón con un 9,94.

Com hem explicat al llarg del treball distingir entre una fase del cicle de modelització i un altre és complexa. Hi ha diversos factors que poden influir en la classificació. Aquí observem que el treball en paral·lel i el propi model difuminen la frontera entre l'anàlisi (càlculs) i la validació (interpretació dels resultats). A part d'això tornem a observar com canvia el model tornant a l'enunciat.

El grup Team 2 no considera el full de càlcul, només treballa amb les dades de la taula que mostra l'article. Podríem pensar que no tindrien problemes a l'hora de resoldre la tasca, ja que la quantitat no és tan gran com la que ofereix el full de càlcul. Però, per les característiques del seu model, aquesta quantitat de dades els sembla massa quantitat. És important observar, en aquest grup és molt evident, com el context és inherent, quan fan les

comparatives, durant l'anàlisi, sí que anomenen nombres i xifres, però les tenen associades a l'impost i, per tant, a la província. Aquest grup té molt clar que cal resumir les dades per poder comparar, fet essencial de l'estadística i de la formalització dels paràmetres estadístics. Tornem a veure el paper fonamental de la paraula i el concepte de "diferència". "Diferència" en el llenguatge natural no és una operació matemàtica, però l'associem a una, la resta. Modelitzar la "diferència" natural és el que procura fer aquest grup amb el seu model.

6.3.6 Estudi dels episodis claus del Team 2 (Segona recollida)

Els quatre episodis claus identificats en el segon equip de la segona recollida es troben en les fases d'interpretació, planificació, anàlisi i conclusions. El model final que generaven utilitzaven el concepte de mostra i mitjana de les dades per determinar la solució a la tasca.

Episodi clau ECT2 1

Característica clau: Gran Volum de Dades

A2 (00:47) (P)

M: Anar mirant poc a poc l'EXCEL i anar agafant pues els preus.

00:59 (I)

P: Les més justes.

02:05 (P)

P: ...hi ha moltes coses aquí.

02:29 (I)

M: Clar.

P: Llavors, quines són més justes? pues depèn de, de, de ...

M: D'on siguis. Depèn del què condueixis depèn de ...

P: Però, com? O sigui, com pagues més o menys depèn de què?

M: Depèn d'on siguis i depèn dels cavalls que tingui, saps?

04:04 (P)

P: Per això, perquè si hi han un montón seria agafar de cada municipi de cada província un montón de províncies.

M: No seria més de Comunitat Autònoma?

M: ... Albacete Alicante Almería ...serien [Paula parla però no s'entén] per

províncies, sí, sí, sí.

P: Barcelona.

M: Llavors jo que et faria és fer una mitjana digue'm-ne sats per exemple de Cuenca vale.

M: N'hi ha masses, llavors, el que faria seria una mitjana de cada província.

El segon equip, Team 2, en el segon àudio comença a elaborar els models després d'una lectura detinguda de l'enunciat de la tasca. En diversos moments, entrelaçats entre la creació o modificació dels models utilitzats fan palès com necessiten resumir la gran quantitat de dades. A més, identifiquen diverses variables a tenir en compte en el seu treball. Durant uns cinc minuts identifiquem 5 models senzills i acaba el segon enregistrament amb la certesa que necessiten resumir les dades en una mitjana.

Episodi clau ECT2 2

Característica clau: Gran Volum de Dades

A3 00:59 (P)

M: es el que no em quadra el que no em quadra és que s'hagi de fer tot.

05:01 (A)

P: Ja però si no ho fem així.

M: Ja.

P: Albacete.

M: En plan, però no li trobo sentit de què sí hauríem de fer una mitjana però però és que són són, t'ho dic, són 7.000.

06:03 (P)

P: Però ja, no fa falta només ho fem de las tres columnes del cotxe i llavors ja tindrem una idea de la que es justa.

Encara que el grup Team 2 coneix (no domina) les funcions d'un full de càlcul i sap que pot simplificar el procés de càlcul el seu ús, durant l'àudio 3 continua sorgint la problemàtica de la quantitat de dades.

Episodi clau ECT2 3

Característica clau: Enunciat Obert (Context)

A4 04:00 (A)

M: Insertar y tabla dinámica s'ha de ficar, per algun lloc 04:05 P: Tabla dinámica M: Sí P: y pone nueva hoja M: Y seleccione los datos.

Intenten utilitzar les eines de les que disposa el full de càlcul. No obstant, segueixen plantejant-se la idoneïtat d'utilitzar tantes dades com volien estudiar. Com que l'enunciat és obert, i troben un patró en les dades (augmenta l'import a pagar en relació a la potència del motor), decideixen treballar a partir de triar una mostra.

07:20 (P)

P: Sí

M: No, però el que ha d'estar és tot, o sigui, no sé si m'explico, saps? O només ho hem de fer de dels turismes de menys de 8 cavalls?

P: Ah! Que intentem afegir una altra columna?

M: O així, en teoria podríem veure clar no hauríem de fer un de cadascun, no? Saps que el que vull dir? Un de per exemple de turismes, és que clar, tampoc demana quins s'ha de fer, saps?

P: A ver, què ens demanen aquí? ens demanen aquí.

07:40 (I)

P: Ens demanen ...[Llegeixen denunciat per ells mateixos]

M:Mmmmmmmmm.

P:Mmmmm.

M: Diu ...

P: L'article diu que la mateixa comunitat i fins i tot la mateixa província les diferències són evidents quines províncies són més justes i per tant, el fet de matricular en una població o una altra no suposa un greuge comparatiu pels propietaris dels vehicles.

P: Eh, pues, jo, ehm.

M: És que clar no indica quins vehicles.

08:09(P)

P: Per això jo crec que si féssim d'un o sigui.

M: Clar.

P: Seria suficient.

Episodi clau ECT2 4**Característica clau:** Enunciat Obert (Context)

A9 12:06 (I) (C)

P: Però espera, acabem això i ja està és que sinó vale.

M: És que ja ens demana un informe, no sé a què és refereix si això a l'informe que et que hem estat fent.

P: Vale, espera eeh (estornuda) Perdó [murmura] espai dos punts ... [murmuren].

P: Vale, i no amb altres coses com la distància.

M: Com la distància.

P: Espera't, eh!

12:57 (C)

P: Eeh [murmura el que havien redactat] Vale, no depèn del o sigui no dependent...

M: De la distància.

P: Del que vulgui l'ajuntament d'aquest poble o... és que no sé lo què és ...

M: Mmm.

P: Lo que va després de província, ciutat.

M: Eh, sí, ciutat.

P: no Dependent del que vulgui l'Ajuntament d'aquesta ciutat. Vale, següent.

13:40(I)

P:[Llegeix l'apartat b.] Hisenda us demana un informe per avaluar aquesta situar-hi decidit espera per decidir si l'estat a intervenir incloure un recull de propostes.

13:43 (C)

P: Vale, ehm, vale, pues lo que deia o sigui jo crec que sí jo dic el que jo crec jo crec que sí que és gent de hauria de demanar un informe per valor aquesta situació per posar preus més o menys igualitaris a tota la província.

Com ja hem vist en anteriors grups, quan es discuteix la divisió de la feina dins dels membres de l'equip o mentre es redacta la resposta (la redacta un membre i la resta o ajuda o va fent altres tasques de l'activitat) hi ha moments de confusió. A l'inici de l'exemple transcrit P està acabant de redactar la resposta de l'apartat a i M s'avança i llegeix l'apartat b. L'activitat, oberta i amb la necessitat de validar la resposta crea aquests moments de treball en paral·lel que propicien el diàleg i la formulació de preguntes

dins dels membres de l'equip de treball.

De nou ens trobem amb la necessitat de resumir les dades per poder comparar distribucions. Encara que tenen un cert domini de les eines informàtiques prefereixen escollir una mostra, tant per estalvi de feina, com per millorar el procés i la interpretació dels resultats. Com ja hem apuntat, les dades resultants dels càlculs també s'han d'analitzar i serviran per treure conclusions. Finalment observen un patró i això permet descartar variables.

6.3.7 Estudi dels episodis clau del Team 3 (Segona recollida)

Aquest grup inicialment utilitzava la cerca directa de Google de la resposta a la tasca. A mesura que avançava el procés va trobar un model basat en el mínim, però sempre sustentat per la cerca d'informació a Google. Tenim identificats sis episodis clau en les fases: interpretació, planificació i conclusions. Volem destacar com a la producció queda reflectida una característica clau dels episodis: el concepte de justícia de caràcter ambigu. A més, aquest fragment de la producció il·lustra el fet que afegir un apartat com el b, on han de fer un informe (enunciat obert) permet la reflexió i la discussió entre els membres del grup.

Episodi clau ECT3 1

Característica clau: Enunciat Obert (Context)

A1 (I) 5:14

A: ¿Qué es eso?

V: No entendido esta parte por eso la he leído otra vez.

A: Hay que buscar qué es eso ... poder autoridad que tienen sobre una persona o cosa.

V: ¡Ah! Vale tía, que básicamente, solamente, en plan, no se quejan de que haya tanto cambio de eso. pero sí se quejan de quien no lo paga, creo no sé.

V: ¿Tú entiendes esto? Vale, lo que puede suscitar en muchos contribuyentes la suposición Que muchos municipios se utilice de manera abusiva con el fin de callar desequilibrios motivados por una mala gestión económica.

L'enunciat real i obert, ja que tenim l'article publicat real i el que demana la tasca, implica la necessitat d'una lectura profunda per donar-li significat. És imprescindible que entre els membres del grup es facin aclariments, necessitant en alguns moments cerques externes.

En el paràgraf inferior observem la necessitat d'aclarir vocabulari i conceptes que apareixen de manera natural en l'article.

A2 04:11 (I)

A: Cada ayuntamiento elige el impuesto ¿sabes? Dentro de la misma comunidad y la misma provincia [tornen a llegir] ¿qué es Hisenda?

V: ¿Dónde lo pone? Era, era.

A: Hacienda ¿no?

Episodi clau ECT3 2

Característica clau: Enunciat Obert (Justícia)

En el moment que creen el primer model i, les modificacions que es van produint, són causa de tenir davant un enunciat que requereix una interpretació. En particular s'observa la necessitat de definir el concepte de justícia que faran servir.

A3 00:00 (I)

A: Hemos de buscar las provincias las más justa.

00:06 (P)

V: pues vamos a buscar por Google.

00:07 (I)

A: No tía, lo que nos ha puesto aquí.

V: ¿Nos ha puesto?

A: Todas estas cosas, será.

V: Tú aquí ¿lo entiendes? porque yo no.

A: No pero pues se lo intentamos entender ¿yo qué sé?. A ver, pon esto aquí.

V: Ja, ja, ja.

A: A ver, el que tenga el número más bajo digo yo será ¿no? V: No, a ver ...[Murmuren l'enunciat]

V: A ver, primero que yo no me acuerdo qué es comunidad y provincia.

A: Yo tampoco.

C: Una comunidad tía, sí.

A: Comunidad Valenciana.

C: Claro.

A: Y provinciaaaa, espérate, espérate.

C: Pero igual aquí lo pone qué es lo más justo.

V: ¿Lo más justo? ya tía es lo que estábamos mirando pero como sabemos cuál es la más justa en plan ¿tiene que ser el número más pequeño?

01:39 (I)

A: qué provincias son más justas (lee enunciado y por tanto...) ¿qué es un greuge? [Llegeix fluix, per ella mateixa]

V: Vale, vamos a ver, si queréis miramos por Google un poco por las desto en plan vamos a preguntar ... provincias ... más ...justas.

V: ¿Se escribe así justas, no?

C: Sí.

A: Pero ¿qué preguntas? ¿Justas? ¿Preguntas justas?

05:36 (I)

A: Pero en plan justas ¿de qué? has de poner a qué te refieres.

V: Lo del artículo ¿no? Provincias más justas en matrícula ...hay ... vale ... a ver... matrículas de automóviles no, no es esto ... provincias... ¿Pero qué es de lo qué se quejan?

Es mostren diversos fragments com en els tres primers àudios on interpreten l'enunciat. Sovint la discussió gira al voltant de la paraula justícia.

Episodi clau ECT3 3

Característica clau: Enunciat Obert (Justícia)

A4 00:06 (I)

A: Buscamos la otra vez.

V: Sí, lo tengo capturas: a l'article diuen que... [Llegeix l'enunciat] ... comunitat fins i tot la mateixa província les diferències són evidents Quines províncies són més justes i per tant el fet de matricular en un municipi d'un altre no suposa un greuge comparatiu pels propietaris dels vehicles.

00:21 (C)

V: pues son aquí, las tenemos aquí. Tenemos algunas provincias nos faltan.

00:25 (P)

A: creo buscamos lo de la vanguardia que era igual.

00:29 (C)

V: ¿Dónde está? A: Eso fue la semana pasada.

V: ¡Ah! sí, mira sí, ehm, Ceuta y Melilla.

C: Es donde menos se paga.

V: Uhm.

C: Pero tía dicen tres ¿no? Ehm

00:51 (I)

[Llegeixen l'apartat A.]

00:54 (C)

V: ¡Ah! ¡No! ¡Quines!

V: Ceuta y Melilla

C: Ceuta y Melilla. [Ho escriuen]

C: ¿No hay ninguna más?

A: Es on més.

A: ¿Más o menys era?

V: A vera, menys.

V: Menos se paga por este tributo.

No es demana una quantitat de províncies, de fet el que es demana és que es verifiqui, de manera implícita, la notícia. Cal identificar aquelles províncies que el grup consideri que són justes sota un criteri que han d'elaborar.

Episodi clau ECT3 4

Característica clau: Enunciat Obert (Context)

A4 4:52 (I)

A: Informe para evaluar esta situación y si el Estado tiene que intervenir? No lo entiendo.

C: ¿Un informe para evaluar esta situación? Tenemos que poner propuestas.

A: tenemos que decidir si el Estado tendría que intervenir en esto o no, y tiene que incluir.

V: Pero ¿Cómo lo evaluamos?

A: No sé tiene que incluir, ehm, un “deso” de propuestas que valoren diferentes soluciones, no sé.

V: Ahm.

A: ¿Cómo hacemos el informe este?

05:35(P)

C: No tengo ni idea.

V: Vamos a buscar uno anterior que ya hayan hecho y de ahí sacamos, en plan.

De nou en diferents fases, com les d'interpretació i planificació, observem la discussió sobre el què realment demana l'activitat. No són preguntes tancades, ni respostes úniques el que es proposa en aquesta activitat, per això no és una pregunta directa, l'apartat b. En elaborar un informe amb unes justificacions, s'obliga l'alumnat a fer una reflexió sobre el context i els resultats. A més, aquest grup no sap què és en realitat un informe, així que és un element més que fa avançar l'activitat.

Episodi clau ECT3 5

Característica clau: Gran Volum de Dades

A5 01:28 (I)

A: Vale es que el a nosotros hemos buscado y nos ha salido esto en una web pero la gente está haciendo cálculos.

MA: Es que yo te he dado datos para que lo saques por tú misma.

A: Pero es que son muchísimos datos.

Hi ha un moment en el que el grup dubta, ja que compara amb el que fan els altres grups. La professora insta a què, amb les dades que tenen, treguin les seves pròpies conclusions, que és una activitat que fomenta l'esperit crític, però no es veuen capaces de fer-ho perquè no saben gestionar grans quantitats de dades. Això sí, cerquen en diverses webs, procuren no quedar-se només amb una font d'informació. De fet, consulten el dossier, però no l'entenen i no prenen cap decisió al respecte.

Episodi clau ECT3 6

Característica clau: Enunciat Obert (Context)

A6 02:40 (P)

A: Es que a ver tiene sentido que se tengan que hacer cálculos porque por algo nos ha puesto el EXCEL.

A: Pero yo lo interpreto como decir yo creo, osea, mi opinión.

Tenen un moment de dubte en el que discuteixen si fer càlculs, motivats pel fet que s'adjunta a l'enunciat un full de càlcul. Però descarten aquesta opció. La tasca és prou oberta perquè l'alumnat pugui escollir al respecte. Aquest grup va descartar el full de càlcul, altres el van utilitzar, alguns ni es van adonar que estava. En cap moment es va indicar

que era obligatori utilitzar-lo, com tampoc estava prohibida la cerca addicional d'informació.

Episodi clau ECT3 7

Característica clau: Enunciat Obert (Justícia)

Per últim destacar a la producció escrita aquest fragment:

Ceuta i Melilla és on menys es paga per aquest tribut. I a Zamora, Cáceres , València i Jaén també es paga poc.

Ho hem buscat en La Vanguardia i ho hem comprovat mirant la taula. Nosaltres pensem que l'estat hauria d' intervenir perquè creiem que no és just que unes províncies hagin de pagar un impost de circulació més alt que altres.

Definitivament el grup va associar després de tot el procés al valor mínim. La resposta a l'apartat A no menciona justícia. I a l'apartat B, associen injustícia, no ser just, a ser diferent el cost de l'import.

Tenim un altre grup que en diverses fases del procés indaguen sobre el seu propi concepte de justícia i procuren matematitzar-lo. L'enunciat obert i, sobretot, el fet d'afegir un segon apartat on cal una reflexió per validar el model, fan que elaborin una resposta més coherent amb el procés que han seguit.

6.3.8 Estudi dels episodis clau del Team 4 (Segona recollida)

Aquest grup construeix un model matemàtic on trobem elements com la mostra, la mitjana i el mínim. La "diferència" qualitativa la tradueixen com la diferència formal matemàtica, la resta. Trobem vuit episodis clau en la interpretació, la planificació, l'anàlisi i les conclusions.

Episodi clau ECT4 1

Característica clau: Enunciat Obert (Context) i Gran Volum de Dades

A1 01:39 (I)

M: **Entonces la gente lo que hace es "apadronar" el coche en una ciudad que sea más bajo para así cobrar menos.**

A: Sí.

N: Claro.

Durant el primer àudio reflexionen i tradueixen l'enunciat al seu propi vocabulari.

02:26 (I)

N: Si cogemos un mismo vehículo sin aplicar ningún tipo de ex- ex - exención o bonificación también varían en función del Ayuntamiento resultados son cuanto menos sorprendentes.

N : Y aquí tenemos una tabla, ostras cuánto número.

M: A ver turismos motocicletas.

N: Turismos motocicletas.

A: Motos y esos son coches.

N: De menos de 8 años supongo provincia esto turismos TVC.

M: Barcelona de menos de 8.

N: Estos son los km 125 de 125 a 350 creo.

N: o no no sé a ver no creo.

El grup, Team 4, continua llegint i es troba amb la taula proporcionada per l'article. Es detenen a analitzar-la i, procuren comprovar si les dades que donen en l'article coincideixen. Per a ells, aquesta taula ofereix moltes dades.

06:11 (I)

N: O sea nos pide qué haríamos nosotros.

M: O sea nos pide dos cosas que cuáles creemos que son las provincias más justas N: Y las más injustas.

M: Y, por lo tanto hacer una matrícula, en una en una población u otra no supone un agravio comparativo para los propietarios de los vehículos.

M: O sea, cuáles sean las provincias más justas y luego nos pide un informe para evaluar esta situación y para decir si el Estado tiene que intervenir.

N: Vale y encima nos pone un ...

M: Teniu un full de càlcul amb dades reals dels impostos de circulació.

N: Este, pero creo que es la misma tabla.

M: No se carga.

N: ¿Ahora no? ahora pero es lo mismo creo ah no población ah mira sale todo.

M: Ayuntamiento o sea todo esto es de Albacete y nos sale aquí todas las ciudades de Albacete.

N: ¿Todo es de Albacete?

A: Todo.

Han trobat el full de càlcul amb totes les dades. Altres grups posen èmfasi en el fet de la gran quantitat de dades, però ells, primer les fan seves, cerquen, per descomptat, la població on viuen.

08:33 (I)

N bueno básicamente son todas las ciudades.

A: Hay 26.

M: Mare meva.

N: Pero ¡"Fuala"! ¡Si hay un montón!

M: Melilla.

N: Melilla, Melilla ¿Melilla realmente es la más barata?

M: No sé hay que mirarlo.

N: Porque quizás están en orden ¿eh?

M: No.

N: No.

Un cop analitzada la seva població i la informació que aporta el full de càlcul (recordem que no només estaven els impostos, també hi havia altres indicadors), volen comprovar si realment una de les informacions de l'article coincideix amb les noves dades oferides.

Episodi clau ECT4 2

Característica clau: Enunciat Obert (Justícia)

En el segon enregistrament poden observar com la gran quantitat de dades fa necessari resumir-les per poder treure conclusions. I, encara que no són gaire hàbils en la utilització del full de càlcul, a poc a poc, van utilitzant estratègies per poder elaborar els càlculs.

A2 01:57 (I)

A: Yo creo que es al año N: no pone cuánto se paga.

M: Este impuesto es lo que los municipios recaudan.

N: Búscalo en GOOGLE: cada cuánto se pagan el impuesto de Vehículos de Tracción Mecánica.

M: Impuestos.

N: De Vehículos de Tracción Mecánica.

M: De vehículos de Tracción Mecánica.

N: Aquí, na, na, na, pero pon cada cuánto se paga.

M: A ver si sale ya.

M-N: [Simultàniament] Cada año.

N: Ves.

A: Sí.

N: Es una vez al año.

M: Vale.

A: Y eso es 2018.

M: Hay, había que mirar cuáles eran la más justas.

02:37(P)

M: Yo lo que haría sería ehm...

N: Ya pero ¿En qué nos basamos?

M: En esto.

N: ¡Ah! ¡Vale!

M: Entonces, ehm, si hacemos una media de en plan por provincias.

03:20 (P)

N: Pero a ver cada cuánto sale Albacete aprox.

A: Es que hay muchos ¿eh?.

M: Es que hay un montón.

A: Un montón.

M: Pero ¿Cómo te basas sinó? .

N: Vale entonces y si por ejemplo cogemos todos los de Albacete de menos de 8 caballos lo sumamos todos hacemos la media y el que sea me ha parecido es el más justo.

A: ¡Ah! También vale.

M: Vale.

N: Así con todos, con todos.

A: ¿Cuento cuántos hay en Albacete?

04:27 (P)

M: Bueno, vamos a empezar a calcular. Yo creo que lo que haría sería calcular cada uno en plan. A: ¿Todos los sitios?

M: Tipo uno coge el de ocho el otro coges el de tal y el otro coge el de tal.

M: [N ha dit que no té iPad] pero te lo pongo yo y tienes calculadora ¿no?

N: Sí.

M: Coge la calculadora.

N: Pero yo soy más de apuntar.

M: Vale pero la calculadora es que sino no acabamos.

M: Vale a ver pero primero pon el ... a ver podemos Albacete.

N: ¡Huala! pero son un montón.

M: Albacete pongo aquí el de 8 caballos bueno.

N: Menos.

M: Lo ponía así, ehm, yo hago el de 8 a 11,9 caballos.

A: ¿Pero de cada sitio hemos de hacer todo esto?

M: Sí.

N: Yo si queréis hago este que es el que veo mejor.

M: Vale y tú de momento haces el de 20, luego ya lo ordenaré ¿vale?

Episodi clau ECT4 3

Característica clau: Enunciat Obert (Justícia)

A2 (A) 05:46

M: Me voy a liar.

A: No acabaremos nunca

N: Sólo llevo tres y ya me estoy agobiando ¡No!

El grup, Team 4, passa de fer els càlculs a mà, a utilitzar un full de càlcul. És cert que no tenen domini de l'eina, però s'adonen que tal com ho fan ara, el gran volum de dades no els permetrà acabar la tasca.

A3 00:29 (A)

A: Que con alguna función de estas de Excel.

M: Por eso,

A: Que estamos ahí sumando número por número

02:28 (A)

N: ¿Y la gente se aclara con estas cosas?

A-M: [Simultàniament] Vale.

M: Entonces ... pero claro aquí es promedio en plan bueno ponemos total aquí.

A: ¡Uhm! Ahí el total.

N: Necesito...

M: Y ahora aquí hacíamos la media ¿no? que se hace así, creo.

N: ¿No la has hecho todavía?

M: Así insertar función PROMEDIO.

03:21 (P)

M: Ahora hay que hacerlo con todos los sitios.

M: Con todos los sitios y coches.

N: Y coches.

Així com el Team 2 va descartar fer-ho de tot perquè va trobar un patró: a mida que augmenta la potència, augmenta el cost. Aquest grup no ho pren la mateixa decisió. Per tant, continuen volent analitzar totes les dades.

06:06 (P)

N: Pero ¿Las más justas de cada uno o de todos?

M: De toda la gente.

A: De cada [M: o sea] “desto”.

N: De todo Albacete dependiendo de los caballos o de todo Albacete ¿en cada caballo? M: El promedio de...

N: Me refiero...

A: De cada caballo es que escoge la más justa N: Claro de cada caballo hay que escoger la más justa o hay que escoger una de todo Albacete.

M: Una de todo Albacete.

N: De todos los caballos? ¡No! Una de cada caballo.

Episodi clau ECT4 4

Característica clau: Gran Volum de Dades

A4 (A) 08:34

A: ¿Hemos de hacerlo con todas?

Durant tot un bloc de discussió estan fent càlculs, avançant en la tasca i reprenent els càlculs ja fets, ja que comenten errors, no saben bé com funciona el full de càlcul. Per això al final de la quarta sessió de treball torna a sortir el dubte de si s'ha de fer tot, o sigui, si s'han de considerar totes les dades proporcionades.

Episodi clau ECT4 5

Característica clau: Enunciat Obert (Justícia) i Gran Volum de Dades

La pregunta anterior va quedar sense resposta i continuen la següent sessió de treball dividint-se la feina. Uns membres del grup continuarien amb el càlcul. Recordem que

només han treballat amb les dades d'una província, per ara. I, altres membres del grup, cercarien quina població està a prop de la mitjana calculada.

A5 00:14 (P)

M: Mira la media de Albacete de los coches (N:sí) y mira cuál es la ciudad (N: vale) en plan de los números que hay puestos arriba.

N: Vale, claro, de... de los de menos 8 cv cuál es el que se acerca más.

M: A la media.

01:4 (A)

M: Vale, pero..

N: Justo, justo no hay es lo que más se acerca.

Episodi clau ECT4 6

Característica clau: Enunciat Obert (Justícia) i Gran Volum de Dades

En ambdós enregistraments van repetint-se petites intervencions:

A6 i A7 00:30 (A)

N: Voy haciendo lo de mirar el más justo ¿Vale?

Ja que continuen amb la implementació del seu pla, que es tracta de fer mitjanes i mirar cada població (manualment) si són a prop o no d'aquesta mitjana.

Episodi clau ECT4 7

Característica clau: Enunciat Obert (Justícia) i Gran Volum de Dades

A8 12:39 (I)

M: Quines províncies són més justes per tant matricular en una població o una altra no suposa un greuge comparatiu pels [A: llevamos] propietaris dels vehicles...

12:47 (A)

A: Bueno no pasa nada.

M: Podríamos....ehm, a ver Almería está A:Almería y ¿De estos hay que mirar uno?

Retornen de manera freqüent a l'enunciat per verificar l'estratègia que han escollit i saber si estan responnent correctament a allò que demana la tasca. La paraula Justícia, què és just, torna a aparèixer.

Episodi clau ECT4 8**Característica clau:** Enunciat Obert (Justícia) i Gran Volum de Dades

A9 00:35 (I)

N: A ver cómo sabemos cuál es la más justa, es que no sé.

00:37 (C)

M: Se ve en este o..Almería porque es es la la cosa esta sale igual.

N: ¿Cómo que sale igual? No entiendo lo que sale igual.

M: Pero sino ya lo envío yo en plan que lo envío mira.

M: A ver de las tres provincias que hemos hecho Albacete Almería y Alicante la más justa ha sido la provincia de Almería ya que...

M: O sea que ¿Qué estábamos mirando?

N: Los precios.

M: Ya pero de los [M intenta hablar però N no la deixa o no l'escolta] coches autobuses y camiones.

Malgrat haver decidit quin pla de resolució seguir, tornen a l'enunciat i tornen a dubtar del concepte de justícia que estan considerant. Com que l'aplicació del seu model és tediosa i lenta, opten per només treure conclusions de les tres províncies que han pogut analitzar. De nou, la gran quantitat de dades i la manca de coneixements informàtics posa fre a la resolució de la tasca, però, malgrat això, són capaços de donar una explicació i proposar solucions. També s'observa aquesta identificació del context, quan demanen què estan mirant i respon: els preus, no la columna o els nombres.

De nou en aquest grup podem trobar com una activitat basada en un fet real, amb dades reals i un enunciat que no determina una única solució, utilitzant un algorisme predissenyat, crea nocions matemàtiques complexes. Fixem-nos que han hagut de transformar el significat de "Justícia" de "Diferència" del món real al món matemàtic. El context no només apareix en els models, com el del Grup 3 de la primera recollida, sinó també és inherent en el mateix model, no separen les dades d'allò que representen aquestes dades.

6.3.9 Estudi dels episodis claus del Team 5 (Segona recollida)

En aquest grup hem localitzat fins a setze episodis distribuïts en les fases d'interpretació, planificació, anàlisi i conclusions. El seu model involucra totes les dades que ells coneixen, la mitjana i el rang.

Episodi clau ECT5 1

Característica clau: Enunciat Obert (Context)

Durant el primer enregistrament hem pogut observar com l'article, totalment real, ha fet que cerquessin informació i aclarissin conceptes. A més, com tenia un vocabulari precís, calia identificar algunes paraules.

A1(I) 04:41

E: ¡Ah! vale o sea que ¿pagan todos lo mismo no? O sea que da igual el coche que pagan lo mismo.

06:35 (I)

E: Entonces ¿qué quiere decir esto?

E:Turismos esto ¿Qué es? CVF eso , a ver.

09:11 (I)

E: estas diferencias [Segueix llegint] - Guadarrama la cuota...200 € el mismo coche domiciliado en el municipio de Los Molinos es decir casi a 5 km de distancia la diferencia ... de estás diferencias fiscales un ejemplo gráfico extrapolable ... reguladora de las Haciendas Locales E: O sea, solo se ... manifiestan para aquellos que no tienen que pagar impuestos.

S: Vale.

E: vale.

2:28 (I)

E: Eehm MA es una cosa para la actividad ¿Hemos de mirar la hoja de cálculo está o la tabla que hay en el documento?

MA: Eso lo tenéis que decidir vosotros.

E: ¡Ah! ¡Vale!

M: Vale.

E: Vale, vale.

MA: Vosotros decidís qué queréis.

E: Vale, vale, entonces ¿la otra la otra o esta?

E: Eehm MA. es una cosa para la actividad ¿Hemos de mirar la hoja de cálculo está o la tabla que hay en el documento?

MA: Eso lo tenéis que decidir vosotros.

E: ¡Ah! ¡Vale!

M: Vale.

E: Vale, vale.

MA: Vosotros decidís qué queréis.

E: Vale, vale, entonces ¿la otra la otra o esta?

M: No sé, a ver tira para arriba a ver qué es.

E: Pone población.

M: Pero aquí con muchas más cosas.

Els membres del grup estan indecisos. Tenen molta informació: l'article, el full de càlcul i dins del full de càlcul, moltes dades que poden, o no, utilitzar.

13:20 (I)

E: Pone quines prov... ¡Ah! ¡Vale! Cuáles son más justas y por tanto el hecho de matricular en una población o en otra no supone un grave comparativo para los...

M: en plan dentro de la provincia o sea aunque hay menos de diferencias entonces o sea ...

E: claro, pero hay que mirar, o sea que provincias de estas son más justas ¿todos estos son provincias?

Continuen dubtant durant tota la fase d'interpretació, i, com hem vist en altres grups, no és un cas aïllat. El gran volum de dades els bloqueja, l'enunciat, els bloqueja i l'article els bloqueja. S'enfronten a una situació prou real, on tenim una notícia i hem d'analitzar el seu contingut. I si cerquem dades, el full de càlcul seria el que trobaríem, ja que no l'hem arreglat, han estat les dades subministrades sense estalviar cap part de la informació.

Episodi clau ECT5 2**Característica clau:** Gran Volum de Dades

A1 (I) 14:15

E: Vale pero tienes que mirarte todas estas por ejemplo todas estas de Alicante todas a ver o sea que menos diferencia hay.

M: Eso sí pero no sólo es este número.

E: No, no.

M: Vale.

E: O sea, tú tienes que coger el Ayuntamiento o sea el Ayuntamiento y mirarlo por con este lo cuál ¿no hay tipo total? M: La otra tabla creo que la otra tabla creo que está como más resumida.

E: ¿Está el total?

El gran volum de dades implica, per a aquest grup la necessitat de resumir-la o bé escollir-ne unes dades en concret. Així observem que tenen la necessitat dels paràmetres estadístics i la de la mostra.

17:49 (I) E: ¿De todos tenemos que mirar!

[...] 18:07 (P) M: ¿Y si hacemos una media de estos y de estos?

Episodi clau ECT5 3**Característica clau:** Enunciat Obert (Justícia) i Gran Volum de Dades

El Team 5 torna a reprendre la feina i comencen a planificar la feina. Descarten la taula petita, però s'adonen que podria servir per resumir les dades del full de càlcul, per complementar la informació. Encara que la definició de justícia la tenen associada a la diferència, encara no saben com abordar el problema.

A2 00:06 (I)

E: Entonces teníamos que mirar cuál era la provincia más justa.

00:11 (P)

M: Sí.

E: Yyyy.

M: A partir de esta tabla y la otra dijimos que no no servía E: Claro está no servía porque... porque ya era de provincias directamente.

M: Pero igual también nos sirve para ver un poco porque igual hace alguna media en plan de toda la provincia o algo.

00:28 (I)

M: Es que en plan no sé.

E: Claro pero pero cómo defines tu qué es justa ¿no? por aquí ya te está diciendo que todo esto.

M: Ya sí porque no no se ve la diferencia vale.

Episodi clau ECT5 4

Característica clau: Gran Volum de Dades

A2 00:45 (I)

M: No porque no te dice la diferencia te hice la media no sabe si ha hecho 10 y 0 o mmm 5 y 4.

E: Vale, vale, vale, entonces...

02:07(P)

E: Y cuanto menos diferencia haya en todas será la más justa porque en una misma provincia así pues sabes.

M: Vale.

E: Entonces ahora habría que ponerse a calcular como locos.

M: Vale pero hay que saber si hay alguna una función aquí o algo porque yo creo que en plan tipo.

S: ¿En informática no había una fórmula?

...

03:39 (A)

E: A ver espera aquí ¿no? Función PROMEDIO.

M: Pero había de seleccionar primero.

...

07:51

M: ¿Alguno más tiene ordenador así vamos haciendo todas las medias más rapidito? es que sinó...

10:42 (A)

E: No va ni por la mitad aún.

11:00 (A)

M: Y si cogemos una muestra o algo tipo de ...

S: Una muestra [riendo]

M: Ostras [...] paramos.

S: e estás cansando.

11:11 (P)

E: No luego lo podríamos hacer es si eso es hacer una suma tipo de aquí hasta aquí y sumar o no sé.

E: Ya miraremos la manera.

M: Hacer una media de las medias.

Podem observar la problemàtica que implica donar un gran volum de dades. Comencen a plantejar-se altres vies, a utilitzar eines informàtiques i, el que és més important, resumir les dades per poder comparar-les. I, de manera excepcional, anomenen el concepte de mostra. Altres grups han decidit escollir menys dades, però aquí formalitzen el concepte. Observem també l'ús d'exemples en les seves explicacions per il·lustrar l'explicació i que es faci més entenedora.

Episodi clau ECT5 5

Característica clau: Gran Volum de Dades

A3 04:00 (P)

E: Ahora teníamos que ponernos a comparar todo ¿no? O ¿Cómo era?

M: Pero cuántos son son muchísimos E.

M: Pero espera ¿De qué?

S: ¿Pero no tenemos que hacerlos todos o no?

E: Mira la provincia en la provincia de Albacete hay 80.000.

M: A ver pero ¿Qué había que mirar? A ver que no me acuerdo.

05:19 (P)

M: Ya pero si seleccionas como todas las de una provincia.

E: ¡Mira todas las que hay de Albacete!

M: ¿No haya una función para en plan para ver para de diferencia o algo así?

06:00 (P) M: en plan como que te diga la diferencia entre el más pequeño y el más grande.

...

06:16 M: el rango o algo así.

Encara que l'alumnat ha estudiat estadística unidimensional, ha treballat representacions diverses de les dades i els paràmetres estadístics, el concepte de diferència el tenen associat

a l'operació. Així cerquen en el seu banc de recursos natural el paràmetre estadístic que resumeix les dades i els ofereix una diferència. Aquest paràmetre és el rang.

Episodi clau ECT5 6

Característica clau: Gran Volum de Dades

A3 (P) 07:31

M: Lo malo de si hacemos esto es que yo qué sé puede haber unos justo súper un número súper grande y uno súper pequeño y luego luego restos entre el medio.

E: Ya pero da igual.

M: Pero bueno no se puede hacer nada.

L'associació de la diferència de les dades a l'operació restar fa que escullin el rang com a paràmetre que resumeix les dades i aporta la informació desitjada. Però ells mateixos observen que perden informació de la dispersió de les dades amb el rang. La clau és la dispersió, no apareix a l'enunciat i no són capaços d'associar el concepte de dispersió al problema. Explicarem aquest punt. L'alumnat, igual que el rang, va estudiar diferents paràmetres estadístics durant els cursos anteriors. S'observa que tenen força clar que serveixen per resumir les dades. Si l'enunciat hagués demanat directament la dispersió, haurien utilitzat els paràmetres de dispersió. Podríem haver fet un apartat que en comptes de parlar sobre que diferents són els impostos que es paguen a cada província digués: "Calculeu la dispersió dels impostos per províncies i compareu-les justificant així el que diu l'article". Però llavors estariem adaptant un problema real a un problema escolar. Fem nosaltres el pont del contingut escolar a la situació que hem de solucionar. Significa que evitem que l'alumnat faci el pas del món real al món matemàtic en el cicle de modelització matemàtica. Per això és tan important com redactem l'enunciat de la tasca o activitat i, per això, les recomanacions de quines característiques han de tenir les MEA's.

Episodi clau ECT5 7

Característica clau: Enunciat Obert (Context) i Gran Volum de Dades

A3 09:46 (I)

M: Una pregunta, ehm, esto, a mi no me sale eso, por cierto, pero bueno ¿Qué estos números? O sea ¿El qué?

E: Nosotros hicimos la media de todos estos.

M: Ya pero ¿qué es? ¿qué es?

E: lo que se paga.

El gran volum de dades obliga durant el procés a fer relectures de l'enunciat i pauses per fer posades en comú, i més quan sovint fan feina en paral·lel. Potser amb un model matemàtic més simple i mecanitzant més el procés no haurien de retornar tant a l'enunciat. Però ja ho hem tingut en compte afegint un segon apartat a la tasca que permet la reflexió sobre els resultats obtinguts. Aquí s'observa la necessitat del context en els resultats que es van obtenint.

Episodi clau ECT5 8

Característica clau: Gran Volum de Dades

A4 06:03

M: Es la media y pones el mínimo y el máximo.

E: ¿Cómo? No, no es la media de todos, esss, loooo, en plan el rango la diferencia.

M: La diferencia.

E: Vale.

11:35 (A)

M: ¿Por qué hay tan pocos? ¿Es normal?

E: 62,21, el máximo, 122,26.

S: Vale.

E: Y el mínimo 64,05.

S: Vale.

E: Venga y Cuenca ...cuánto hay de Cuenca también.

S: Después de la Coruña ¿Cuál viene?

E: Cuenca.

M: Ostras, vais por la C ¿eh? que conste.

S: Y es hasta la Z.

E: No hay con Z.

S: Zaragoza.

M: Oye vamos a tardar mucho.

Com que utilitzen eines digitals, però de manera rudimentària, poden seguir el rastre dels càlculs. S'adonen que hi ha províncies amb més poblacions que en altres. També van repetint el procés que estan fent. Tornem a observar com s'adonen que és un procés llarg i tediós, ja que tenen moltes dades.

Episodi clau ECT5 9**Característica clau:** Enunciat Obert (Context)

A5 00:05 (I)

E: Bueno a ver.

M: No sé si es que era que descubrí que en plan ponía ahí que teníamos ir apuntando todo lo que hacíamos.

S: ¿Qué?

E: ¿Y lo estamos apuntando?

M: No.

07:13 (C)

M: Mira he puesto para llegar a la conclusión ...[M. parla ràpid dient què ha posat, les diferències i la mitjana, E. rectifica]

E: No, es que no es eso Mateo.

07:23 (I)

M: Sí.

E: No, nosotros hicimos,no, hicimos la media, escúchame.

M: No, hicimos la diferencia.

E: Que no, que no la diferencia lo que hemos hecho ahora hicimos la media de todos los vehículos del mismo municipio.

M: ¿Por qué?

E: Que sí.

M: ¡Ah! dentro del mismo municipio.

E: Claro dentro del mismo municipio hicimos las ... ¿Esto está mal?, sí ¿Verdad?

El procés d'anàlisi d'aquest grup és llarg, així que quan es troben en la cinquena sessió tornen a llegir l'enunciat i s'adonen que es demanava que expliquessin el que feien. Per aquest motiu, un integrant del grup, M, es posa a redactar què fan i com estan treballant. En el fragment anterior li llegeix al grup i això els ajuda a centrar-se de nou, ja que estaven cercant números de manera mecànica i estaven perdent la finalitat del treball. Per tant, tan important és demanar a l'alumnat que redacti el procés com que l'activitat sigui prou complexa per anar fent relectures durant el procés.

Episodi clau ECT5 10**Característica clau:** Enunciat Obert (Context)

A5 09:19 (C)

M: El rango.

E: El rango.

S: El máximo menos el mínimo.

E: El rango de todas las ciudades de cada provincia no es de cada ciudad.

M: De todas.

E: Las ...

M: Los municipios.

E: ¡Ah! Claro, sí.

E: De todos los municipios.

M: Estoy ¿hoy no? no puedo escribir ... de cada provincia ahora sí. [Fins aquí el redactat del procés planificat]

S: Exacto ¡qué trabajo más bonito!

09:58 (P)

E: Ahora nos teníamos que poner a compararlos todos y en teoría el que menos dé, es más justo.

Un membre del grup que treballava en paral·lel mentre feien els càlculs la resta del grup, llegeix què ha escrit sobre el procés que estan realitzant. Això permet continuar el discurs en la següent fase de manera natural. I, en aquest cas, la modificació del model. Un model que en realitat no fan servir posteriorment.

Episodi clau ECT5 11**Característica clau:** Enunciat Obert (Context) i Gran Volum de Dades

Havien decidit canviar el model escollint com a la província justa aquella que tenia el rang mínim. Per localitzar-lo el primer pas que fan és eliminar tota una sèrie de províncies que donaven el mateix exactament i les que estaven per sota. En teoria s'havien de quedar amb les províncies que estaven per sota d'aquest valor. S'adonen d'aquest fet perquè, encara que han utilitzat eines digitals, el procés ha estat en gran part artesà, i han pogut observar patrons.

A5 09:58 (P)

E: Ahora nos teníamos que poner a compararlos todos y en teoría el que menos dé, es más justo.

E: O sea todos los de 64,05 los quitamos porque hay más bajos S: Sí hay 47 ...

E: y 51 y no sé qué.

S: Sí y 39.

E: Entonces Mateo ahora tú ves apuntando ahí.

M: ¿Qué? pero todo esto lo pongo aquí sí?

E: Sí.

10:22 (C)

E: No sigamos sigamos.

M: ¿Qué? ¿Qué he de apuntar?

E: Ahora Mateo tienes que ir abajo y apuntar o sea pon ara pon b.

M: No creo que es dentro de la A, es la pregunta de esta.

E: ¡Ah! Vale, vale, vale, vale, pues entonces tú ahora ves a apuntando los que yo te diga ¿vale?

M: Vale.

E: Entonces ahora pon yo qué sé, no sé.

S: Espera E. dices, quitábamos ...los quitamos.

E: Claro.

S: Vale para comparar.

E: Ahora la comparación.

S: Entonces los que son más altos de 64,05 tampoco ¿no?

E: No, no, no, claro.

M: Hemos de mirar los más justos y los más injustos.

E: Los más justos y los más injustos ¿verdad? Vale, pues entonces es que entonces ... ¿los más justos es a partir de cuánto? a partir de 64,05 vale caro.

M: A ver el más justo de todos primero ponemos.

E: Vale primero pon la media o sea el el el impuesto que más se repite es 64,05.

[Comencen a redactar]

M: Podemos.

E: Podemos ...es repeteix.

M: La mitjana no.

E: No, l'impost que més es repeteix és de 64,05 coins.

M: Y ya está.

E: Vale, ves ahora [dicta] las provincias más justas son...

E: Ves ahora yo te voy diciendo.

M: Vale.

Però en el procés de redactar, mentre reconstrueixen el seu treball per reorganitzar-lo, en algun moment es perden i apareix la moda com a concepte clau, el que més es repeteix com les províncies més justes. Segueixen el redactat i continuen sorgint dubtes, en gran part per una confusió de conceptes.

12:30 (C)

E: Vale, ves ahora [dicta] las provincias más justas son ...

E: Ves ahora yo te voy diciendo.

M: Vale.

E: Vale, te digo Almería, Ávila, Badajoz.

S: Burgos-Burgos.

E: Así, Burgos.

S: Esta es la que la media es más justa ¿Las más justas?

Episodi clau ECT5 12

Característica clau: Enunciat Obert (Context)

Podem veure exemplificat com no separen el context de les dades, ja que no diuen agafar els nombres i fer la mitjana, sinó que parlen d'agafar els impostos. De nou apareix la justícia com a element diferenciador.

A6 01:22 (P)

M: Con tengo que hacer la media para ver cuáles estaban por debajo, nos quedamos aquí ¿Qué significa esto?

E: ¿Qué? [...] están en mi mesa.

E: Ehm esto que dijimos.

S: Ja, ja.

E: Esto dijimos ahora que teníamos que coger los impuestos.

M. ¿Dónde? Para ¡Deja quieto!

E: Ahora dijimos que teníamos que coger todos los impuestos no hacer la media todos y los que están por debajo era los más justos.

Episodi clau ECT5 13

Característica clau: Gran Volum de Dades

Encara que el grup ha resumit les dades, continuen tenint-ne massa volum de dades per fer una gestió adient, per això, encara intenten trobar eines digitals que permetin la seva anàlisi.

A6 02:02 (P)

E: No pero entonces lo que tendríamos que hacer es empezar 66,034 + 64,05 +....tal, tal, tal.

S: Y dividirlo entre...

E: Luego dividirlo entre todos los que son.

02:13 (A)

S: ¿No hay una fórmula que lo haga?

Episodi clau ECT5 14

Característica clau: Enunciat Obert (Context)

Reprenen la tasca a la sessió 7 i tornen a llegir el que tenien escrit. Això és crucial, ja que no fan la tasca de manera continuada. Necessiten un temps sempre per identificar què havien fet i què han de fer. A la fi expressen de manera correcta el seu model: fer la mitjana dels rangs. Però tenen identificada la mitjana com si fos el centre, la mediana. Aquests matisos caldria avaluar-los formalment. Dins de l'avaluació pot haver-hi preguntes directes de càlcul dels paràmetres. Altres que sigui d'interpretació dels paràmetres que prèviament has calculat. Hi ha d'altres que en una situació determinada proposen certs paràmetres per escollir quin oferiria una informació o una altra. Però aquí anem més enllà, cal que escullin el paràmetre i interpretin el resultat. Situem a l'estudiant en el concepte perquè localitzi quin paràmetre necessita.

A7 03:55 (I)

E: Las tarifas, no se qué, vale.

M: Vale nos quedamos aquí.

[E llegeix en veu alta què havien fet]

E: Hacemos la media para saber cuáles están por debajo.

M: ¿Las medias de qué? Perdón.

04:04(P)

E: Teníamos que hacer la media de todos estos números de 66 con no se cuantos.

M: Mmmmm.

E: La media de todos esos, para ver cuáles están por debajo, pero espera...¿Qué era esto?

[llegeix què havia escrit al document]

E: Hacer la media...

M: Sí, hacemos la media ahí y vemos cuáles...

E: Hem calculat el rang de tots els municipis de cada provincia ... Vale esto era la diferencia que había entre el más alto y el más bajo

M: Y ahora hay que hacer la media de las diferencias que hay entre el más alto y el más bajo y veremos cuál.

E: Hay que hacer la media de todos estos para ver cuál es el del medio y los que están por arriba son los más injustos.

Episodi clau ECT5 15

Característica clau: Enunciat Obert (Justícia)

A7 11:37 (A) E: ¿Los que estén por encima de 62,07 son menos justos y los que estén por debajo són más justos no?

Torna a aparèixer el concepte de justícia en el model identificat com l'elecció d'una frontera que delimita quins són justos de quins no.

Episodi clau ECT5 16

Característica clau: Enunciat Obert (Justícia)

A7 17:38 (I)

M: ¿Cuál era la pregunta? era: ¿Cuál era el más injusto?

E: No sé bueno.

...

17:48 (I)

M: [Llegeix] quines son més justes i per tant...

...

18:04 (I)

M: Pregunta cuáles son las más justas.

18:03 (C)

E: Jooolín.

S: Pues las 20 del EXCEL ya está.

M:Pues.

E: ¡Eh! Espera vamos aquí vamos aquí.

M: Y luego también di.

E: De todas las provincias [Es dicta a ell mateix les conclusions] hay 20 que

están por encima.

Observem com retornen a l'enunciat per definir de nou què demanen després dels càlculs. Són períodes llargs de càlcul i, per tant, tornen a l'enunciat. Després tornem a observar com el context és la solució. Quan insistim en la importància de les unitats en els problemes de matemàtiques, aquí queda palès com de manera natural redacten coherentment les conclusions.

21:36 (C)

E: Más.

M: Más no, nos pregunta cuáles son las más injustas.

E: ¡Ah! ¡Vale!

M: Las más justas. Ponemos concretamente las tres más justas.

S: ¿Se hace así?

M: Cáceres, eehm, Zamora.

E: Zamora ¿y?

M: No sé. Espérate ¿Cuál es? ¿cuál es así bajita? ...así de cuarenta y algo...Palencia Soria...

E: Cáceres, Zamora y Soria son las tres provincias más justas de ...en cuanto a qué...al precio...en cuanto al impuesto....

M: De los turismos, vale.

És el grup amb més episodis i en ells es reflecteixen totes les característiques que han anat apareixent en els anteriors. Un d'ells és la cerca de patrons, ja que, encara que han utilitzat eines digitals, han fet una feina d'interpretació dels resultats molt manual.

El context era inherent en el model, per tant, a les conclusions observàvem una bona expressió dels resultats, coherents i en concordança amb el procés. Defineixen “Justícia” i defineixen “Diferència” matemàticament. “Justícia” és el model final i “Diferència” un element important, integrant del model (Rang). Necessiten resumir les dades i tornar-les a sintetitzar, ja que el seu model oferia molta informació, però s'havia d'analitzar tota la informació per poder arribar a les conclusions.

Encara que ja es va comentar en el seu moment, durant l'explicació dels MAD's i amb els GEM's, en aquest grup es dona un fet molt important: la descripció (amb llenguatge poc precís) del concepte de dispersió estadística. En l'episodi sisè, un membre del grup, s'adona i fa adonar els seus companys, que el rang explicarà les diferències, però no descriurà com es distribueixen les dades entre el màxim i el mínim. El fet que els altres

membres del grup ho entenguin i, arribin al consens que no es pot fer res, ja que els seus coneixements estadístics són limitats, dona peu a pensar que, com en altres conceptes que han anat sorgint (mostra, normalitat i síntesi de les dades), l'alumnat, de manera intuïtiva, entén algunes de les grans idees estadístiques.

6.3.10 Estudi dels episodis clau del Team 9 (Segona recollida)

Ens trobem davant del segon grup més llarg amb nou episodis clau analitzats durant les fases de: interpretació, planificació, anàlisi i conclusió. El model matemàtic que va crear per resoldre la tasca utilitza uns quants exemples on relaciona arguments socioeconòmics (motius geogràfics i de salaris mitjans).

Episodi clau ECT9 1

Característica clau: Enunciat Obert (Justícia)

Durant la primera sessió l'equip Team 9 llegeix l'enunciat. En el procés de lectura hi ha diverses interrupcions per aclarir conceptes. En posem alguns a tall d'exemple.

A1 02:51 (I)

J: de 8...

A: Esto ¿Qué es? ¿El dinero?

J: Tarifas de impuestos de circulación.

J: Turismos, motocicletas, no entiendo nada voy un momento a por las gafas.

A: De menos de 8. [A. murmura está leyendo el artículo]

03:56 (I)

J: Esto son de tipos ¿Serán años no?

A: Sí.

J: De 8 a 11 tiene ...

A: 16...

J: Pero ¿Qué es este precio?

A: Más ...es más caro.

J: ¡Ah! Sí creo que son precios.

08:55 (I)

J: Supongamos un vehículo con más de 20 caballos ¿Caballos?

A: Caballos será de la potencia del motor ¿no?

J: Sí, pero caballos fiscales domiciliados.

17:41 (I)

A: Hay que saber cuál es más justa.

J: Sí.

J: A ver [llegeix] no tiene a ver pongamos que 20 caballos fiscales este 20 domiciliado en Melilla o sea [llegeix l'exemple de l'article] 156 euros la tarifa...

19:11 (I)

J: ¿Qué es “gruege”? [buscan qué es agravio comparativo].

Finalment es topen amb el concepte de Justícia.

19:45 (A)

J: O sea. Vamos a buscarla de esto ¿Qué es más justa?

J: No sé... supongo que sí, no sé, 18 Cáceres, 12 Ceuta ... Melilla. San Sebastián.

J: Sí, Melilla la que tiene más barata de 8 a ... 17.

A: Básicamente Ceuta.

A: A ver más justa: Granada. O sea ¿no?

21:17(I)

J: Hisenda [llegeixen l'apartat b.] os piden un informe para evaluar ... Hacienda os pido un informe para evaluar esta situación.

J: ¿Qué situación?

També podem observar com donen la solució, no en forma numèrica, sinó donen les ciutats que consideren justes, així s'evidencia l'estret lligam entre el context i el model matemàtic.

Episodi clau ECT9 2

Característica clau: Enunciat Obert (Context)

Comencen la segona sessió tornant a l'enunciat per acabar d'entendre tot el nou vocabulari. Cal exemplificar l'explicació amb dos casos.

A2 03:03 (I)

J: Motocicletas eran dos ...

A: ¡Ah! no, este era el tamaño de ... el tamaño de qué.

A: Depende del tamaño del motor o algo así valía más.

J: Sí...esto eran centímetros cúbicos.
 A: De los otros no me acuerdo.
 J: Esto [Parlen fluix]
 J: Caballos ¿no? ¡Caballo de humo!
 A: Sí, algo así.
 J: Caballo de humo, a ver ¿Qué quiere decir?...
 M: Yo digo, a ver, fiscales...
 J: Caballos. caballos fiscales de humo.
 A: Sí algo así era.
 M: Pero, o sea.
 A: Con que depende del sitio al pagas más o menos cuando las provincias.
 J: Si tú por ejemplo compras el coche en [...] y vives en Gerona, pues los km que hay entre Barcelona y Gerona te cobran más o menos.

Episodi clau ECT9 3

Característica clau: Enunciat Obert (Justícia)

Podem de nou observar com el concepte “Just” o “Justícia” no el tenen definit. I hi ha tot un procés al voltant perquè farà crear un model o un altre.

A204:42 (I)
 J: La, la, no sé qué, la comunidad más barata , que es...Ceuta.
 A: Melilla.
 J: Melilla.

05:35 J: ¡Eran justas no baratas!
 M: Pero...
 J: ...como justas [Segueix llegint].
 J: I, per tant, el fet...
 J: Y esto son los que sí porque ...
 J: [Llegeix el b.]
 J: Esto no lo entendimos.

Episodi clau ECT9 4

Característica clau: Enunciat Obert (Context)

Aquest equip s'adona que no és una activitat típica. Ells afirmen que no hi ha una pregunta clara.

A2 06:15 (I)

M: Supongo que serán los precios o algo así.

J: Sí, pero [...] no pregunta busqueu no sé qué...

J: La a. la tenemos y la b. no.

J: Ha d'incloure un recull de propostes que valorin diferents solucions.

J: La b. no la entiende ¡Vamos! ni ella.

Episodi clau ECT9 5

Característica clau: Enunciat Obert (Justícia)

Es necessita la definició de justícia per poder matematitzar-la i en són conscients.

A2 07:47 (I)

A: A lo mejor lo más barato no es lo más [...] no sé.

J: La más justa.

A: No sé.

J: Esa era, no nos da más pista, la más justa ¿En cuánto a qué?

Episodi clau ECT9 6

Característica clau: Enunciat Obert (Justícia i Context)

A2 .09:13 (I)

J: Es que MA. la pregunta de quines províncies són més justes es molt relatiu perquè ¿En relació amb qué? Més justes amb l'Estat que vol trobar per pagar o [...] que cobra poc.

10:00 (C)

J: Yo pongo sí, ha d'intervenir perquè cobro molt poc.

M: Pero podemos poner la opinión que ha de intervenir porque no nos parece justo ¿Eh?

10:10 (I)

J: ¿La gente que cobra poco?

M: Yo creo que ya está.

La resolució que prenen davant l'ambigüitat de la pregunta és donar la seva opinió. Ara bé, quan segueixen llegint la tasca ens trobem amb aquest fragment de conversa.

A3 00:47 (I)

J: Us demana un informe [Torna a llegir l'apartat b.] para evaluar esta situación.

J: ¿Qué situación?

M: La de que según la comunidad se paga una cosa u otra.

J: Vale.

On es fa palès que no havien resolt els dubtes i no tenien la tasca del tot integrada. El fet de de que l'enunciat inclogui l'apartat b en la seva formulació crea la necessitat d'avaluar el model per part dels estudiants.

Episodi clau ECT9 7

Característica clau: Enunciat Obert (Justícia i Context)

A3 02:56 (I)

J: [Llegeix de nou l'apartat a.] El artículo deja claro que el Ayuntamiento de que decide.

A partir d'aquest moment és quan apareix la variable “situació geogràfica” amb el suport de “diferència econòmica” per a justificar la seva resposta. Així el nou model recull aquestes nocions. La raó que argumenten és la temàtica de l'article i la seva descripció del context, ja que els permet connectar diversos aspectes que s'hi esmenten.

03:07 (C)

J: Vale pues, podemos decir que bueno como el artículo todo trabajo va del impuesto de circulación de cuánto te cobran si lo compras en un lugar o en otro.

M: Podemos decir, por ejemplo, Albacete pues que cobran una cosa ...

J: Por ejemplo, podemos poner: yo vivo en Albacete y cobro tanto, me cobran demasiado por el coche porque lo compré en Almería, algo así, ay, no sé.

Així, els membres del grup van desenvolupant el seu discurs fins a expressar-ho amb paraules més tècniques. Finalment apareix el concepte de diferència, encara que només sigui en un exemple concret.

04:35 (C)

M: Entonces el coche lo compré en Madrid, pero como vivo aquí estoy haciendo

diferencia, que es bastante ¿Lo hacemos así?

J: Sí, vale, pues hacemos lo de Valencia-Madrid que es fácil.

A: Vale .

M: O vivo en Madrid y me voy a Valencia, da igual.

Episodi clau ECT9 8

Característica clau: Enunciat Obert (Context)

Però el grup encara no està segur de com realitzar l'informe. Així que pregunten a la professora, que en un principi només havia de respondre generalitats i obvietats.

Pregunta del grup a l'A3 (I) 04:58

M: MA. En lo del informe evaluar para esta situación hemos de evaluar según el punto desde uno de Valencia o cómo.

MA: No, o sea no os pido un informe para evaluar, un informe para valorar si de esta tiene que intervenir. Quina situació heu identificat, la podeu expressar amb paraules?

J: La situació?

MA: Sí, hi ha una situació.

J: Sí, que segons la provincia on compres el cotxe.

MA: La província?

J: La provincia, la comunitat...

M: No, creo que es sobre la primera, la primera.

J: [Llegeix l'enunciat] L'article deixa clar que dins de la mateixa comunitat i fins i tot la mateixa província ...

MA: Diu dins de la mateixa comunitat, què forma una comunitat? Les províncies, i dins de les províncies? Fins i tot dins de la mateixa província, què formen les províncies?

J-M: [Simultàniament] Ciutats.

MA: I quin llistat us donen?

M: Provincies.

MA: No.

M: Sí.

J: Corunya, Albacete, Alicante, Almería, Ávila, Badajoz, Barcelona, Barcelona Barcelona es una provincia.

MA: Són ciutats, són ciutats dins de la provincia 06:20 ¿? MA podeu comprovar-ho amb el EXCEL aquell que us vaig donar si es això o no, vale però potser estan agafant la representació de quina és la capital de la província ,que bueno,

que tiene el mismo nombre.

J: Vale.

M: La situación es que según la provincia pagan más o menos ¿no?

MA: Sí.

M: Entonces ¿hemos de hablar sobre esto?

...

J: ¿Tenemos que dar nuestra opinión?

MA: No tenéis que valorar, o sea no opinión, fundado por los números que os dan. Os dan una serie de números.

J: Hisenda us demana un informe per avaluar.

MA: Quina es la situació?

Després de tota l'ajuda de la professora, tornen als seus exemples però fixant-se en les ciutats on l'impost és menor i, per tant, es fa evident que hi ha diferències substancials.

7:04(C)

M: Pues que hi ha algunes por ejemplo en Melilla.

J: Es el más barato.

M: De 8 a [...] cobran...

J: 6,31.

M: Y en Málaga...entonces que hay mucha diferencia.

07:20 (I)

MA: Pero ¿Es mucha? ¿Es necesaria esa diferencia? ¿No es necesaria?

La professora insisteix en la paraula diferència en què la quantifiquin i la relativitzin. A part de si és realment necessari que hagi valors dels impostos diferents, sense perjudicar al ciutadà.

08:15 (P)

J: Vale pues podemos poner en tal país es que tampoco dice coge todos los países o coge sólo 2 o coge 5 8 9

M: [...] En la tabla en la tabla en la tabla podemos ver según la ciudad hay una diferencia de precios con otra ¿no?

M: Yyy...

J: Que hay diferencias de precio.

M: Hacemos un ejemplo.

J: Por ejemplo.

M: Y las diferencias rondan.

A: En Barcelona.

J: En Barcelona 23,47 por un, un, cómo era como el caballo de vapor, nunca me acuerdo.

Encara que podríem pensar que a la intervenció de la professora, encara que no donava la solució directament, s'intuïa un camí a seguir i una estratègia, potser diferent de la que tenia el grup, en realitat van continuar amb la seva idea, només que introduint exemples on la diferència fos més evident. Així en la quarta sessió dramatitzen les conclusions per acabar de fer el segon apartat:

15:21 (C)

M: Lla diferencia del precio es exagerada...

J: ¿La qué?

M: Con [...] por ser de otra no tendría que ser [...] no sé qué estoy poniendo.

J: yo tampoco ...l'Estat.

J: ¡Eh! Consideramos que esta diferencia de precio es exagerada teniendo en cuenta la ¿localidad?

Episodi clau ECT9 9

Característica clau: Enunciat Obert (Context)

La darrera sessió comença d'aquesta manera:

A5 00:00 (P)

M: He pensado que podríamos hacer como la posición de diferentes personas.

J: Y los precios y los [...] ¿Qué tienen? Vale.

M: Sí, por ejemplo...¿eh?¿Què fem?Una persona ponemos Barcelona y Valencia y podemos poner.

J: Preciós, diferencia.

M: Sí.

J: [...] distribución de la renta.

Després de redactar el segon apartat han volgut donar-li una volta, acabar de deixar clar que intervenen diversos factors en contra d'aquesta diferència del cost de l'impost. Però el més sorprenent és que a mida que avança la redacció de les conclusions tornen a llegir i

s'adonen que la queixa és que les ciutats properes poden patir grans diferències associades a aquest impost. I, per tant, trobem que un enunciat ric en matisos i interpretacions i que necessita diverses lectures fa que vagin afinant el seu model.

01:34 (I)

M: Sí yo he leído esto otra vez y dice que por ejemplo eh ehmm que como en un sitio cuesta esto pero como se ha domiciliado en otro lugar, cuesta tanto.

J: claro, depende si yo ...compro el coche en Valencia y vivo en Barcelona me va a costar más que si vivo en Barcelona y lo compro en Barcelona.

02:11 (A) M: venga vamos a buscar dos que estén cerca y haya bastante.

05:25 (I)

M: Ya ¿De qué se ha de hacer entonces?

M: Bueno hay que evaluar la situación y hemos de decir si creemos que el Estado ha de intervenir en referente a la Ley Reguladora de Haciendas locales. [Hi ha un moment en què el grup observa que els altres grups estan fent càlculs però ells continuen amb el seu model] 06:00 (P)

A: El trabajo este es muy raro.

J: Ya.

M: ¿Quiénes son la gente que calcula? Calculan la media J: ¿La media de las dos?

M: De todo.

J: Yo no quiero calcular la media, que tampoco no creo que nos sirva de nada.

06:29 (A)

J: A ver, nuestra opinión ¿Qué vemos? Que hay mucha diferencia de precios entre unas provincia y...

A: Otras.

J: Y entre otras.

A: Claaro.

J: Eso es lo que vemos.

A: Vale, pero luego ¿qué hacemos?

J: Pues ahora nuestra opinión.

07:16 (C)

J: Opinamos que esta diferencia de precios es que ya lo hemos puesto arriba ¿no? [Quan segueixen redactant l'apartat b. sembla que tinguin recança de no

posar una justificació prou fonamentada en dades.]

10:24 (C)

J: El salario medio de Melilla por ejemplo ¡eh! Si el salario medio de Melilla es más bajo que el de Barcelona es justo que paguen menos ¿sabes?

M: Claro, para tí sería justo pero para otros no.

J: Ya es que bueno es mi opinión.

M: Por eso.

Per això, a mida que avancen les conclusions afegeixen les dades dels salaris mitjans per província. Aquestes dades els van impressionar i va crear una onada d'opinions sobre si és just o no la diferència entre homes i dones o de diferents llocs de treball. Aquest, de fet, és un dels objectius de la tasca.

14:57 (A)

M: El sueldo de un ingeniero de software en Cáceres es de 2.515 y el de un camarero de hotel es de 900.

M: Eso es depende de...

J: Muy bajo...

J: Todavía no hemos acabado, ¡uf! Vale, tú pon es de 1700.

M:400, 1400 al mes porque sinó.

J: Por tanto.

15:25 (C)

M: Y en Salamanca.

J: Por tanto, es justo que cobren menos que en Salamanca que el salario medio al año ...¿no?

A: ¡Ah! O sea, que depende del salario.

J: Claro, depende del salario puedes pagar más o menos por eso también en función de la provincia.

A: ¡Ah! ¡Claro!

J: Lo que me parece muy fuerte que o sea entre hombres y mujeres se o sea como 3.700 euros de diferencia.

En aquest grup podem observar com les lectures repetides fan concretar el procediment a seguir. El fet de tenir un enunciat obert a diferents interpretacions ajuda a modificar el model. El volum de dades és aclaparador per aquest grup, i per tant decideix exemplificar-lo amb exemples concrets. És interessant remarcar com el context intervé en la creació del

model i a la interpretació dels resultats.

6.3.11 Estudi dels episodis clau del Team 10 (Segona recollida)

L'últim grup estudiat treballa de nou amb un model que té el mínim com element clau, però barallen la possibilitat d'utilitzar elements geogràfics. Hem identificat dos episodis clau en les fases d'interpretació, planificació, anàlisi i conclusió.

Episodi clau ECT10 1

Característica clau: Enunciat Obert (Justícia)

Durant el primer àudio llegeixen la tasca. No fan cap comentari sobre l'article ni la tasca. Durant la segona sessió tornen a llegir la tasca perquè no recorden què han de fer. Un cop llegida la tasca apareix la primera idea. Res indica com el membre del grup ha arribat.

A1 04:36 (P)

M: Vale tenemos que mirar en la tabla creo 04:38 cual es la más barata.

04:42 (A)

M: Creo que es Melilla, a ver...

M: León, 20; la Coruña, 18; Badajoz, 19...17 tenemos que buscar la más barata porque es como la más...

AR: Mmm.

AR: ¿Cuál es la has dicho que era 17?

M: 17, Cáceres.

M: No mira Melilla 20, ¡ay! 6, Melilla 6.

AR: Pues Melilla.

M: Aquí.

AR: Ya, ya.

M: Vale, de menos de 8, de 8 a 12, 17 la CVF, a ver, entonces esto.(A)

05:32 (I)

M: ¿Cuál era la pregunta?

M: [Llegeix l'apartat a.] El artículo dice: son más justas y por tanto matricular en una población u otra no supone un agravio comparativo.

05:44 (C)

AR: Melilla.

M: Vale, pues Melilla ¿no? Es la más barata, es la que menos...

AR: La más justa.

Es pot observar que inicialment (minut 5) no saben dir el perquè, després la seva justificació es basa en és el concepte justícia. De fet, havien llegit amb èmfasi la problemàtica: vehicles amb la mateixa potència havien de pagar impostos diferents per pertànyer a una localitat o una altra, i, aquestes localitats poden estar a pocs quilòmetres de distància. En les següents sessions l'únic destacable és que dubten si han de posar només una província justa (la més econòmica) o més d'una. Però rellegeixen l'enunciat per indicació de la professora i observen que demanen províncies justes, és a dir, en plural.

Episodi clau ECT10 2

Característica clau: Enunciat Obert (Justícia)

L'apartat b. el justifiquen:

A3 (C) 09:48

M: Vale pues que se ajuste un precio en plan en todas, normal, en plan...

AL: ¿Hay alguna propuesta? [M: Ni lo más caro...] de los coches solo [...] o algo así.

M: ¿Por?

AL: Porque esto va de coches en plan.

M: Ya, sí.

AR: Vehicles.

Així queda però en la següent sessió, hi ha discrepàncies. De nou, tenir diversos apartats i haver de revisar què han contestat, fa modificar el model.

02:38 (C)

M: ¿Creéis que el Estat ha de Intervenir?

AR: Sí.

AL: Evidentement.

M: Vale, evidentemente ¿qué?

AL: Ha de intervenir, je, je.

M: ¿Qué pongo? Evidente el Estado tiene que intervenir.

AL: Depende de...da igual.

M: ¡Ehmm! Dos puntos, no es, ponemos, en plan: no es justo que en...

AR: ¿Qué? ¿Qué?

AL: Que suban por diferentes, en plan.

M: Por la localización. Que suban el impuesto por vivir en otra localización.
Vale.

04:17 (I)

AL: Bueno que yo también lo entiendo porque no es lo mismo vivir que en el campo, playa fiesta, que ...

M: ¿Qué tiene que ver el coche?

AL: Porque en plan no lo mismo utilizar el coche en una ciudad por ejemplo, yo que sé, Barcelona, que utilizarlo por el campo, no es lo mismo.

M: ¿Por qué?

AL: No sé, mucho más diferentes.

AR: Son cosas distintas.

AL: Puedes ir por un sitio donde es mucho más famoso y hay muchas más cosas, en cambio, en el campo sólo como no quieras parar a tomar un café en una gasolinera... je, je, je.

M: Vale. ¿Ves? Sí que es justo.

Observem com el concepte de pagar diferents imports en diferents ciutats d'altres variables. També va passar a l'estudi previ on entenien que diferents càrrecs de manera natural, implicaven diferents sous i, per això no deixava de ser just. Ja que, en aquell cas hi ha altres variables involucrades: responsabilitats del càrrec, estudis i formació...

El concepte de justícia desenvolupat influeix sobre les decisions que pren l'equip i el model creat. Tornem a observar el context implícit i com influeix al desenvolupament i interpretació de la tasca. Recordem que aquest grup té dues produccions entregades. La segona, que no s'ha analitzat, desenvolupa la tasca com un altre grup, intenta utilitzar el model d'un altre grup. Però, encara que l'entenien, és un model complex i no acaben la tasca. Per això s'ha optat per només analitzar la primera part. De nou, els models externs, no evolucionen favorablement.

6.4 Síntesi de resultats de la Combinació de MADs i de GEMs

La integració de dues eines metodològiques ha permès identificar episodis clau en la generació de models estadístics, caracteritzats per la seva coherència amb la literatura existent. A continuació, es presenta un taula (6.4) que resumeix els resultats obtinguts respecte als elements de la tasca que promouen que els grups de treball facin evolucionar el seu model matemàtic.

	G1	G2	G3	G4	T1	T2	T3	T4	T5	T9	T10
EP1	GVD	EOJ	EOJ	GVD	GVD	GVD	EOC	EOJC	EOC	EOJ	EOJ
EP2	GVD	GVD	EOJ	GVD	GVD	GVD	EOJ	EOJ	GVD	EOC	EOJ
EP3	C/D	EOJ	EOC	IG	GVD	EOC	EOJ	EOJ	J/D	EOJ	
EP4	GVD	EOC	EOJ	EOC	EOC	EOC	EOC	GVD	GVD	EOC	
EP5	EOC	GVD	EOC	EOC	EOC		GVD	J/D	GVD	EOJ	
EP6			EOC		EOC		EOC	J/D	GVD	EOJC	
EP7							EOJ		C/D	EOJC	
EP8									GVD	EOC	
EP9									EOC	EOC	
EP10									EOC		
EP11									C/D		
EP12									EOC		
EP13									GVD		
EP14									EOC		
EP15									EOJ		
EP16									EOJ		

Taula 6.4: Distribució dels Episodis Claus per Grups de Treball

La nomenclatura emprada a la taula 6.4 per a descriure els elements que promouen el desenvolupament dels models matemàtics és la següent:

GVD: Gran Volum de Dades

EOC: Enunciat Obert (Context)

EOJ: Enunciat Obert (Justícia)

EOJC: Enunciat Obert (Justícia i Context)

IG: Interferència d'un altre grup

J/D: Enunciat Obert (Justícia) i Gran Volum de Dades

C/D: Enunciat Obert (Context) i Gran Volum de Dades

Com es pot comprovar, hi ha episodis clau en els que evoluciona el model en el treball de tots els grups. Per al Team10 només hem identificat dos episodis clau, però tota la resta de grups mostren entre 4 i 9 episodis. De forma molt excepcional, en el Team05 hem identificat fins a 16 episodi clau.

Podem comptabilitzar fins a 26 episodis d'un total de 71 on el gran volum de dades és el protagonista. Això significa que un 37% dels episodis es preocupen pel gran volum de dades i, obliga a descartar, agafar una mostra o a treballar amb eines informàtiques. Les discussions al voltant del terme "Justícia" es donen en 22 dels 71 episodis, un 31%. És cert que hi ha episodis que verifiquen dues característiques. És lògic pensar que el context de la tasca envolta el treball dels estudiants fent-se visible en molts episodis.

S'han identificat episodis en totes les fases del procés de resolució de l'activitat. Si bé dos grups van presentar episodis dispersos al llarg del desenvolupament, la majoria dels grups van requerir cinc o sis períodes concentrats en la construcció del model. Es considera que les característiques de la tasca van tenir un paper crucial en aquesta dinàmica. L'activitat proposada oferia múltiples enfocaments possibles, es desenvolupava en un context real i exigia als estudiants afrontar un text complex amb un llenguatge precís i sense una definició matemàtica exacta (com en el cas de "justícia") o amb divergències entre el llenguatge comú i el científic (com en el cas del concepte "diferència"). Cal destacar que aquesta habilitat per interpretar i contextualitzar informació és la primera que es cal desenvolupar en l'Alfabetització Estadística (Gal, 2001).

En consonància amb Moore (1997), qui assenyala la indissociabilitat entre context i dades, s'ha pogut observar en diversos episodis com els estudiants es referien a resultats numèrics per caracteritzar el context. A més, el context va influir en el desenvolupament dels models, introduint conceptes socioeconòmics tant en els models com en els raonaments per a la seva construcció. L'activitat va propiciar la discussió entre els membres dels grups, la qual es va entendre com un diàleg per arribar a un consens. En aquest sentit, diversos moments dels episodis clau es poden caracteritzar amb el cicle d'interrogació proposat per Wild i Pfannkuch (1999), si bé aquest no era un dels objectius explícits de l'anàlisi. Aquesta coincidència posa de manifest la relació entre el procés de modelització dut a terme pels estudiants i el marc teòric del Pensament Estadístic. A continuació, es ressenyen breument les característiques d'aquest cicle d'investigació:

- **Generar:** com s'indica es tracta de generar tot de possibilitat tant individualment com en grup. Es pot aplicar en diversos àmbits: cerca de causes, explicacions i de mecanismes. Podem generar en totes les fases del cicle d'investigació, ja sigui cercant informació, comprovant idees, planificar un nou enfocament. Es poden generar possibilitats a partir del context, de les dades i del coneixement. Es poden aplicar al problema actual o en altres investigacions a tall d'hipòtesi.

Els grups van abordar diverses estratègies on es van formular nous enfocaments i es va sotmetre a discussió la idoneïtat dels models proposats. Aquesta discussió crítica va considerar els pros i els contres de cada model, avaluant-los en el context de la tasca i les seves exigències.

- **Cerca:** possiblement després de generar possibilitats s'inicia un cerca d'informació que pot ser interna o externa.

Efectivament, els estudiants van desplegar una estratègia activa de recerca d'informació, abastant tant conceptes desconeguts com eines necessàries per a l'èxit de la tasca. S'ha observat que van aclarir paraules i conceptes clau de l'enunciat de l'activitat, demostrant una identificació clara del context i d'una comprensió dels objectius perseguits. Aquesta recerca va incloure tant conceptes matemàtics com terminologia relacionada amb el context social on s'emmarca el problema, evidenciant una consciència de la interdisciplinarietat que caracteritza l'àmbit estadístic. A més, van demostrar una iniciativa notable en la recerca d'informació externa, consultant fonts diverses per a complementar el seu coneixement previ. Aquesta iniciativa es va manifestar en la consulta de solucions directes al problema, així com en la identificació d'indicadors rellevants que van acabar formant part dels seus models. Finalment, cal destacar la seva proactivitat en la recerca d'eines tecnològiques que els permetessin aplicar els seus models de manera eficient. Aquesta habilitat demostra una comprensió de la importància de la tecnologia en l'àmbit estadístic modern i la seva capacitat per a adaptar-se a les eines disponibles. És cert que hi ha grups que no tenir aquest coneixement els va limitar en l'aplicació del seu model i, per tant, només van poder analitzar una part de les dades donades. Però van ser molt conscients durant el procés d'aquesta limitació i de que allò limitava les conclusions. En resum, els estudiants van exhibir una actitud activa i responsable en la recerca d'informació, demostrant una comprensió de la problemàtica i la capacitat d'utilitzar diversos recursos per a arribar a una solució satisfactòria.

- **Interpretar:** fase necessària per a processar la informació. Per això cal una sèrie de passos: llegir/escollar, traduir, resumir internament, comparar i connectar. Sovint

en els estudis s'observa com els estudiants fan una connexió i jutgen, en comptes de fer-ne diverses i passar a la fase de la crítica.

Enfrontant-se a l'enunciat de la tasca, els estudiants van desplegar una sèrie d'estratègies cognitives per a processar i comprendre la informació proporcionada. En primer lloc, van realitzar una lectura atenta de l'enunciat, traduint-lo al seu propi llenguatge i interpretant els conceptes matemàtics presents. Aquesta acció els va permetre assimilar la informació de manera significativa i contextualitzada. A més, tornaven a l'enunciat sempre que trobaven dificultats o tenien dubtes a l'hora d'aplicar el seu model. En segon lloc, van dur a terme un procés de selecció i anàlisi crítica de la informació, descartant aquella que consideraven irrellevant o inviable per a la tasca en qüestió. Aquesta habilitat demostra una capacitat de comprensió dels objectius a assolir, o com a mínim de prendre decisions sobre els objectius a assolir. En tercer lloc, van establir connexions entre diversos conceptes matemàtics (mitjanes, rangs, màxims, mínims, intervals, diferència...), identificant relacions entre ells. Aquestes connexions van servir com a base per a la construcció dels seus models, evidenciant una capacitat d'abstracció i síntesi. En quart lloc, van valorar la complexitat d'aplicar els models a la situació real plantejada, tenint en compte tant les limitacions tècniques com la seva pertinència i precisió. Aquesta reflexió crítica denota una comprensió realista de les aplicacions de l'estadística en contextos concrets.

- Criticar: la fase crítica és un procés per avaluar la informació i les idees noves. Cal verificar la coherència interna; comparar amb punts de referència interns i externs, i fer una reflexió crítica argumentant una conclusió informada. L'objectiu final és determinar la fiabilitat, la rellevància i la utilitat de la informació abans d'acceptar-la.

En els moments clau, les noves idees aportades pels membres dels grups eren objecte de debat, anàlisi i, en ocasions, rebuig. Un exemple d'això va ser la proposta de fer mitjanes de mitjanes en el segon grup de la primera recollida. Com s'ha exposat en els apartats anteriors, els estudiants van realitzar una avaluació constant de la informació: la generada pel model durant l'anàlisi, la provinent de fonts externes i el seu propi coneixement matemàtic i estadístic.

Capítol 7

Conclusions

Aquesta tesi doctoral presenta un conjunt d'estudis dirigits a descriure de forma precisa els models matemàtics que desenvolupen els alumnes d'Educació Secundària quan treballen amb una activitat estadística amb dades realistes i identificar els episodis clau per a la generació dels conceptes que sustenten els models. Tal i com es detalla a la Introducció, aquesta recerca es concreta en els següents objectius específics:

- **OBJ1.** Caracteritzar l'activitat de resolució del treball d'estudiants de secundària en una activitat estadística contextualitzada en termes de modelització matemàtica.
- **OBJ2.** Caracteritzar l'activitat modelitzadora dels alumnes al treballar en activitats estadístiques contextualitzades.
- **OBJ3.** Caracteritzar els models matemàtics que desenvolupen els alumnes.
- **OBJ4.** Identificar els elements d'activitat clau per promoure els models matemàtics generats.

En aquest capítol de conclusions es donarà resposta als quatre objectius de recerca, es discutiran les implicacions didàctiques de l'estudi i es presentaran les investigacions futures que deriven d'aquest treball.

7.1 Resposta al primer objectiu de recerca

En el capítol 3 es presenta l'anàlisi d'una tasca de modelització on s'utilitzen dades estadístiques contextualitzades per promoure el procés de modelització. L'anàlisi s'ha

implementat tractant d'utilitzar com a referent el cicle de modelització presentat per Blum & Leiss (2006), que és una aportació teòrica que ha tingut un gran impacte en la literatura relacionada amb la investigació de la modelització matemàtica.

A l'anàlisi descrita es mostren les dificultats observades per realitzar una codificació precisa dels processos de modelització que realitza un grup d'alumnes en resoldre la tasca. En concret observem una gran dificultat per determinar en cada episodi la pertinença al domini real o al domini matemàtic, d'acord amb Barbosa (2009) que argumenta que la distinció entre realitat i matemàtiques pot resultar difusa. En el cas estudiat, la naturalesa de la tasca sembla clau per determinar aquesta dificultat. Atès que els alumnes no treballen a partir d'observar directament les empreses que són objecte d'estudi i tot el que en tenen és una descripció en forma de taules de sous, en ocasions assimilen aquests valors a objectes reals mentre operen amb ells i els tracten com a objectes matemàtics. D'aquesta manera, entenem que en altres situacions de modelització en què els alumnes tinguin descripcions numèriques d'objectes o fenòmens reals (ja siguin donades a l'activitat o obtingudes en el procés de modelització) es pot observar aquesta situació d'ambigüitat.

En paral·lel, un cop superada aquesta primera dificultat, observem que la forma del graf que representa el procés de modelització dut a terme pels alumnes no representa un cicle de modelització. Una primera mirada al graf ens proporciona una visió de desordre, atesa la seva complexitat, però que recupera el seu significat en observar les decisions que els alumnes prenen a cada fase del procés. Blum & Borromeo Ferri (2009) ja van presentar un cas d'estudi on les dades de l'anàlisi no coincidien amb aquesta visió cíclica, però entenem que els resultats de l'anàlisi presentat en aquest apartat mostren un nivell de complexitat encara més gran.

Des d'aquest punt de vista, entenem que les representacions que es troben a la literatura ofereixen una visió distorsionada de la complexitat dels processos de modelització matemàtica i podrien portar a equívocs no desitjats en no existir concordança entre allò esperat i allò observat. Aquest aspecte pot ser clau en la implementació d'activitats d'aula i les expectatives del professorat, que poden veure's desbordats pel tipus de treball a promoure o coordinar.

Per això, entenem que la caracterització dels processos de modelització s'hauria d'entendre com un camp obert d'estudi que requereix aportacions que permetin superar les dificultats detectades en aquest treball.

Si recordem el primer objectiu de la recerca:

- **OBJ1.** Caracteritzar l'activitat de resolució del treball d'estudiants de secundària

en una activitat estadística contextualitzada en termes de modelització matemàtica.

Hem pogut descriure una activitat de resolució de la tasca complexa. El cicle de Blum & Leiss (2006) amb la seva representació clàssica permet caracteritzar l'activitat de modelització però de forma que no mostra tots els aspectes que pretenem estudiar i de forma en la que no es pot combinar amb altres formes de representació. En concret, el cicle de modelització presenta limitacions que es concreten com segueix:

- Veiem els salts d'una fase a una altra del procés. Aquests salts que poden de durada intermitent i que no segueixen una seqüenciació, dificulten l'anàlisi del procés de resolució. La representació clàssica no permet exposar de manera clara el procés de modelització matemàtica.
- S'observa com la frontera entre el món real i el matemàtic es dilueix ja que el context és inherent en les dades i els processos (Cobb, 1997). Encara que sense experiència prèvia en activitats estadístiques complexes, el context era important a la tasca i les dades, operaven diferent respecte les dades matemàtiques (Burrill & Biehler, 2011; Friel et al, 2001).

Per tant, observem que ens cal trobar altres representacions del procés de modelització matemàtica més explícites per tal de saber en quins punts es formen, es desenvolupen, o fins i tot, desapareixen els models o alguns dels elements que els estudiants consideren per formar-los. Concloem que té sentit explorar altres eines teòriques per caracteritzar l'activitat de modelització dels estudiants en activitats complexes, en especial si contenen dades estadístiques i es pretén un control del desenvolupament dels models generats.

Per tal de descriure els models ha estat necessari posicionar-se teòricament sobre si es descrivien els models i l'activitat en termes estadístics o matemàtics. Els models matemàtics descriuen l'estructura conceptual i els estadístics estenen els models matemàtics descrivint la variabilitat al voltant de l'estructura creada als models matemàtics (Crites & Laurent, 2015). Ja a l'estudi pilot (Aymerich & Albarracín, 2016) s'identifiquen intuïcions dels estudiants sobre conceptes estadístics complexos però expressats sense base de contingut estadístic, com per exemple quan proposen que els sous són normals i, que per tant, havien d'haver poca gent amb salaris molt baixos, poca gent amb salaris molt alts i molta gent amb sous situats al voltat de la mitjana. Però encara que la normalitat sigui un concepte present en les discussions dels estudiants, comprovem que no el fan servir per estructurar el model que construeixen.

Per caracteritzar el procés de modelització també es podria haver analitzat en quin punt de desenvolupament del raonament estadístic es trobaven els alumnes participants.

Recordem que la descripció de Garfield & Ben-Zvi (2007) del raonament estadístic es basa en com es raona amb les idees estadístiques i com pren sentit la informació estadística. Per tant, involucra connectar un concepte amb un altre o combinar idees sobre dades i canvi, però en les dades analitzades al capítol 3 no s'observen aquestes relacions. Considerem, doncs, que l'activitat que han desenvolupat els alumnes és una activitat de modelització matemàtica, ja que els estudiants han creat un sistema conceptual que el permet descriure la situació estudiada i per al que han creat procediments matemàtics lligats als conceptes que consideren clau. Els alumnes no utilitzen explícitament idees pròpies de l'Estadística, com ara la incertesa, amb el que reforcem la idea de que té sentit seguir investigant el comportament dels alumnes en aquest tipus d'activitat des de la perspectiva de la modelització matemàtica.

7.2 Resposta al segon objectiu

En el capítol 4 hem analitzat el treball d'alumnes de 4t curs d'Educació Secundària Obligatòria en enfrontar-se a una tasca en la qual s'enfronten a una gran quantitat de dades reals. Corroboem que l'activitat proposada és una activitat que promou realment la modelització matemàtica (Lesh, 1997). Els grups, en general, desenvolupen models matemàtics usant procediments específics per a donar resposta a la problemàtica plantejada. Alguns grups de treball desenvolupen els conceptes que donarien forma a un model matemàtic (Lesh & Harel, 2003) però sense utilitzar procediments que involucrin càlculs específics, amb el que treballen a partir d'un model informal, un model que no es concreta a la pràctica. En segon lloc, l'activitat dels alumnes es focalitza majoritàriament a mesurar les diferències entre els valors dels impostos proporcionats, amb el que comprovem que respon a la necessitat de promoure el raonament estadístic (Garfield & Ben-Zvi, 2007; Garfield & DelMas, 2010) i el pensament estadístic (Wild & Pfannkuchen, 1999). D'aquesta manera, ampliem el tipus d'observacions realitzades al capítol 3 i observem que la resolució del problema conjuga activitats de modelització matemàtica però també de raonament i pensament estadístic, encara que seguim considerant que els estudiants no desenvolupen una activitat plenament de modelització estadística. Interpretem que aquest fet es deu realment al fet que aquests processos d'activitat comparteixen una base comuna i que es diferencien majorment en aspectes que s'han esquivat amb el disseny del problema presentat.

Per a desenvolupar l'anàlisi hem utilitzat una adaptació específica per a les activitats amb continguts estadístics dels Diagrames d'Activitat Modelitzadora -DAM- (Ärleback,

2009) com a eina d'anàlisi. Els resultats obtinguts mostren que l'activitat promou efectivament els dos elements per als quals ha estat dissenyada: la modelització matemàtica com a activitat principal i el tractament de dades estadístiques.

Les representacions dels DAMs ens aporten una visió clara del procés que segueixen els grups a l'hora de desenvolupar la seva tasca. En contraposició a l'anàlisi basada en el cicle de modelització, l'ús del DAM permet clarificar què estan fent els alumnes en cada moment (Aymerich i Albarracín, 2016). Anades i vingudes d'una fase a l'altra o romandre en una fase del procés un període de temps determinat ens mostren el cicle de modelització d'una manera més clara. Encara que tots semblin diferents, tenen trets comuns i trets diferenciats que els justifiquen. Per tant, els DAMs ens permeten visualitzar de manera clara el procés de modelització desenvolupat pels estudiants, poder comparar i analitzar el cicle de modelització matemàtic durant la resolució d'una activitat estadística contextualitzada. D'aquesta forma donem resposta al segon objectiu d'aquesta tesi:

- **OBJ2:** Caracteritzar l'activitat modelitzadora dels alumnes al treballar en activitats estadístiques contextualitzades.

Una activitat de modelització que es mostra essencial en la creació del model matemàtic és la fase de planificació de la tasca. Observem que una planificació breu pot implicar un model simple o complex, però sobre el que el grup està d'acord en la seva concreció i forma d'ús. Les causes per a una planificació simple són diverses, com el desconeixement d'altres opcions o acord total en el model inicial. També s'observa que les interpretacions diferents de l'enunciat aportaran una rica discussió en el grup i comporten que s'allargui la fase d'interpretació.

Per aconseguir la presència de diferents interpretacions de l'enunciat i la corresponent riquesa de models generats ha estat essencial una característica essencial de l'activitat: que aquesta sigui una activitat amb un context real. El context totalment real comporta un vocabulari que els estudiants utilitzen habitualment en un àmbit no matemàtic però que, ara, han de matematitzar. És el cas dels conceptes de "Justícia" i "Diferència". A més, l'estructura de l'enunciat de la tasca que divideix l'activitat en dos apartats, on el segon està pensat per revisar el model matemàtic, permet als estudiants introduir canvis a partir de repensar el model i fer-lo evolucionar en aquells grups que, potser, no havien desenvolupat o havien donat la coherència necessària al seu model. En gairebé tots els grups hi ha retorns reiterats a la interpretació per validar el camí que estan seguint en la resolució de l'activitat. En tenir dos apartats, en general, hi ha dos moments de conclusió durant el procés, sempre que el grup no obviï algun apartat de la tasca.

Els resultats de l'estudi presentat al capítol 4 mostren que els alumnes generen els seus propis models matemàtics per resoldre la situació plantejada emprant conceptes matemàtics que coneixen de la seva experiència anterior, però innovant com combinar-los per aconseguir els seus objectius. També observem que els alumnes identifiquen elements matemàtics clau per donar forma al model, encara que no coneguin un procediment específic per especificar-lo formalment. D'aquesta manera els alumnes generen models matemàtics propis per resoldre una situació que requereix coneixements matemàtics específics (Aymerich, Gorgorió, i Albarracín, 2017). Els elements clau que provoquen aquesta manera de procedir dels alumnes tenen diferent naturalesa. D'una banda, hi ha els elements propis del disseny de l'activitat, com ara proporcionar una gran quantitat de dades o referir-se a un concepte ambigu com és el d'una assignació justa d'impostos, que promou les discussions entre els alumnes. D'altra banda, identifiquem un element clau en triar el context en què basar el treball proposant una temàtica complexa que clarament és multifactorial i que fa que no sigui senzill triar mostres representatives per treballar.

7.3 Resposta al tercer objectiu

En el capítol 5 hem analitzat el treball d'alumnat en enfrontar-se a la mateixa tasca que al capítol 4, en la qual han de tractar amb una gran quantitat de dades i quantificar la variabilitat d'aquestes dades. En aquest cas ens hem centrat en una anàlisi que ens permet estudiar els models matemàtics generats, així com la seva evolució. Els resultats de l'estudi mostren que els alumnes generen els seus propis models matemàtics per a resoldre la situació plantejada, emprant conceptes matemàtics que coneixen del seu bagatge matemàtic anterior. No obstant això, ho fan innovant en la manera de combinar-los per a aconseguir els seus objectius, com és el cas dels paràmetres de centralitat i la generació d'interval·ls, entre d'altres.

També observem que els alumnes identifiquen elements matemàtics clau per a donar forma al seu model amb l'objectiu de quantificar la variabilitat de les dades. Encara que no coneguin un procediment específic per a concretar-lo formalment o tècnicament s'esforcen a concretar la solució de la tasca. D'aquesta manera, els alumnes generen models matemàtics propis per a resoldre una situació que requereix coneixements estadístics específics. Diversos grups s'adonen de les limitacions del seu model per resoldre de manera eficient la tasca, ja sigui pel seu procés llarg i laboriós o bé perquè no afina prou en els resultats obtinguts. Aquest darrer fet implica que tenen una noció de la dispersió intuïtiva prou elaborada però no associada als paràmetres de dispersió com la varianza, la desviació

o el coeficient de Pearson. Tampoc es plantegen representacions gràfiques per resumir les dades i observar la distribució.

L'enunciat del tercer objectiu de recerca d'aquesta tesi està enunciat de la següent forma:

- **OBJ3.** Caracteritzar els models matemàtics que desenvolupen els alumnes.

Per poder implementar aquesta caracterització va ser necessari triar una definició de model matemàtic que permetés identificar els elements que conformen els models i representar-los adequadament. A la literatura es troben dos tipus de definicions de model. Per una banda les que tracten els models com un conjunt de regles que treballen conjuntament, com poden ser les definicions de Velten (2009), Blum & Niss (1991) i Niss (2012), i de l'altra les definicions que consideren que un model és un sistema conceptual, com les de Minsky (1965), Lehrer i Schauble (2003), Hestenes (2013) i Lesh i Harel (2003). En aquest treball ens decantem per aquest segon tipus de definicions perquè permeten interpretar els models com a un conjunt d'elements estructurats (conceptes, procediments i llenguatges de representació). De fet, corroborarem que la definició de Lesh i Harel (2003) és la que millor s'orienta a l'anàlisi de dades de fenòmens educatius, com és el cas d'aquesta tesi doctoral. Prèviament, ja havíem utilitzat aquesta definició per caracteritzar models (Gallart, et al., 2017) i per elaborar una primera proposta que ens servia com a base per a la caracterització diagramàtica que presentem en aquest treball (Albarracín, Aymerich & Gorgorió, 2017).

D'aquesta forma, en el procés d'anàlisi presentat al capítol 5 es manifesta la necessitat de centrar-se en els sistemes conceptuals i simplificar la seva representació per augmentar la capacitat de representar els elements essencials del model. D'aquesta forma es defineixen els Gràfics Explicatius dels Models -GEMs- (Aymerich & Albarracín, 2021) que ens permeten capturar els elements clau dels models que generen els alumnes i representar de manera concisa els models matemàtics creats durant el procés de resolució per poder seguir el seu desenvolupament.

7.4 Resposta al quart objectiu

En el capítol 6 es mostra l'anàlisi fusionat dels DAMs i els GEMs per a les resolucions dels estudiants per a l'activitat presentada al capítol 4. Entendre *què fan* els estudiants en termes d'activitats de modelització i quin és *l'estat del model matemàtic* estan considerant

en cada moment permet observar els moments de canvi, que interpretem com a episodis clau en l'activitat de modelització. D'aquesta forma, podem donar resposta al darrer objectiu de la tesi, que té el següent enunciat:

- **OBJ4.** Identificar els elements d'activitat clau per promoure els models matemàtics generats.

L'anàlisi mostrada en els DAMs+GEMs dels grups ens permet identificar aquells episodis en els quals els alumnes han pres decisions que els han permès desenvolupar amb més precisió el model matemàtic que construeixen. En concret, els elements que provoquen que els alumnes incideixin en el model matemàtic que usaran per a justificar les seves respostes són els següents:

Gran volum de dades: L'alumnat es planteja formes efectives o viables d'analitzar una quantitat de dades de gran volum com la que se'ls ha proporcionat. Els alumnes poden ser conscients d'aquesta dificultat des que llegeixen l'enunciat o pot ser que s'adonin d'això mentre exploren les dades o fins i tot en una fase posterior, mentre els estan analitzant. En tots aquests casos la gran quantitat de dades afecta al treball dels alumnes que, al no conèixer mètodes específics per a enfrontar-se a aquesta situació, busquen estratègies per a esquivar el problema o replantejar-se el mètode usat. D'aquesta manera, se substitueixen les dificultats de recollir dades per les de tractar i manipular dades (Hahn, 2015; Muñoz-Rodríguez, Rodríguez-Muñoz i Alsina, 2020, Ubilla, 2020).

Indefinició de conceptes no matemàtics: L'enunciat fa servir un llenguatge natural on s'inclouen paraules com "Justícia" i "Diferència". Cal que els estudiants defineixin aquests conceptes segons la seva pròpia concepció del terme. La discussió durant el desenvolupament de l'activitat es dona en diverses ocasions i en la majoria de grups. "Justícia" acostuma a associar-se al model complet i, en canvi, "Diferència" a una part d'aquest model. Com que al món de les matemàtiques tenim també la paraula diferència, associada a l'operació resta i apareixen valors numèrics a l'activitat, no és d'estranyar que alguns grups centrin el model en procurar aplicar l'operació resta. D'aquí sorgeix sovint el rang que han estudiat com a paràmetre de dispersió.

Complexitat de la realitat estudiada: Les dades proporcionades es presenten acompanyats d'un context complex en el qual no es proporciona informació específica sobre els factors que influeixen en la variabilitat de les dades. Això suposa enfrontar als alumnes

una situació complexa en la qual observen que tota reducció de la complexitat canvia el problema, amb el que han de tractar de treballar sense reduir-la. Aquest fet es mostra en les dificultats que presenten els alumnes en tractar de determinar mostres de les dades per a obtenir resultats, ja que consideren diverses variables socioeconòmiques i observen que han de considerar un gran nombre d'elles per a assegurar que la mostra pot representar adequadament a cada conjunt de dades estudiades. També mostra la necessitat de resumir les dades tantes vegades com calgui per poder extreure'n conclusions.

Característiques de la formulació de l'enunciat de l'activitat: Aquesta activitat està redactada seguint els principis que caracteritzen una MEA (Lesh & Cramer, 2003): construcció del model, realitat, generalització, prototipus simples, documentació i autoavaluació. Així el fet d'afegir un segon apartat per tal de documentar el model, perquè els estudiants reflexionessin sobre el model creat, ha estat molt productiu a l'hora de fer modificacions. Obligava a l'alumnat a tornar a l'enunciat de la tasca i a les seves conclusions i a validar el model de nou. D'aquesta manera es promouen discussions entre els membres del grup que enriqueixen, no només el model, sinó el procés de resolució de la tasca.

Els resultats de l'estudi mostren que els alumnes generen els seus propis models matemàtics per a resoldre la situació plantejada emprant conceptes matemàtics que coneixen de la seva experiència anterior, però innovant en la manera de combinar-los per a aconseguir els seus objectius. També observem que els alumnes identifiquen elements matemàtics clau per a donar forma al seu model, encara que no coneguin un procediment eficient per a especificar-lo formalment. D'aquesta manera els alumnes generen models matemàtics propis per a resoldre una situació que requereix de coneixements matemàtics específics (Aymerich, Gorgorió, i Albarracín, 2017). Els elements clau que provoquen aquesta forma de conducta dels alumnes tenen diferent naturalesa. D'una banda es troben els elements propis del disseny de l'activitat, com proporcionar una gran quantitat de dades, referir-se a un concepte ambigu com és el d'una assignació justa d'impostos, que promou les discussions entre els alumnes o crear oportunitats de validar la resposta tenint diferents apartats que promouen la reflexió sobre el model. D'altra banda, identifiquem un element clau en triar el context en el qual fonamentar el treball, proposant una temàtica complexa que clarament és multifactorial i que provoca que no sigui senzill triar mostres representatives per a treballar.

Donada la naturalesa de l'activitat desenvolupada pels alumnes per a aquest estudi, es va decidir que el professor donés un suport bàsic, tractant de no influir en la presa de decisions dels alumnes. Els resultats mostren que un dels grups va desenvolupar un

model matemàtic sense procediments de càlcul específics. D'aquesta manera es posa de manifest que l'activitat, en la forma en la qual es va presentar als alumnes, no força als alumnes a prendre un posicionament analític. La manera d'aconseguir que els alumnes treballin en l'activitat a partir de la modelització matemàtica es pot aconseguir via la gestió d'aula del professor. Una opció és desenvolupar prèviament alguna activitat de menor impacte en el temps disponible per a establir les bases del treball. Una altra possibilitat és monitorar a l'aula el tipus d'activitats que desenvolupen els alumnes i suggerir canvis per a adequar-los als objectius d'aprenentatge proposats. Les recerques futures haurien d'ajudar-nos a decidir si aquests alumnes han començat a desenvolupar coneixements propis sobre el paper de les eines estadístiques en l'estudi de dades. La hipòtesi que guia el nostre treball és que els alumnes no sols hauran après a modelitzar grans quantitats de dades contextualitzades i desenvolupar el seu raonament estadístic general (Wild & Pfannkuchen, 1999), en haver generat els seus propis models han identificat aspectes que defineixen el concepte de variabilitat de dades per a concretar-lo posteriorment de manera significativa amb les eines curriculars pròpies de l'estadística i connectar la seva experiència en aquesta activitat amb aquests coneixements. És especialment rellevant observar que la intrusió en el treball d'altres grups o la intervenció (naïf) de la professora en el desenvolupament de l'activitat no ha donat fruits efectius en el desenvolupament del model generat, però això ha estat en un número molt limitat d'ocasions. S'observa que incorporar un model forani després d'un procés d'interpretació dels conceptes, no ha donat resultat. Aquest fet ens fa pensar que valdria la pena explorar com els estudiants poden acceptar models predefinits per a una tasca com les estudiades.

7.5 Implicacions didàctiques

Els estudis que componen aquesta tesi doctoral utilitzen activitats contextualitzades en les que és necessari que els estudiants analitzin grans quantitats de dades. Les activitats es dissenyen seguint la perspectiva teòrica Models i Modelització (M&M), on el procés de modelització inclou múltiples cicles d'interpretacions, descripcions, conjectures, explicacions i justificacions que es redefeixen i construeixen iterativament a través de la interacció entre els estudiants (Doerr & English, 2003). El fet clau del disseny de les activitats és que el coneixement del context proporcioni idees als alumnes per construir models matemàtics que expliquin els fenòmens implícits que es troben a les dades proporcionades.

En els dos casos s'han utilitzat contextos reals i autèntics (Palm, 2008), com són distribució de sous a una empresa o la distribució d'impostos al territori, que no són part

dels centres d'interès dels estudiants, allunyant-nos de la proposta habitual de treballar sobre aspectes que els motivin per afinitat. En aquests dos casos ens trobem amb contextos reals rellevants per entendre fenòmens complexos i adults. Entenem que aquesta perspectiva és important per al desenvolupament dels estudiants de secundària com a futurs ciutadans. Corroboem la decisió presa al identificar diverses discussions fonamentades entre els estudiants sobre la distribució de sous o impostos durant i després de l'activitat. Al mateix temps, els resultats dels estudis que hem realitzat (Aymerich & Albarracín, 2016; 2021; 2022) mostren que els estudiants desenvolupen models matemàtics que permeten explicar aspectes essencials de fenòmens socials complexos. Per tant, observem que té sentit plantejar aquestes activitats als estudiants.

Atesa la naturalesa de l'activitat desenvolupada pels alumnes per a aquest estudi, es va decidir que la professora donés un suport bàsic intentant no influir en la presa de decisions dels alumnes. Els resultats mostren que un dels grups va desenvolupar un model matemàtic sense procediments de càlcul específics. D'aquesta manera es posa de manifest que l'activitat, en la manera com es va presentar els alumnes, no força els alumnes a prendre un posicionament analític. La manera d'aconseguir que els alumnes treballin a l'activitat a partir de la modelització matemàtica es pot aconseguir via la gestió d'aula del professor. Una opció és desenvolupar prèviament alguna activitat de menor impacte en el temps disponible per establir les bases del treball. Una altra possibilitat és monitoritzar a l'aula el tipus d'activitats que desenvolupen els alumnes i suggerir canvis per adequar-los als objectius proposats.

Finalment, un dels aspectes característics de les activitats utilitzades és proporcionar una gran quantitat de dades. Aquesta idea connecta amb l'ús de l'Estadística en el *Big Data* tot i que no hem tractat de connectar explícitament aquestes dues realitats. Observem que té sentit proporcionar grans quantitats de dades als estudiants per motivar la necessitat de generar models matemàtics dissenyats per a superar la impossibilitat de gestionar tota la informació proporcionada. Al mateix temps, aquestes activitats visibilitzen el tipus de treball que desenvolupen els analistes de dades, necessari en un moment històric en el que les dades són part de la presa de decisions en qualsevol àmbit de la vida.

7.6 **Prospectiva**

Les investigacions futures que es deriven de la recerca presentada en aquesta tesi van en diverses direccions, ja que aquest treball s'ha interessat i ha acabat fent aportacions a diferents nivells.

Per una banda, caldria treballar en definir les característiques que fan que una activitat de modelització basada en l'ús de grans quantitats de dades promou adequadament els desenvolupament de models matemàtics. En aquest sentit, seria interessant definir les connexions amb el *Big Data*, tal i com hem apuntat en l'apartat anterior. També seria interessant crear un banc d'activitats que permetessin implementar activitats de modelització matemàtica basades en l'anàlisi de grans quantitats de dades. Seria interessant definir la quantitat de dades a proporcionar a cada nivell educatiu, diferenciant els cicles inicials i superior de l'Educació Secundària, així com Batxillerat. També seria necessari identificar problemàtiques rellevants de les que existeixin bases de dades que es puguin utilitzar. Un aspecte important seria que aquestes bases de dades s'anessin actualitzant per evitar que la rellevància caduqués. En aquest treball s'han proposat dues activitats amb context econòmic (sous i impostos), però seria interessant explorar altres contextos, com l'emergència climàtica (sequera i dades de reserves d'aigua als embassament) o les desigualtats socials. Els estudiants sovint en aquests àmbits tenen percepcions errònies o esbiaixades de la situació, com assumir com a normal la distribució de sous dins d'una empresa (Garfield i Ben-Zvi, 2008).

Des del punt de vista metodològic, caldria explotar l'ús combinat dels GEM i els MAD per obtenir una eina d'anàlisi combinada que es consolidi com el procediment a seguir per analitzar dades complexes com les recollides en aquest estudi. Les activitats de modelització acostumen a treballar-se en grups petits (Zawojewski et al., 2003) i generen discussions complexes en les apareixen diversos conceptes entrelligats. Una contribució d'aquesta tesi és una proposta de caracterització de models matemàtics generats pels alumnes en termes dels GEM. Entenem que estudiar el desenvolupament de la forma que prenen els models quan els estudiants els generen ha de permetre establir activitats d'aula i formes de gestió de les activitats de modelització que assegurin el desenvolupament de competències de modelització (Maass, 2006) per part dels estudiants.

Aquí hem de destacar una decisió metodològica rellevant en aquest treball respecte a l'ús combinat de MAD+GEM. És cert que els episodis clau identificats sorgeixen de l'anàlisi de les transcripcions de les discussions de l'alumnat. Es podria pensar que localitzant en les transcripcions l'aparició o modificació del model i cercant al voltant, no caldria fer tota la representació gràfica que s'ha fet amb els MAD i GEM combinat. Des del punt de vista de conservar tota la informació i no descontextualitzar-la, disposar de les dues representacions ens han aportat molta informació i una fotografia completa de la forma d'enfrontar-se a la tasca. Aquest treball s'ha realitzat en diferents fases i moments de temps espaiats, i el fet de disposar sempre de la referència gràfica on treballar permetia mantenir la continuïtat i coherència de l'anàlisi.

Una de les premisses que van motivar aquesta tesi és que els estudiants poden desenvolupar models matemàtics propis que serveixin per explicar fenòmens estadístics com la centralitat i la variació. Aquests conceptes van associats a procediments i fórmules molt específics que la comunitat estadística ha definit com els més adequats i que no són fàcils de comprendre sense un estudi profund de la problemàtica. En l'esperit del disseny d'aquest estudi hi ha una visió constructivista en la que considerem que si els estudiants han generat els seus propis models matemàtics hauran generat les idees clau per entendre la centralitat i la variació, i que d'aquesta forma els serà possible desenvolupar una comprensió conceptual més profunda quan se'ls presentin els mètodes estadístics associats. D'aquesta forma, queda pendent explorar si les activitats de modelització matemàtica que hem utilitzat aporten també en aquesta direcció i complementen la docència habitual dels continguts d'Estadística de l'etapa d'Educació Secundària.

Les investigacions futures també haurien d'ajudar-nos a decidir si aquests alumnes han començat a desenvolupar coneixements propis sobre el paper de les eines estadístiques a l'estudi de dades. La hipòtesi que guia el nostre treball és que els alumnes no només hauran après a modelitzar grans quantitats de dades contextualitzades i desenvolupar-ne el raonament estadístic general (Garfield & Ben-Zvi, 2007; Garfield & DelMas, 2010). En haver generat els seus propis models han identificat aspectes que defineixen el concepte de variabilitat de dades per concretar-ho posteriorment de manera significativa amb les eines curriculars pròpies de l'estadística i connectar la seva experiència en aquesta activitat amb aquests coneixements.

Capítol 8

Bibliografia

- Abassian, A., Safi, F., Bush, S., & Bostic, J. (2020). Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education. *Investigations in Mathematics Learning*, 12(1), 53-65.
- Albarracín, L. (2021). Large Number Estimation as a Vehicle to Promote Mathematical Modeling. *Early Childhood Education Journal*, 49(4), 681-691.
- Albarracín, L., Arleback, J., Civil, E., & Gorgorió, N. (2019). Extending modelling activity diagrams as a tool to characterise mathematical modelling processes. *The Mathematics Enthusiast*, 16(1), 211– 230.
- Albarracín, L., Aymerich, À., & Gorgorió, N. (2017). An open task to promote students to create statistical concepts through modelling. *Teaching Statistics*, 39(3), 100-105.
- Albarracín, L., Ferrando, I., & Gorgorió, N. (2021). The Role of Context for Characterising Students' Strategies when Estimating Large Numbers of Elements on a Surface. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19(6), 1209-1227.
- Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2014). Devising a plan to solve fermi problems involving large numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 86(1), 79-96.
- Albarracín, L. & Gorgorió, N. (2018). Students estimating large quantities: From simple strategies to the population density model. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(10), 1–15.
- Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2019). Using Large Number Estimation Problems in Primary Education Classrooms to Introduce Mathematical Modelling. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education*, 27(2), 45-57.

- Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2020). Mathematical Modeling Projects Oriented towards Social Impact as Generators of Learning Opportunities: A Case Study. *Mathematics*, 8(11), 1-20. doi.org/10.3390/math8112034
- Albarracín, L., Hernández-Sabaté, A., & Gorgorió, N. (2021). Designing levels of a video game to promote spatial thinking. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(11), 3138-3150.
- Albarracín, L., Segura, C., Ferrando, I., & Gorgorió, N. (2022). Supporting mathematical modelling by upscaling real context in a sequence of tasks. *Teaching Mathematics and its Applications*, 41(3), 183-197.
- Ärleböck, J. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Mathematics Enthusiast*, 6(3), 331-364.
- Aymerich, À., & Albarracín, L. (2016). Complejidad en el proceso de modelización de una tarea estadística. *Modelling in Science Education and Learning*, 9(1), 5-24.
- Aymerich, À., & Albarracín, L. (2021). Modelización matemática en actividades estadísticas: identificando elementos clave del diseño para promover la generación de modelos en el estudio de la variabilidad. *Quadrante*, 30(2), 179-199.
- Aymerich, À., & Albarracín, L. (2022). Modelización matemática en actividades estadísticas: Episodios clave para la generación de modelos. *Uniciencia*, 36(1), 1-18.
- Aymerich, À., & Albarracín, L. (2023). Combinando herramientas de análisis para caracterizar modelos matemáticos en tareas estadísticas. *Actas del I CIDIDMAT* (119-128). Universidad de los Lagos.
- Aymerich, À., Gorgorió, N., & Albarracín, L. (2017). Modelling with Statistical Data: Characterisation of Student Models. Dins G. A. Stillman, W. Blum & G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications* (pp. 37-47). Springer.
- Barbosa, J. C. (2009). Modelagem e modelos matematicos na educaçao cientifica. *Alexandria: Revista de Educaçao em Ciencia e Tecnologia*, 2(2), 69-85.
- Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Johnson, S., Perez, L., Spangler, D. A., & Gould, R. (2020). *Pre-K-12 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education II (GAISE II)*. American Statistical Association and National Council of Teachers of Mathematics.
- Batanero, C. (2002). Estadística y didáctica de la matemática: Relaciones, problemas y aportaciones mutuas. Dins M. C. Penalva, G. Torregrosa & J. valls (Eds.), *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 95-120). Universitat d'Alacant.

- Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. D., & Green, D. R. (1996). Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 151–169.
- Ben-Zvi, D. (2004). Reasoning about variability in comparing distributions. *Statistics Education Research Journal*, 3(2), 42–63.
- Ben-Zvi, D., & Arcavi, A. (2001). Junior high school students' construction of global views of data and data representations. *Educational Studies in Mathematics*, 45(1), 35–65.
- Ben-Zvi, D., & Sharett-Amir, Y. (2005). How do primary school students begin to reason about distributions. Dins *Reasoning about distribution: A collection of current research studies. Proceedings of the fourth international research forum on statistical reasoning, thinking, and literacy (SRTL-4)*, (pp. 2-7). University of Auckland.
- Brunet-Biarnes, M., & Albarracín, L. (2024). Exploring the negotiation processes when developing a mathematical model to solve a Fermi problem in groups. *Mathematics Education Research Journal*, 36(1), 177–198.
- Blomhøj, M., & Højgaard, T. J. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications*, 22(3), 123–139.
- Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education—Discussion document. *Educational Studies in Mathematics*, 51(1), 149–171.
- Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do?. Dins *Proceedings of the 12th international congress on mathematical education* (pp. 73-96). Springer.
- Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt?. *Journal of mathematical modelling and application*, 1(1), 45–58.
- Blum, W., & Leiss, D. (2006). How do students and teachers deal with modeling problems? Dins C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical Modeling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics* (pp. 222–231). Horwood Publishing.
- Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 37–68.
- Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 86–95.

- Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer International Publishing.
- Borromeo Ferri, R. (2021). Mandatory Mathematical Modelling in School: What Do We Want the Teachers to Know?. Dins F. K. S. Leung, G. Stillman, G. Kaiser & K. L. Wong, *Mathematical Modelling Education in East and West* (pp. 103-117). Springer.
- Burkhardt, H. (2006). Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past developments and the future. *ZDM Mathematics education*, 38(2), 178–195.
- Burrill, G. & Biehler, R. (2011). Fundamental Statistical Ideas in the School Curriculum and in Training Teachers. Dins C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics - Challenges for teaching and teacher education* (pp. 57–70). Springer.
- Carreira, S., Amado, N., & Lecoq, F. (2011). Mathematical modeling of daily life in adult education: Focusing on the notion of knowledge. Dins G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modeling* (pp. 199-210). Springer.
- CCSSI. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. National Governors Association for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.
- Clohessy, E., & Johnson, P. (2017). Examining the Role of GroupWork as an Effective Instructional Strategy When Teaching Problem Solving. Dins T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *European research in mathematics: Proceedings of the tenth congress of the european society for research in mathematics education* (pp. 924–931). ERME.
- Chan, E. C. M. (2008). Using model-eliciting activities for primary mathematics classrooms. *The Mathematics Educator*, 11(1), 47–66.
- Chamberlin, S. A. & Moon, S. M. (2005). Model-eliciting activities as a tool to develop and identify creatively gifted mathematicians. *Journal of Secondary Gifted Education*, 17(1), 37–47.
- Cobb, G. W., & Moore, D. S. (1997). Mathematics, statistics, and teaching. *The American mathematical monthly*, 104(9), 801-823.
- Crites, T., & Laurent, R. T. (2015). *Putting essential understanding of statistics into practice, Grades 9-12*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Czocher, J. A. (2016). Introducing modeling transition diagrams as a tool to connect mathematical modeling to mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 18(2), 77-106.

- Czocher, J. A. (2017). Mathematical modeling cycles as a task design heuristic. *The Mathematics Enthusiast* 14(1-3), 129-140.
- Dani, B. Z., & Joan, G. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: Goals, definitions, and challenges. Dins *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 3-15). Springer.
- Doerr, H. M., & English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(2), 110-136.
- Doerr, H. M., & Tripp, J. S. (1999). Understanding how students develop mathematical models. *Mathematical Thinking and Learning*, 1, 231-254.
- Doruk, B. K. (2019). Analysis of fifth grade mathematics practices course teaching material activities based on model-eliciting design principles. *Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science & Mathematics Education*, 13(2), 879-908.
- Dvir, M., & Ben-Zvi, D. (2018). The role of model comparison in young learners' reasoning with statistical models and modeling. *ZDM*, 50(7), 1183-1196.
- English, L. D. (2006). Mathematical modeling in the primary school: Children's construction of a consumer guide. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 303-323.
- Ferrando, I., & Albarracín, L. (2021). Students from grade 2 to grade 10 solving a Fermi problem: analysis of emerging models. *Mathematics Education Research Journal* 33(1), 61-78.
- Font, V., Breda, A., Sala-Sebastià, G., & Pino-Fan, L. R. (2024). Future teachers' reflections on mathematical errors made in their teaching practice. *ZDM-Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01574-y>
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D. S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. & Schaeffer, R. (2005). *A Curriculum Framework for PREK-12 Statistics Education*.
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report*.
- Frejd, P., & Geiger, V. (2017). Exploring the notion of mathematical literacy in curricula documents. Dins G. Stillman, W. Blum & G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications* (pp. 255-263). Springer.
- Friel, S. N., Curcio, F. R., & Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education*, 32(2), 124-158.

- Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International statistical review*, 70(1), 1-25.
- Gal, I. (2003). Teaching for statistical literacy and services of statistics agencies. *The American Statistician*, 57(2), 80-84.
- Gal, I. (2004). Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities. Dins D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (p. 47). Springer Science+Business Media.
- Galbraith, P. (2007). Dreaming a "possible dream": More windmills to conquer. Dins C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics* (pp. 44-62). Horwood Publishing.
- Galbraith, P., & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modeling process. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 143-162.
- Galbraith, P., Stillman, G., & Brown, J. (2010). Turning ideas into modeling problems. Dins R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines, & A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies: ICTMA 13* (pp. 133-144). Springer.
- Galbraith, P., Stillman, G., Brown, J., & Edwards, I. (2007). Facilitating Middle Secondary Modelling Competencies. Dins C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics: Proceedings from the twelfth International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications* (pp. 130-140). Horwood.
- Gallart, C., Ferrando, I., García-Raffi, L. M., Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2017). Design and Implementation of a Tool for Analysing Student Products When They Solve Fermi Problems. Dins G. A. Stillman, W. Blum & G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications* (pp. 265-275). Springer.
- Garfield, J. B., & Gal, I. (1999). Assessment and statistics education: Current challenges and directions. *Revue Internationale de Statistique [International Statistical Review]*, 67(1), 1-12.
- Garfield, J. (2002). The challenge of developing statistical reasoning. *Journal of statistics education*, 10(3).
- Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2007). How students learn statistics revisited: A current review of research on teaching and learning statistics. *International statistical review*, 75(3), 372-396.
- Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. Springer Science+Business Media.

- Garfield, J., & DelMas, R. (2010). A web site that provides resources for assessing students' statistical literacy, reasoning and thinking. *Teaching Statistics*, 32(1), 2-7.
- Garfunkel, S., Niss, M., & Brown, J. P. (2021). Opportunities for modelling: An extra-curricular challenge. Dins *Mathematical modelling education in east and west* (pp. 363-375). Springer International Publishing.
- Gould, R. (2004). Variability: One statistician's view. *Statistics Education Research Journal*, 3(2), 7-16.
- Gould, R., Bargagliotti, A., Johnson, T. (2017). An analysis of secondary teachers' reasoning with participatory sensing data. *Statistics Education Research Journal*, 16(2), 305-334.
- Greefrath, G. (2011). Using technologies: New possibilities of teaching and learning modeling – Overview. Dins G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modeling* (pp. 301-304). Springer.
- Greefrath, G., & Vorhölter, K. (2016). *Teaching and learning mathematical modelling: Approaches and developments from German speaking countries*. Springer.
- Guimaraes, A. (2016). *Examining the relationship between statistical literacy and statistical reasoning*. Tesi doctoral. University of Minnesota.
- Hernández-Sabaté, A., Albarracín, L., & Sánchez, F. J. (2020). Graph-Based Problem Explorer: A Software Tool to Support Algorithm Design Learning While Solving the Salesperson Problem. *Mathematics*, 8(9), 1-20. <https://doi.org/10.3390/math8091595>
- Hestenes, D. (2013). Modeling theory for math and science education. Dins R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines, & A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies: ICTMA 13* (pp. 13-41). Dordrecht: Springer Netherlands.
- Ikeda, T., & Stephens, M. (2001). The effects of students' discussion in mathematical modelling. Dins J. F. Matos, W. Blum, K. Houston, & S. P. Carreira (Eds.), *Modelling and mathematics education: Applications in science and technology* (pp. 381-390). Horwood.
- Kaiser, G. (2007). Modelling and Modelling Competencies in School. Dins C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics: Proceedings from the twelfth International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications* (pp. 110-119). Horwood.

- Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM–The International Journal on Mathematics Education*, 38(3), 302-310.
- Kaiser, G., & Stender, P. (2013). Complex modelling problems in co-operative, self-directed learning environments. Dins G. A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, & J. Brown (Eds.), *Teaching mathematical modeling: Connecting to research and practice. International perspectives on the teaching and learning of mathematical modeling* (pp. 277-293). Springer.
- Kula Unver, S., Hidiroglu, C. N., Tekin Dede, A., & Bukova Guzel, E. (2018). Factors revealed while posing mathematical modelling problems by Mathematics student teachers. *European Journal of Educational Research*, 7(4), 941-952.
- Lehrer, R., & Schauble, L. (2000). Inventing data structures for representational purposes: Elementary grade students' classification models. *Mathematical Thinking and Learning*, 2, 51–74.
- Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Origins and evolution of model-based reasoning in mathematics and science. Dins R. Lesh, & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 59-70). Routledge.
- Lesh, R. (2010). Tools, researchable issues & conjectures for investigating what it means to understand statistics (or other topics) meaningfully. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(2), 16-48.
- Lesh, R., Amit, M., & Schorr, R. Y. (1997). Using “real-life” problems to prompt students to construct conceptual models for statistical reasoning. Dins I. Gal & J. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education*, (65-83). IOS Press.
- Lesh, R. & Caylor, B. (2007). Introduction to special issue: Modeling as application versus modeling as a way to create mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 12(3), 173–194.
- Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T., & Zawojewski, J. S. (2003). Model development sequences. Dins R. Lesh, & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 35–58). Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. Dins R. Lesh, & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3–33). Lawrence Erlbaum Associates.

- Lesh, R., & Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(2-3), 157-189.
- Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for developing thought revealing activities for students and teachers. Dins A. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 591-646). Lawrence Erlbaum.
- Lesh, R., & Lehrer, R. (2003). Models and modeling perspectives on the development of students and teachers. *Mathematical thinking and learning*, 5(2-3), 109-129.
- Levitt, S. D., & Dubner, S. J. (2005). *Freakonomics: A rogue economist explores the hidden side of everything* (Vol. 61). William Morrow.
- López, M., Albarracín, L. Ferrando, I., Montejo-Gámez, J., Ramos, P., Serradó, A., Thibaut, E. & Mallavibarrena, R. (2020). La educación matemática en las enseñanzas obligatorias y el Bachillerato. Dins *Libro Blanco de las Matemáticas* (pp. 1-94). Real Sociedad Matemática Española.
- Maaß, K. (2005). Barriers and opportunities for the integration of modelling in mathematics classes: Results of an empirical study. *Teaching Mathematics and its Applications*, 2(3), 61–74.
- Maaß, K. (2006). What are modelling competencies?. *ZDM Mathematics Education*, 38, 113-142.
- Macho, M., Padrón, E., Calaza, L., Casanellas, M., Conde, M. Lorenzo, E., & Vázquez, M. E. (2020). Igualdad de género en el ámbito de las Matemáticas. Dins *Libro blanco de las matemáticas* (pp. 375-420). Real Sociedad Matemática Española.
- Makar, K. & Confrey, J. (2005). “variation-talk”: Articulating meaning in statistics. *Statistics education research journal*, 4(1), 27–54.
- Mackay, R. J., & Oldford, W. (1994). *Stat 231 Course Notes Fall 1994*.
- Minsky, M. (1965). *Matter, mind and models*. MIT.
- Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E., & Adamuz-Povedano, N. (2021). A tool for the analysis and characterization of school mathematical models. *Mathematics*, 9(13), 1569.
- Moore, D. S. (1997). New pedagogy and new content: The case of statistics. *International statistical review*, 65(2), 123-137.
- Mousoulides, N., Sriraman, B., & Christou, C. (2007). From problem solving to modelling. *Education*, 12(1), 23-47.

- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The danish KOM project. Dins A. Gagatsis & S. Papastavridis (Eds.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education* (pp. 116–124). The Hellenic Mathematical Society.
- Niss, M. (2012). Models and modelling in mathematics education. *EMS Newsletter*, 86, 49-52.
- Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction. Dins W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 3–32). Springer.
- OECD. (2009). *PISA 2015 draft mathematics framework*. OECD Publishing.
- Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1), 37-58.
- Pfannkuch, M. & Reading, C. E. (2006). Reasoning about distribution: A complex process. *Statistics Education Research Journal*, 5(2), 4-9.
- Pfannkuch, M., & Wild, C. J. (2000). Statistical Thinking an Statistical Practice: Themes Gleaned from Professional Statisticians. *Statistical science*, 15(2), 132-152.
- Pfannkuch, M. & Wild, C. (2004). Towards and Understanding of Statistical Thinking. Dins D. Ben-Zvi i J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 17–46). Springer Science+Business Media.
- Pla-Castells, M., & García-Fernández, I. (2020). TaskTimeTracker: A tool for temporal analysis of the problem solving process. *Investigación en Entornos Tecnológicos en Educación Matemática*, 1.
- Pla-Castells, M., Melchor, C., & Chaparro, G. (2021). MAD+. Introducing misconceptions in the temporal analysis of the mathematical modelling process of a Fermi problem. *Education Sciences*, 11(11), 747.
- Plath, J., & Leiss, D. (2018). The impact of linguistic complexity on the solution of mathematical modelling tasks. *ZDM*, 50(1–2), 159–171.
- Pollak, H. O. (1969). How can we teach application of mathematics? *Educational Studies in Mathematics*, 2, 393–404.

- Pollak, H.O. (1979). The interaction between mathematics and other school subjects. Dins *New Trends in Mathematics Teaching, Volume IV* (pp. 232–248). UNESCO: Paris, France.
- Ramírez-Montes, G., Carreira, S., & Henriques, A. (2021). Mathematical modelling routes supported by technology in the learning of linear algebra: A study with Costa Rican undergraduate students. *Quadrante*, 30(1), 219-241.
- Rumsey, D. J. (2002). Statistical literacy as a goal for introductory statistics courses. *Journal of statistics education*, 10(3).
- Saka, E. & Alkan, S. (2022). Examining the secondary school mathematics practices course books in Turkey according to the principles of the model eliciting activity design. *International Journal of Curriculum and Instruction* 14(1), 523–542.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.
- Segura, C., Ferrando, I., & Albarracín, L. (2023). Does collaborative and experiential work influence the solution of real-context estimation problems? A study with prospective teachers. *Journal of Mathematical Behavior*, 70.
- Schaap, S., Vos, P., & Goedhart, M. (2011). Students overcoming blockages while building a mathematical model: Exploring a framework. Dins G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (Vol. 1, pp. 137–146). Springer.
- Schukajlow, S., Kaiser, G., & Stillman, G. (2018). Empirical research on teaching and learning of mathematical modelling: a survey on the current state-of-the-art. *ZDM Mathematics Education*, 50(1), 5-18.
- Schukajlow, S., Leiss, D., Pekrun, R., Blum, W., Müller, M., & Messner, R. (2012). Teaching methods for modelling problems and students' task-specific enjoyment, value, interest and selfefficacy expectations. *Educational Studies in Mathematics*, 79(2), 215–237.
- Schild, M. (1999). Statistical literacy: Thinking critically about statistics. *Of Significance*, 1(1), 15–20.
- Snee, R. D. (1990). Statistical thinking and its contribution to total quality. *The American statistician*, 44(2), 116.
- Snell, L. (1999). Using chance media to promote statistical literacy. Dins *Joint Statistical Meetings*. ASA.
- Sol, M., Gimenez, J., & Rosich, N. (2011). Trayectorias modelizadoras en la ESO. *Modelling in Science Education and Learning*, 4, 329-343.

- Stillman, G. (2011). Applying metacognitive knowledge and strategies in applications and modelling tasks at secondary school. Dins G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 165–180). Springer.
- Stillman, G. A., Brown, J. P., & Galbraith, P. (2013). Challenges in modelling challenges: Intents and purposes. Dins G. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, & J. P. Brown (Eds.), *Teaching mathematical modelling: connecting to research and practice* (pp. 217–227). Springer.
- Stohlmann, M. S., & Albarracín, L. (2016). What is known about elementary grades mathematical modelling. *Education Research International*, 2016. Article ID 5240683.
- Tauber, L. M., Cravero, M., & Redondo, Y. (2013). Evaluación de errores de profesores de matemática en tareas de alfabetización estadística y de razonamiento estadístico. *Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística*, 2, 273-283.
- Ubilla, F. (2019). Componentes del sentido estadístico identificados en un ciclo de investigación estadística desarrollado por futuras maestras de primaria. Dins J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano, & Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 583-592). SEIEM.
- Ubilla, F. (2020). ¿Qué rol juegan los datos en el ciclo de investigación estadística? *UNO*, 91, 63-68.
- Velten, K. (2009). *Mathematical modeling and simulation: introduction for scientists and engineers*. John Wiley & Sons.
- Vorhölter, K., Kaiser, G. & Borromeo Ferri, R. (2014). Modelling in Mathematics Classroom Instruction: An Innovative Approach for Transforming Mathematics Education. Dins Y. Li, E. Silver & S. Li (Eds.), *Transforming Mathematics Instruction* (pp. 21–36). Springer Cham.
- Watson, J. (1997). Assessing statistical literacy through the use of media surveys. Dins I. Gal & J. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 107–121). International Statistical Institute, IOS Press.
- Watson, J. M. (2003). Statistical literacy at the school level: What should students know and do. *The Bulletin of The International Statistical Institute, Berlin*, 54, 1-4.
- Watson, J. M. (2006). Issues for statistical literacy in the middle school. Dins *ICOTS-7 Conference Proceedings*. IASE.
- Watson, J. M. (2011). Foundations for improving statistical literacy. *Statistical Journal of the IAOS*, 27(3-4), 197-204.

- Watson, J., & Callingham, R. (2003). Statistical literacy: A complex hierarchical construct. *Statistics Education Research Journal*, 2(2), 3-46.
- Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International statistical review*, 67(3), 223-248.
- Zawojewski, J. S., Lesh, R., & English, L. (2003). A models and modeling perspective on the role of small group learning activities. Dins R. A. Lesh, & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 337–358). Lawrence Erlbaum.