ATAS DO XXVII SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Editores
Maria Helena Martinho
Rosa Antónia Tomás Ferreira
Isabel Vale
Henrique Guimarães

APM
Associação de Professores de Matemática

Porto 2016

Ficha técnica

Título
Atas do XXVII Seminário de investigação em educação matemática

Editores
Maria Helena Martinho
Rosa Antónia Tomás Ferreira
Isabel Vale
Henrique Guimarães

Capa
Catarina Barbosa

ISBN
978-972-8768-63-8

Associação de Professores de Matemática

Porto, julho 2016

Índice

Introdução

O XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática (SIEM), organizado pelo Grupo de Trabalho de Investigação (GTI) da Associação de Professores de Matemática, decorreu nos dias 1 e 2 de abril de 2016, na Escola Artística Soares dos Reis, no Porto. O SIEM tem como principal missão promover um espaço de divulgação, partilha e discussão de ideias e de trabalhos, desenvolvidos ou em curso, do âmbito da investigação em Educação Matemática. Tal como tem sido hábito nos últimos anos, e uma vez que o SIEM pretende também continuar a fortalecer uma ligação forte entre a investigação e o ensino da Matemática, o programa deste seminário contemplou partes comuns com o programa do ProfMat 2016 (Encontro Nacional de Professores de Matemática), além de sessões dinamizadas por professores e investigadores.

O programa do SIEM incluiu a apresentação e discussão de comunicações submetidas pelos participantes (orais e em poster), organizadas por simpósio temáticos. Estas comunicações passaram por um processo de revisão científica por pares, processo este que se tem vindo a implementar com vista à melhoria da qualidade dos trabalhos apresentados. O SIEM incluiu também sessões plenárias convidadas, conferências e pain, para além de um espaço dedicado ao trabalho desenvolvido no seio do GTI.

A primeira conferência plenária proferida por João Pedro da Ponte, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, intitulou-se "O que nos diz a investigação em Didática da Matemática?". Na sua intervenção, João Pedro da Ponte abordou alguns contributos da Didática da Matemática, como campo recente de investigação para projetos e investigações nacionais, focando, em particular, as práticas profissionais dos professores de Matemática e os seus processos de formação e desenvolvimento profissional. Mequè Edo, da Faculdade de Ciências da Educação da Universidade Autónoma de Barcelona, proferiu a segunda conferência plenária: "A Educação Matemática de hoje pensando em amanhã". Nesta conferência, a investigadora, tomando como ponto de partida as competências exigidas aos cidadãos do século XXI, discutiu formas de promover a autonomia e o envolvimento dos alunos nas suas aprendizagens matemáticas, sobretudo ao nível dos primeiros anos. A terceira conferência plenária, sob o título "Criatividade e Ensino Superior: Do olhar atual dos alunos até desafios futuros", foi proferida por Maria de Fátima Morais, do Instituto de Educação da Universidade do Minho, focando-se na temática da criatividade no ensino superior. Na sua intervenção, a investigadora debruçou-se sobre as perceções dos alunos do ensino superior sobre o conceito e o valor da criatividade, bem como sobre a presença da criatividade nas práticas docentes que vivenciam nos seus cursos, realçando a necessidade de maior atenção a esta temática na investigação em Educação Matemática.

Este ano, o espaço GTI foi dedicado à partilha de alguns trabalhos inseridos no seu 5^o ciclo de estudos, sob a temática da planificação e condução de discussões coletivas como elementos relevantes da prática dos professores de Matemática. Com a moderação de Hélia Pinto, coordenadora do GTI, intervieram neste espaço Nádia Ferreira, Renata Carvalho e Raquel Santos.

O painel plenário, moderado por Ana Paula Canavarro (Departamento de Pedagogia e Educação da Universidade de Évora), foi subordinado ao tema "Do currículo prescrito ao currículo aprendido: Papel e importância do professor". Participaram neste momento do programa do SIEM Adelina Precatado (Escola Secundária de Camões, Lisboa), Domingos Fernandes (Instituto de Educação da Universidade de Lisboa), Joana Brocardo (Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal) e Maria do Céu Roldão (Faculdade de Educação e Psicologia da Universidade Católica Portuguesa, Porto). Foram aceites vinte e oito comunicações orais, organizadas em oito simpósios por afinidades temáticas: 1) História do ensino e epistemologia; 2) Desafios na sala de aula; 3) Ensino e aprendizagem da álgebra; 4) Comunicação no ensino e aprendizagem; 5) Questões de aprendizagem; 6) Contextos não formais de aprendizagem; 7) Ensino e aprendizagem dos números; e 8) Conhecimento e praticas do professor. O SIEM contou ainda com onze pósteres que foram exibidos durante a realização de todo o evento, tendo também um espaço temporal consagrado à interação entre os respetivos autores e os participantes no encontro. O XXVII SIEM contou com a participação de cerca de uma centena de pessoas com uma assinalável presença de investigadores estrangeiros, principalmente brasileiros.

Porto, julho de 2016

A Comssão Organizadora

Maria Helena Martinho
Rosa Antónia Tomás Ferreira
Isabel Vale
Henrique Guimarães

Conferências Plenárias

O que nos diz a Investigação em Didática da Matemática?

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, *jpponte@ie.ulisboa.pt*

Resumo. *A investigação em Didática da Matemática é um campo científico relativamente recente, que se apoia em teorias e metodologias de outros campos das ciências sociais e humanas, mas com os seus problemas próprios, que resultam do seu objeto de estudo – o ensino-aprendizagem da Matemática e a formação dos respetivos professores. As suas questões assumem em cada país especificidades próprias, mas muitos conceitos e modelos desenvolvidos internacionalmente têm grande relevância para Portugal. Esta conferência revisita contributos fundamentais da investigação neste campo, cruzando ideias de autores internacionais com projetos e realizações portuguesas. Abordo também o modo como estes contributos influenciam no nosso país as práticas profissionais dos professores e os seus processos de formação e desenvolvimento profissional. Finalmente, procuro discutir o modo como pode evoluir a relação entre a investigação e o ensino, para que os professores se sintam mais capacitados na sua atividade profissional e, em conjunto com os investigadores (muitos dos quais são também professores ou formadores de professores) tenham mais condições para gerar conhecimento relevante e robusto para a melhoria do ensino da Matemática para todos os alunos.*

Palavras-chave: *didática da matemática; currículo; tarefas; abordagem exploratória; desenvolvimento profissional.*

Abstract. *Research in Didactics of Mathematics is a relatively new scientific field, based on theories and methodologies of other fields of social and human sciences, but with its own problems, as a result of its object of study – the teaching and learning of mathematics and the education of their teachers. In each country its questions take on a specific nature, but many concepts and models developed internationally have great relevance for Portugal. This conference revisits fundamental contributions of research for this field, crossing ideas of international authors with projects and achievements from Portugal. I also discuss how these contributions influenced the professional practices of teachers in our country and their education and professional development processes. Finally, I seek to discuss how the relationship between research and teaching may evolve, so that teachers feel more empowered in their professional activity and, together with researchers (many of whom are also teachers or teacher educators) have more conditions to generate relevant and robust knowledge for the improvement of the teaching of mathematics for all students.*

Keywords: *didactics of mathematics; curriculum; tasks; inquiry-based approach; professional development.*

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Vale, I., & Guimarães, H. (Eds.) (2016).
Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática. Porto: APM, pp. 7–21

Introdução

Esta conferência pretende dar a conhecer os contributos da investigação em Didática da Matemática[1]. Apresento, e não poderia ser de outro modo, um ponto de vista pessoal e subjetivo. Procuro dar uma panorâmica geral do que se faz em Didática da Matemática, com referência a trabalhos realizados noutros países e em Portugal, centrando-me em aspetos que considero particularmente relevantes. Procuro mostrar que muito já foi feito, mas muito mais está ainda por fazer – e para isso será necessário o concurso de novas gerações de investigadores, para quem eu espero que esta conferência possa constituir um fator de estímulo. Começo com uma apresentação geral da Didática da Matemática como campo de investigação, após o que abordo as questões curriculares, as questões relativas à aprendizagem dos alunos e ao conhecimento, práticas e desenvolvimento profissional do professor. Por fim, proponho-me abordar o modo como pode evoluir a relação entre a investigação e o ensino de modo que os resultados alcançados possam ser mobilizados da forma mais produtiva possível, ao serviço da melhoria da aprendizagens e da formação dos professores.

O que é a investigação em Didática da Matemática?

Embora desde há muito existam trabalhos e reflexões sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática, como campo de investigação, a Didática da Matemática apenas emergiu no final do século XX. Como acontece com todo o campo de investigação, os seus congressos e publicações científicas constituem elementos identitários centrais. O Quadro 1 dá-nos um panorama das áreas de investigação presentemente mais ativas a nível europeu, tal como se evidenciam nos grupos de trabalho do CERME (*European Congress of Research in Mathematics Education*). Estão assinaladas as áreas (10 de um total de 20) onde considero existir uma atividade mais intensa em Portugal, em grupos de investigação ativos em várias Universidade e Escolas Superiores de Educação. Verificamos que a maior parte dos estudos se centram na aprendizagem de temas/tópicos curriculares específicos e também na diversidade dos alunos e dos fatores (sociais e afetivos) que influenciam esta aprendizagem. Uma atenção também muito significativa é dada ao conhecimento e identidade profissional dos professores, suas práticas e processos de desenvolvimento profissional.

Quadro 1. Grandes temáticas e áreas específicas de investigação em Didática da Matemática.

Grandes temáticas	Grupos de trabalho (TSG) do CERME (2015)
Aprendizagem de temas curriculares e capacidades transversais	1. Arithmetic and number systems 2. Algebraic thinking 3. Geometrical thinking 4. Probability and statistics education 5. Argumentation and proof 6. Applications and modelling
Diversidade dos alunos e fatores que influenciam a aprendizagem	7. Mathematical potential, creativity and talent 8. Affect and mathematical thinking 9. Mathematics and language 10. Diversity and mathematics education: Social, cultural and political challenges 11. Early years mathematics 12. University mathematics education
Questões curriculares, incluindo o uso de tecnologias	13. History in Mathematics Education 14. Teaching mathematics with resources and technology 15. Student's learning mathematics with resources and technology
Formação de professores, identidade e prática docente	16. Mathematics teacher education and professional development 17. Mathematics teacher and classroom practices 18. Mathematics teacher knowledge, beliefs and identity
Questões epistemológicas e teóricas	19. Comparative studies in mathematics education 20. Theoretical perspectives and approaches in mathematics education research

Questões curriculares

Os programas (ou currículos)[2] de Matemática têm estado em permanente evolução (Almeida & Matos, 2014). Em grande medida, a Didática da Matemática como campo científico nasce de um importante movimento curricular, o movimento da Matemática Moderna dos anos de 1960-1970, cuja base era um conjunto de ideias interessantes (valorizar os aspetos estruturais da Matemática, bem como o seu caráter unificado), mas também algumas ideias muitíssimo problemáticas (a ênfase na abstração e no simbolismo). Ultrapassado o entusiasmo inicial, os professores universitários e de outros níveis de ensino envolvidos neste movimento começaram a perceber que era precisa uma abordagem metodológica diferente, onde, além da “intuição pedagógica” e das “boas ideias”, existisse igualmente um processo de trabalho científico – a formulação de questões suscetíveis de estudo empírico, a formulação de planos de investigação rigorosos e sistemáticos, uma análise de dados aprofundada e cuidadosa e a divulgação dos trabalhos realizados em revistas científicas sujeitas a um sistema de revisão por pares. Assim nasceram aquelas que são hoje as revistas mais prestigiadas deste campo, o *Educational Studies in Mathematics*, fundada por Hans Freudenthal em

1968, e o *Journal for Research in Mathematics Education*, fundado em 1970 pelo NCTM, sendo seu primeiro editor David Johnson.

Ao falarmos de currículos e programas temos necessariamente de distinguir entre diversos níveis: o currículo oficial (o programa), o currículo disponibilizado nos manuais e outros materiais, o currículo interpretado pelos professores, o currículo implementado na sala de aula, o currículo aprendido pelos alunos e o currículo avaliado. Existe sempre alguma relação entre estes níveis, mas muitas vezes verificam-se fenómenos de grande divergência que é interessante estudar. Têm existido muitos trabalhos de investigação sobre questões curriculares relativas à disciplina de Matemática (passados em revista, por exemplo, em Stein, Remillard & Smith, 2007). Existe hoje um consenso geral que não há um currículo definitivamente melhor do que todos os outros – um currículo é sempre um documento de compromisso, em que se procura melhorar em relação aos documentos existentes, tendo em vista especificar de forma mais precisa as aprendizagens visadas para os alunos e as orientações importantes para os professores (e outros atores educativos). O currículo adequado para cada país é necessariamente local, evolui no tempo e varia com a sua história e as suas tradições. Nos países que trabalham melhor em termos curriculares, os currículos são revistos periodicamente, na base de processos de avaliação. Muitas vezes, os currículos são modificados "por partes" (por exemplo, o tema de Estatística no 1.º ciclo ou o tema de Geometria no 3.º ciclo).

Os documentos curriculares que conhecemos melhor são o NCTM (2000), a que se seguiu o NCTM (2006) e o NCTM (2009). Mas também existem documentos de natureza curricular muito interessantes na Austrália e em muitos outros países. Mais do que gerar um "currículo ótimo", que não existe, o que se tem aprendido diz respeito sobretudo ao modo de elaborar e aperfeiçoar "currículos razoáveis", e isso envolve não só um trabalho de desenvolvimento de novos programas e de novos materiais curriculares mas também a sua avaliação e experimentação.

Em Portugal temos dois momentos marcantes em termos de desenvolvimento curricular. Um deles é o projeto MAT_{789}, dirigido por Paulo Abrantes (1994), onde se enfatizava o trabalho de grupo, o trabalho de projeto e a relação da Matemática com a realidade. O outro momento é a elaboração e disseminação do *Programa de Matemática do Ensino Básico* (Ministério da Educação, 2007) onde foi possível incluir muitas ideias e resultados de investigação em campos importantes como a aprendizagem dos Números e operações (tendo por base a perspetiva de sentido de número de McIntosh, Reys & Reys, 1992), da Álgebra (com base na noção de raciocínio algébrico de Carpenter, Franke & Levi, 2003; Kaput, 2008), da Geometria (com base nas noções de sentido espacial e visualização de Clements, 2003; Battista, 2007), da Estatística (com base nas noções de literacia e organização e tratamento de dados de Franklin et al., 2005), bem como relativamente ao desenvolvimento de capacidades transversais (NCTM, 2000) com relevo para a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação matemáticos.

Tarefas

Dentro da grande variedade de questões estudadas pela Didática da Matemática sobre a aprendizagem dos alunos destacarei em primeiro lugar o papel das tarefas, dada a importância que têm merecido não só no plano internacional mas também entre nós, nomeadamente no trabalho realizado por dois projetos de grande alcance, o *Projeto Sentido de Número* (ver Brocardo, Serrazina & Rocha, 2008) e o *Projeto P3M Práticas Profissionais do Professor de Matemática* (ver Ponte, 2014).

A grande importância que as tarefas assumem na aprendizagem tem a ver com a atividade que estas tarefas podem originar. Na verdade, o que os alunos aprendem na aula de Matemática resulta principalmente da atividade que realizam e da reflexão que efetuam sobre essa atividade (Christiansen & Walther, 1986). Por isso, é fundamental escolher tarefas apropriadas, que possam servir de base a uma atividade matemática rica e multifacetada por parte dos alunos, bem como encontrar oportunidades para reflexão sobre o trabalho realizado. A introdução da noção de "tarefa" no vocabulário profissional dos professores de Matemática representa um contributo fundamental da investigação em Didática da Matemática. Ainda não há muitos anos falava-se em "exercícios" e ocasionalmente em "problemas". As tarefas incluem os exercícios e os problemas mas compreendem igualmente outras situações que podem servir de ponto de partida para a aprendizagem. A noção de tarefa esteve no centro do encontro *ICMI Study 22*, dedicado a este tema, realizado em 2013 em Oxford[3].

Existem dois centros de investigação internacionais onde o trabalho em torno das tarefas assume grande expressão. Um deles é o Instituto Freudenthal, da Universidade de Utreque, Holanda, e o outro o Centre for Research in Mathematics Education[4], da Universidade de Nottingham, no Reino Unido. Neste centro devemos destacar o trabalho de Swan (2014) que distingue tarefas com diferentes finalidades, nomeadamente (i) Desenvolver conhecimentos factuais e fluência de cálculo; (ii)

Desenvolver compreensão conceptual; (iii) Desenvolver competência estratégica; e (iv) Desenvolver competência crítica[5]. Pelo seu lado, a "Educação Matemática Realista", corrente desenvolvida no Instituto Freudenthal, propõe a ideia de "modelação emergente" (Gravemeijer, 2005). Nesta perspetiva, a atividade do aluno passa por níveis crescentes de sofisticação, de um raciocínio situacional, para um raciocínio referencial, geral e, finalmente, formal. Esta perspetiva sugere que as tarefas devem ser desenhadas de modo a promover a passagem dos alunos do nível onde se situam para o nível seguinte. A ideia que tarefas cuidadosamente concebidas, acessíveis aos alunos mas ao mesmo tempo suscetíveis de promover a sua aprendizagem de novos conceitos e procedimentos, tem servido de base a diversas investigações realizadas em Portugal, nomeadamente pelo *Projeto Sentido de Número*, já referido e com materiais publicados pela APM.

Muitos autores têm procurado estabelecer classificações que permitam perceber as caraterísticas de diversos tipos de tarefa. Assim Pólya (1945) distinguia entre "problema" e "exercício", Stein e Smith (1991) distinguem entre tarefas de elevado e reduzido nível de exigência cognitiva. Ponte (2005) argumenta que as tarefas devem assumir uma natureza diversificada, incluindo exercícios, problemas, investigações e explorações. Os exercícios, de nível de desafio reduzido, visam sobretudo a consolidação de conhecimentos enquanto os problemas, de nível de desafio elevado, visam a aplicação criativa dos conhecimentos que o aluno já possui. Pelo seu lado, as explorações visam sobretudo a construção de novos conceitos e as investigações visam tanto o desenvolvimento de novos conceitos como o uso criativo de conceitos já conhecidos. Cabe ao professor selecionar as tarefas de acordo com os objetivos definidos para cada aula, tendo em atenção a sua adequação aos alunos a que se destinam.

O raciocínio, entendido como o processo de fazer inferências, ou seja, o processo de partir de informação dada para chegar a novas conclusões, é um aspeto fundamental da aprendizagem da Matemática. Diversos modelos têm vindo a ser propostos tendo em vista perceber em termos mais precisos como se pode apoiar o desenvolvimento do raciocínio dos alunos. Um deles é o modelo onde se relaciona o raciocínio com a representação e a significação e onde se destacam dois elementos fundamentais do raciocínio: generalizar (essencial no raciocínio indutivo e abdutivo) e justificar (essencial no raciocínio dedutivo) (Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012, ver a figura 1).

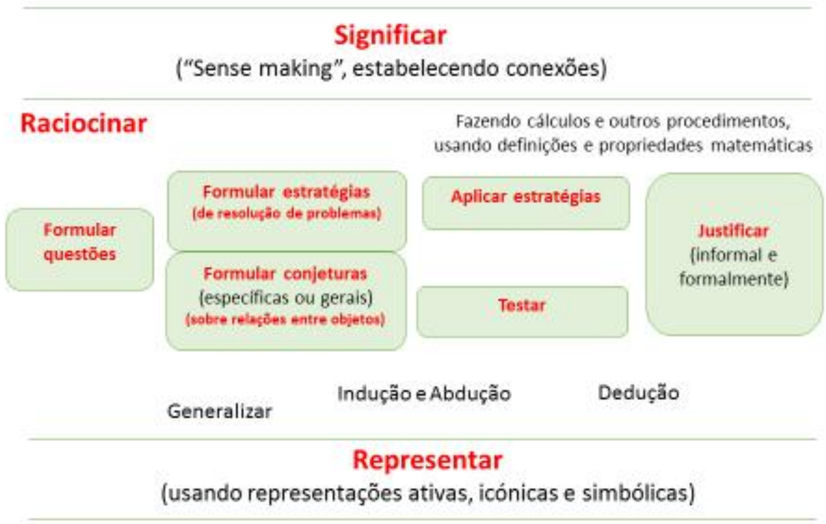

Figura 1. Modelo do raciocínio matemático (adaptado de Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012).

Assim, por exemplo, a tarefa da figura 2 constitui um problema cuja resolução requer a formulação de uma estratégia. Na verdade, como na maioria dos problemas, várias estratégias são possíveis. A mais natural, para a maioria dos alunos, é, num primeiro passo, usar a informação dada para reconstruir a unidade e depois, num segundo passo, determinar as frações sucessivamente pedidas dessa unidade. Os alunos raramente se defrontam com tarefas deste tipo – usualmente a unidade é logo dada à partida. Daí o caráter pouco habitual desta tarefa e o facto de ser necessário raciocínio para a resolver. Os alunos têm que saber que informação é dada, que informação é pedida e que objetivo intermédio permite chegar à solução. A resolução desta tarefa depende da compreensão essencial do papel da unidade de referência quando trabalhamos com números racionais. É de notar que, para além de apelar ao raciocínio, esta tarefa permite reforçar a compreensão da importância decisiva de ter sempre presente a unidade de referência. Quando, num estudo de aula, a apresentámos a um grupo de professoras do 5.º ano, elas consideraram de imediato que esta tarefa estava fora do alcance dos seus alunos. A realização da tarefa nas suas aulas mostrou que foram bastantes os alunos que a conseguiram resolver e que foram muito produtivos os momentos de discussão coletiva que se seguiram à sua realização.

A figura seguinte representa $^{3}/_{4}$ de uma tira de papel.

Representa agora, $^{1}/_{2}$,;$^{2}/_{3}$, $^{4}/_{3}$ e $^{3}/_{2}$ dessa tira. Explica o teu raciocínio.

Figura 2. Tarefa que requer a reconstrução da unidade (adaptado de Ponte, Quaresma, Mata-Pereira & Baptista, 2015).

Abordagem exploratória

Outro aspeto de grande importância, agora relativamente à prática de ensino, diz respeito à abordagem exploratória. O projeto P3M, já referido, permitiu identificar as potencialidades desta abordagem para o ensino-aprendizagem da Matemática. Trata-se de uma perspetiva o que encontrarmos em muitos países, com diferentes cambiantes e designações. Em inglês, por exemplo, fala-se muito em "*inquiry-based mathematics teaching*" (Artigue & Blomhøj, 2013) ou "*discovery learning*". A "*Realistic Mathematics Education*" dos holandeses do Instituto Freudenthal insere-se também nesta perspetiva, tal como, de resto o NCTM (2000). Rigorosamente falando, podemos encontrar sempre diferenças de significado de termo para termo e de autor para autor, mas, na prática todos eles designam uma abordagem onde os alunos trabalham em tarefas onde têm de construir as suas próprias estratégias de resolução, usando com flexibilidade diversas representações matemáticas. Enquanto na sala de aula habitual o professor ensina primeiro procedimentos e algoritmos, mostrando exemplos, e propõe depois exercícios para praticar, na abordagem exploratória o professor propõe aos alunos um trabalho que os leva a reconstruir conceitos, representações e procedimentos matemáticos. Para isso, promove frequentes momentos de negociação de significados, argumentação e discussão coletiva. Deste modo, procura levar os alunos a desenvolver o seu raciocínio e também a sua compreensão da Matemática bem como a capacidade de a usar nas mais diversas situações. Na abordagem exploratória valoriza-se a construção de conceitos, o uso de representações, a modelação de situações, e também o uso de definições e propriedades dos objetos matemáticos para chegar a conclusões. No trabalho na sala de aula, isto significa que continua a dar-se atenção aos aspetos computacionais mas dá-se igualmente uma grande atenção aos aspetos conceptuais.

A abordagem exploratória é marcada pela natureza das tarefas propostas, que devem ser escolhidas de modo a promover novas aprendizagens. Mas esta abordagem é igualmente marcada pelas formas de trabalhar e pelo tipo de comunicação que tem lugar na sala de aula. Assim, na realização destas tarefas podem usar-se diferentes modos de trabalho. Uma possibilidade é o modo coletivo, em que o professor interage com todos os alunos. Outra é o trabalho em grupo e a pares, tendo em vista proporcionar aos alunos um ambiente estimulante de diálogo e partilha. Deste modo, os alunos podem participar em dois níveis do discurso da aula – o coletivo e o privado, que desenvolvem com os seus colegas (Ponte & Santos, 1998). Pode também usar-se o trabalho individual, procurando desenvolver a capacidade de concentração e de reflexão do aluno.

As aulas de cunho exploratório estruturam-se usualmente segundo três fases (Ponte, 2005): (i) apresentação da tarefa e o modo como os alunos a interpretam (em coletivo); (ii) desenvolvimento do trabalho pelos alunos (em grupos, pares ou individual); e (iii) discussão e síntese final (de novo em coletivo). Esta última fase é muito importante pois é a ocasião mais propícia para que sejam expostas conexões e desenvolvidos significados (Bishop & Goffree, 1986), permitindo aos alunos relacionar vários temas, mostrando como as ideias matemáticas são interligadas. Além disso, os momentos de discussão coletiva constituem oportunidades para negociação de significados matemáticos e para construção de novo conhecimento. A aprendizagem com compreensão poderá ainda ser aperfeiçoada através das interações na turma, à medida que os alunos sugerem ideias e conjeturas matemáticas, aprendem a avaliar o seu próprio raciocínio e o dos colegas, e desenvolvem capacidades de raciocínio matemático. Como tal, cada tarefa culmina em regra num momento de discussão coletiva, como forma de refletir, discutir ideias, processos e conclusões (NCTM, 2000).

A comunicação em sala de aula marca de modo decisivo as oportunidades de aprendizagem dos alunos. Esta comunicação é unívoca, quando é dominada pelo professor, ou dialógica, quando a contribuição dos alunos é valorizada (Ponte, 2005). É ao professor que cabe definir os padrões de comunicação, propor as tarefas a realizar e estabelecer os modos de trabalho na sala de aula, mas tem de o fazer em permanente negociação, por vezes bem difícil, com os alunos. É de notar que o professor pode assumir em exclusivo o papel de autoridade matemática ou partilhá-lo com os alunos, procurando estimular a sua capacidade de raciocínio e argumentação. Um aspeto muito importante do trabalho do professor é o modo como procura ajudar de forma discreta os alunos a apropriar-se da linguagem matemática correta, usando sobretudo processos de "redizer", isto é, reformulando as afirmações dos alunos numa linguagem progressivamente mais correta. Os fenómenos da comunicação marcam de modo fundamental o trabalho que se realiza em sala se aula, sendo hoje já muito significativo o conhecimento produzido sobre padrões e estilos de comunicação e sobre formas de questionamento, como mostra de resto a excelente revisão de literatura de Menezes, Tomás-Ferreira, Martinho e Guerreiro (2014).

Um dos momentos mais importantes do trabalho da sala de aula são as discussões coletivas. Nestas discussões, os alunos apresentam as suas resoluções das tarefas e intervêm sobre as estratégias uns dos outros. Stein, Engle, Smith e Hughes (2008), como seu “modelo das cinco práticas” (antecipar, monitorizar, selecionar, sequenciar e estabelecer conexões) mostram como o professor pode preparar estas discussões de modo a torná-las produtivas. Wood (1999) mostra como um elemento importante destas discussões é a capacidade de explorar desacordos entre os alunos e Sherin (2002) indica a necessidade de estabelecer um equilíbrio entre a participação dos alunos e a exploração de ideias matemáticas importantes. No nosso país, bastante atenção tem sido dada ultimamente a esta faceta do trabalho do professor, com relevo para o modelo das ações do professor (Ponte, Mata-Pereira & Quaresma 2013) que evidencia as potencialidades de colocar desafios aos alunos, bem como a necessidade, muitas vezes, conduzir os momentos de discussão numa lógica de guiar, ou mesmo de informar os alunos.

O recente livro do NCTM (2014), que em breve será publicado pela APM numa versão portuguesa, retoma estes aspetos do trabalho do professor, afirmando igualmente a sua importância decisiva (Quadro 2).

Quadro 2. Aspetos da prática docente valorizados pelo NCTM (2014).

1. Estabelecer objetivos matemáticos para focar a aprendizagem
2. Conduzir a realização de tarefas que promovam raciocínio r resolução de problemas
3. Usar e estabelecer conexões entre representações matemáticas
4. Promover um discurso matemático com significado
5. Colocar questões pertinentes
6. Desenvolver fluência na realização de procedimentos com base na compreensão conceptual
7. Apoiar o esforço produtivo dos alunos na aprendizagem da Matemática
8. Suscitar e usar evidência do pensamento dos alunos.

A grande maioria destes aspetos têm estado presentes na investigação realizada em Portugal, mas o NCTM discute de modo muito bem conseguido a relação entre eles, além de chamar a atenção para questões a que muitas vezes não damos a necessária atenção como sejam o estabelecer objetivos matemáticos para focar a aprendizagem ou o apoiar o esforço produtivo (*productive struggle*) dos alunos na aprendizagem da Matemática.

Formação e desenvolvimento profissional do professor

Muito tem sido estudado sobre a formação e o desenvolvimento profissional do professor. É hoje consensual que a mudança social, a evolução da escola e as mudanças curriculares e tecnológicas requerem da parte do professor uma disponibilidade permanente para formação e desenvolvimento profissional. Esta formação envolve diversos domínios entre os quais a Didática da sua disciplina. Como refiro num trabalho recente (Ponte, 2014), a formação tem condições ótimas para se realizar quando existe sintonia entre os atores chave que intervêm no ensino da Matemática: (i) os professores, (ii) os investigadores e formadores de professores, e (iii) os decisores políticos. Conseguir essa sintonia não é fácil, mas já aconteceu no passado, nomeadamente com o programa nacional de formação contínua de professores (Serrazina, 2013).

Uma forma de desenvolvimento profissional que temos vindo a usar com assinalável sucesso são os "estudos de aula"[6] (Ponte, Quaresma, Mata-Pereira & Baptista, 2015). Trata-se de um processo de trabalho que decorre dentro do ambiente escolar e onde os professores desempenham um papel central. De alguma maneira, um estudo de aula reproduz a lógica de um processo de investigação realizado no contexto da prática profissional dos professores. Assim, começa por identificar um problema relevante relativo à aprendizagem dos alunos. De seguida, os participantes planeiam uma aula, tendo em atenção as orientações curriculares e os resultados de investigação sobre esse problema. Preveem possíveis dificuldades dos alunos, antecipam questões que podem surgir na aula, definem uma estratégia de ensino, concebem tarefas para a aula e preparam instrumentos para a observação. A aula é então lecionada por um dos professores e os restantes observam e tiram notas dando especial atenção à aprendizagem dos alunos. Na verdade, no estudo de aula, o que está no foco das atenções é a aprendizagem dos alunos, não o desempenho do professor. Na sequência, os professores analisam e refletem sobre o que observaram na aula. Esta análise pode levar à reformulação total ou parcial do plano de aula. Muitas vezes, a aula reformulada é lecionada novamente por outro professor a outra turma, em ciclos sucessivos (Lewis, Perry & Hurd, 2009; Murata, 2011).

Ao participar em estudos de aula, os professores podem aprender questões importantes em relação aos conteúdos que ensinam, às orientações curriculares, aos processos de raciocínio e dificuldades dos alunos e à dinâmica da sala de aula. Os estudos de aula são desenvolvidos em ambientes colaborativos, permitindo aos professores partilhar ideias uns com os outros e apoiar-se mutuamente. Desta forma, os estudos de aula constituem um contexto não só para refletir, mas também para promover o sentimento de confiança, fundamental no desenvolvimento profissional. Na verdade, na nossa experiência, concluímos que o estudo de aula, conjugando momentos de trabalho estruturado e de trabalho exploratório dos professores e conjugando o conhecimento proveniente da investigação com o conhecimento experiencial dos professores, representa um contexto promissor para o seu desenvolvimento profissional sobre questões relacionadas com tarefas e processos de raciocínio no ensino-aprendizagem da Matemática (Ponte, Quaresma, Mata-Pereira & Baptista, 2015).

A concluir

Muito mais se poderia falar ainda do alcance da Didática da Matemática, nomeadamente no campo das metodologias de investigação, sendo de destacar o uso crescente de metodologias muito sofisticadas como é a investigação baseada em design (IBD). Terá de ficar para outra oportunidade. Na verdade, a Didática da Matemática constitui um campo de trabalho multifacetado, onde devemos incluir não só o trabalho científico, feito prioritariamente nas universidades e centros de investigação, mas também o trabalho de natureza profissional, empreendido por todos aqueles que ensinam Matemática num dado nível de ensino (pré-escolar, básico, secundário, superior). A Didática da Matemática tem ainda uma vertente formativa, tanto no que respeita à formação inicial como à formação contínua. Constitui portanto um campo científico, mas também um campo profissional e um campo de formação, sendo necessário destacar as dimensões comunicativas, associativas e colaborativas em que diversos atores interagem uns com os outros por via do seu trabalho conjunto, dos seus encontros e discussões (como as que ocorrem no ProfMat e no SIEM), e das suas leituras e reflexões (como as que emergem da leitura das revistas *Quadrante* e *Educação e Matemática*).

Referi atrás a importância da sintonia entre os diversos atores, professores, investigadores e formadores de professores e decisores políticos. Um primeiro passo pode ser dado através do reforço do trabalho conjunto de professores, investigadores e formadores, promovendo projetos de investigação, empreendendo projetos de desenvolvimento curricular e de intervenção visando a melhoria das aprendizagens e realizando atividades de formação exemplares, como os estudos de aula.

São grandes os desafios que se colocam hoje em dia à Didática da Matemática: (i) encontrar formas de corresponder às necessidades de aprendizagem de públicos escolares muito diversos, no quadro de condições sociais adversas, que apresentam uma imagem distorcida desta disciplina tendo em vista reforçar o seu papel seletivo; (ii) compreender os processos de desenvolvimento profissional do professor e construir dispositivos de formação capazes de proporcionar aprendizagens profissionais com efeitos reais nas práticas educativas; e (iii) reforçar a sua identidade como campo científico com um objeto próprio estudado através de metodologias rigorosas e capaz de encontrar formas apropriadas de disponibilizar os conhecimentos produzidos a todo o tecido educativo e social. O *Programa de Matemática do Ensino Básico* (Ministério da Educação, 2007) e o *Programa de Formação Contínua em Matemática* (Serrazina, 2013) são bons exemplos do potencial da investigação para influenciar a prática docente e a aprendizagem dos alunos. Espero que muitos mais momentos de forte sintonia entre os diversos atores venham a surgir e, principalmente, que mais do que momentos isolados, passem a ser a regra no funcionamento do nosso sistema educativo.

Notas

[1] Uso este termo por ser o que melhor corresponde à tradição portuguesa (e europeia), que designa por "Didática Específica" o estudo dos problemas do ensino e da aprendizagem de um determinado campo do conhecimento. No Brasil usa-se preferencialmente o termo "Educação Matemática", diretamente inspirado no inglês "*Mathematics Education*".

[2] Em Portugal o documento de referência curricular tende a designar-se "programa" (a exceção é o *Currículo nacional* de 2001). Nos países de língua inglesa, documentos idênticos, quando detalhados, designam-se por "*curriculum*" e, quando sintéticos, por "*syllabus*".

[3] Atas disponíveis na internet: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054.

[4] Inicialmente conhecido como "Shell Centre for Mathematical Education".

[5] Este autor realizou uma conferência plenária no EIEM de 2014 em Sesimbra, podendo conhecer-se o seu trabalho através das atas do encontro em http://www.spiem.pt/publicacoes/arquivo/.

[6] Em inglês, "*lesson studies*".

Referências

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática: A experiência do projecto MAT$_{789}$* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa).

Almeida, A. J., & Matos, J. M. (2014). A Matemática nos programas do ensino não-superior (1835-1974). Lisboa: APM.

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, *45*, 797–810.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 843-909). Greenwich, CT: Information Age.

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Clements, D. H. (2003). Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Shifter (Eds.), *A research companion to Principles and standards for school mathematics* (pp. 151-178). Reston, VA: NCTM.

Brocardo, J., & Serrazina, L., & Rocha (Eds.), (2008). *Desenvolvendo o sentido do número: Perspectivas e exigências curriculares*. Lisboa: Escolar Editora.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, CT: Heinemann.

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report*. Alexandria, VA: American Statistical Association.

Gravemeijer, K. P. E. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: Routledge.

Lewis, C. C., Perry, R. R., & Hurd, J. (2009). Improving mathematics instruction through lesson study: A theoretical model and North American case. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*(4), 263-283.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2-8 e 44.

Menezes, L., Tomás-Ferreira, R., Martinho, M. H., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp. 139-168). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. (disponível on-line)

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual overview of lesson study. In L. C. Hart, A. Alston & A. Murata (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education: Learning together* (pp. 1-12). New York, NY: Springer.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

NCTM (2006). *Curriculum focal points for prekindergarden to grade 8 mathematics*. Reston, VA: NCTM.

NCTM (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making*. Reston, VA: NCTM.

NCTM (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: NCTM.

Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton: Princeton University Press.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (Ed.) (2014). *Práticas profissionais dos professores de Matemática*. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. (disponível on-line)

Ponte, J. P. (2014). Formação do professor de Matemática: Perspetivas atuais. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp. 351-368). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. (disponível on-line)

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Praxis Educativa, 7*(2), 355-377.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante, 22*(2), 55-81.

Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2015). Exercícios, problemas e explorações: Perspetivas de professoras num estudo de aula. *Quadrante, 24*(2), 11-134.

Ponte, J. P., & Santos, L. (1998). Práticas lectivas num contexto de reforma curricular. *Quadrante, 7*(1), 3-33.

Serrazina, L. (2013). O programa de formação contínua em Matemática para professores do 1.º ciclo e a melhoria do ensino da Matemática *Da Investigação às Práticas, 3*(2), 75-97.

Sherin, M. G. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in the mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*, 205-233.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 313-340.

Stein, M. K., Remillard, J., & Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). Greenwich, CT: Information Age.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-275.

Swan, M. (2014). Designing tasks and lessons that develop conceptual understanding, strategic competence and critical awareness. In J. Brocardo, A. M. Boavida, C. Delgado, E. Santos, F. Mendes, J. Duarte, M. Baía & M. Figueiredo (Eds.), *Tarefas matemáticas: Livro de Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 9-28). Lisboa: SPIEM.

Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 171-191.

El juego como actividad conductora de los primeros aprendizajes matemáticos

Mequè Edo Basté
Universitat Autònoma de Barcelona, *Meque.Edo@uab.cat*

Resumen. *En el desarrollo infantil, siempre y cuando las necesidades básicas estén bien atendidas, aparecen de forma natural tres grandes categorías de juego que tienen relación e influyen en el desarrollo del pensamiento matemático, estas son: Juego exploratorio, Juego simbólico, Juego de reglas. En este capítulo se describen estos juegos a la vez que se analiza la conexión de cada uno con posibles aprendizajes matemáticos en las primeras edades.*

Palabras-clave: *juego exploratorio; juego simbólico; juego de reglas; educación matemática; educación infantil*.

Abstract. *In child development, whenever basic needs are met, three large categories of games emerge in a natural way. Such categories – exploratory games, symbolic games, and games of rules – are related to the development of mathematical thinking and influence that development. In this paper, I describe these games while I analyse the connections of each one of them with potential mathematical learning in the early years.*

Keywords: *exploratory games; symbolic games; games of rules; mathematics education; early childhood education.*

El juego y la matemática

Entiendo el juego como una actividad voluntaria caracterizada por unas reglas públicas y por algunos grados de libertad de elección de los actores involucrados. El juego provoca atención, reto, placer, satisfacción... es decir: emoción.

Piaget (1962) describe el juego como una actividad especialmente poderosa que fomenta la vida social y la actividad constructiva del niño. Él nos habla de tres grandes tipos de juego que nos sirven para hacer un recorrido cronológico a lo largo de la primera infancia, al mismo tiempo que analizamos las relaciones de cada una de ellos con las matemáticas. Piaget nos habla de:

- El juego sensoriomotriz. Aparece en el estadio sensoriomotor. El niño repite movimientos que le resultan placenteros y a partir de ellos aprende nuevos movimientos.

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Vale, I., & Guimarães, H. (Eds.) (2016).
Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática. Porto: APM, pp. 23–43

Movimientos que le permiten manipular de manera exploratoria los objetos para irlos conociendo. Juego característico de los 0 a los 2 años.

- El juego simbólico. Aparece en el estadio preoperacional. Supone la asimilación de aquello real a su propio yo, permite evocar objetos y fenómenos no presentes. La realidad es transformada según sus deseos. Juego característico de los 2 a los 6 años.
- Juego de reglas. Aparece en el estadio de operaciones concretas. Desarrolla las relaciones sociales. Juego organizado, en equipos, aparece la competición pero también control de la espontaneidad y la sumisión a las reglas. Juego característico de los 6 años en adelante.

Partiendo de este referente, en este capítulo entiendo que en el desarrollo infantil, siempre y cuando las necesidades básicas estén bien atendidas, aparece de forma natural tres grandes categorías de juego que tienen relación e influyen en el desarrollo del pensamiento matemático, estas categorías son:

- Juego exploratorio
- Juego simbólico
- Juego de reglas

¿A qué me refiero cuando hablo de matemáticas vinculadas a juego?

Muchos juegos se realizan al aire libre y con un despliegue motor muy importante. Estos juegos son los que ayudan a los niños a comprender y a apropiar-se del **espacio tridimensional** que los rodea, es decir, a construir las primeras intuiciones geométricas (Edo 2000). Hay también otros juegos que influyen en la construcción de las primeras nociones geométricas como, juegos con tableros donde debes ubicarte y hacer recorridos, juegos de construcciones en el espacio y en el plano, los puzles y rompecabezas, etc.

En muchos juegos intervienen números y cantidades que se deberan comparar para determinar quien tiene más y quien tiene menos, o ¿cómo lo hacemos para tener igual? etc. A menudo también en los juegos nos preguntamos ¿quién ha ganado? y ¿Por qué? características que ayudan a desarrollar el **sentido numérico** (Way, 2011).

En muchos juegos de mesa con cartas, con dados, con tableros y en todos los juegos de puntería hace falta sumar las puntuaciones parciales para determinar quién ha ganado. Es muy evidente la relación entre este tipo de juegos y el desarrollo del **cálculo mental** (Edo, 2003).

En los juegos colectivos, especialmente los reglados hay un orden temporal, quien comienza, quien es el segundo, el tercero... ¿Qué es necesario hacer primero, y a continuación? Las secuencias ordenadas de acciones, la espera y el turno de tirada por ejemplo son claves para desarrollar el **sentido temporal.**

Los juegos tienen unas reglas propias a las que nos sometemos voluntariamente, y muy a menudo tienen un reto o unos objetivos que se quieren conseguir, los cuales hacen que el jugador despliegue un tipo de razonamiento lógico al rededor de preguntas como: ¿Qué puedo hacer para conseguir el objetivo antes que nadie? Este tipo de **razonamiento lógico** en el que se contemplan diferentes opciones y se escoge en función de la probabilidad y del azar son "las estrategias favorecedoras" y nos conectan con la **Resolución de problemas matemáticos** (Edo, Deulofeu y Badillo 2007).

Estos, y otros, contenidos matemáticos que irán apareciendo a lo largo del artículo nos confirman porque el juego es fundamental para el conocimiento matemático.

Juego Exploratorio

Des de muy pequeños los niños, de manera libre y espontánea, observan, manipulan, exploran y experimentan con los objetos que tienen cerca y este interés se expresa mediante la propia acción (Weissmann, 1999).

El juego exploratorio puede entenderse como el conjunto de comportamientos que permiten obtener información sobre los objetos con los que los niños interactúan. La actividad espontánea de exploración se desencadena a partir de estímulos exteriores al sujeto y aparecen en ausencia de necesidades biológicas primarias (Coll, 1978). La actividad que se despliega durante el juego exploratorio no es caótica o azarosa, habitualmente la acción del niño persigue alguna finalidad, aun que el objetivo puede aparecer durante el transcurso de la manipulación y, hasta cambiar durante el proceso. Esta manipulación y exploración permite al niño obtener información de los objetos y así conocerlos mejor.

Por tanto, el juego exploratorio es aquel que permite al niño aprender aquello que tiene aquí y ahora, se centra en interrogantes como:

- ¿Qué es esto?

- ¿Cómo es esto?
- ¿Qué puedo hacer con esto?

La primera situación didáctica vinculada a contenidos matemáticos, bien documentada y con un amplío recorrido escolar es el cesto de los tesoros.

La profesora Goldschmied, especialista en el aprendizaje en las primeras edades y en la formación de maestros, desarrolló la formulación y sistematización de las actividades educativas de descubrimiento dirigidas a niños y niñas de cero a tres años. No se trata solamente de establecer una metodología didáctica, sino de sistematizar un tipo de juego aprovechando la actividad espontánea de los niños (Goldschmied, 1986).

El cesto de los tesoros, según Majem y Òdena (2007), es una actividad de exploración orientada a los niños de 6 a 10/12 meses. Se trata de un conjunto especial de objetos y materiales, que podemos encontrar o confeccionar. La selección de los mismos es la clave del éxito de la actividad, el propósito de esta selección es potenciar los sentidos de los pequeños: tacto (forma, peso, temperatura, textura, etc.); olor y sabor (diversidad y variedad de aromas y sabores); sonido (percusión, ficción, crujido, ausencia de sonido, etc.); vista (color, volumen, magnitud, luminosidad, brillantez, etc.). Otros tipis de materiales de plástico y de colores primarios no darían al niño referencias tan precisas de superficie, peso, temperatura, forma, color, olor, sonido, consistencia, etc. por tanto, no ofrecerían las mismas oportunidades de reconoces diversidad de cantidades, limitado así las posibilidades de establecer relaciones.

El juego heurístico es la continuación natural del cesto de los tesoros, creado y documentado por la misma autora. El juego heurístico es una actividad destinada especialmente, a niños en su segundo año de vida, ya que es en esta edad cuando la movilidad se convierte en la más amplia conquista, pasando a ser el eje central de la actividad. Según Goldschmied (1986) esta actividad contribuye a estructurar el pensamiento, el lenguaje, el dominio del espacio y a establecer relaciones lógicas como, comprender las consecuencias de las propias acciones.

En Majem y Òdena (2007), se puede encontrar todo lo necesario para llevar a cabo esta actividad. La sesión de juego heurístico siempre consta de dos partes. La primera se centra en la exploración y combinación de objetos y la segunda, tan importante como la primera, se basa en la recogida, agrupación y clasificación de los objetos.

Algunas de las acciones típicas que hacen los niños y niñas durante la primera parte, de exploración y combinación de materiales son:

Llenar y vaciar, abrir y cerrar, agrupar y separar; colgar y descolgar; tapar y destapar; añadir y quitar. Alinear, apilar, deslizar, empujar, presionar, girar, oscilar, encajar, acoplar, aparear, estirar, prensar y comprar, entre otras.

Combinando los diferentes materiales, por ejemplo, que:

- Algunos objetos caben dentro de otros, y otros no.
- Según como se coloquen, se aguantan o se caen.
- Unos son más grandes o más pequeños que otros.
- Algunos ruedan y otros se mantienen quietos.
- Algunos encajan bien, otros no.
- Hay objetos que su apariencia se modifica dependiendo de cómo los toques.
- Algunos resultan agradables y otros desagradables, etc.

Mientras juegan los niños y las niñas van tomando consciencia de las características y propiedades de los objetos (formas, superficies, longitud, volumen, peso –masa-, material, textura, etc.) de las leyes de la naturaleza (gravedad, equilibrio…).

En esta actividad se utilizan una serie de objetos pequeños y numerosos, también algunos botes o cajas que se usan como contenedor y también cilindros con los dos extremos abiertos. En todas las sesiones que he presenciado hay algunos niños que se dedican a colocar objetos pequeños dentro de estos recipientes (experimentando su capacidad), de repente los objetos no están, “desaparecen” de la vista y reaparecen de forma diferente según el tipo de contenedor que estén usando. Están aprendiendo que un recipiente abierto por una sola cara o por ambas produce resultados diferentes y requieren acciones diferentes para recuperar su contenido. En estas edades se observan innumerables repeticiones de una misma acción; estas están encaminadas a comprender la consecuencia de la propia acción y a poder anticipar (mentalmente) lo que sucederá si esta acción se realiza (Edo, 2012).

El juego exploratorio, pues, es una actividad característica de los primeros años de la vida, pero reaparece con cada material nuevo que se ofrece a los niños durante toda la educación infantil – y de mayores también- ya sea en actividades como las bandejas de experimentación, las transformaciones de espacios, los rincones de construcciones, etc.

Para que este juego se dé es necesario ofrecer un entorno y unas condiciones adecuadas. A continuación se expondrán algunas recomendaciones didácticas para acompañar mejor a los alumnos en este juego exploratorio que aparece de forma natural en educación infantil.

La importancia de la exploración libre

Cuando ofrecemos un nuevo material la primera propuesta ha de ser, siempre, la exploración libre. Si se quiere acompañar con aluna consigna concreta tiene que ser lo más abierta posible, como por ejemplo: *¿Qué es esto? ¿Cómo es esto? ¿Qué podéis hacer con esto?*

Esta propuesta abre todas las posibilidades, permite a los niños actuar libremente si ninguna presión por tener que conseguir nada en concreto, despierta su imaginación y creatividad, permite que unos "se inspiren" en las producciones de los otros, no hay temor al fracaso porqué no hay error y los descubrimientos y conocimientos que se aparecen son éxitos personales.

Hay evidencias científicas que avalan esta recomendación. En el año 1976 Jerome S. Bruner y dos colaboradores realizaron una investigación donde estudiaron el papel del juego en la resolución de problemas con niños de 3-5 años de edad. El experimento consistía en proponer un reto a 180 alumnos. El reto consistía en llegar a coger un objeto que había encima de una mesa, pero que estaba lejos de la silla donde se sentaban los alumnos, y estos no se podían levantar. Dejaron sobre la mesa también, palos, ganchos, cuerdas, etc. y establecieron tres grupos de niños. Los primeros los dejaron jugar con el material, un buen rato sin ninguna instrucción. Al segundo grupo se le hizo una demostración de cómo se podían combinar estos elementos y los niños del tercer grupo les propusieron la tarea directamente sin poder manipular nada. Resultados: los niños del primer grupo resolvieron mucho mejor la tarea (llegar al objeto si levantar-se de la silla) que los niños de los otros dos grupos. Los investigadores vieron que los niños que han realizado un juego exploratorio libre con los palos y ganchos, sin sentirse condicionados por ninguna demanda muestran que: tienen menos tendencia a abandonar, menos frustración, se plantean hipótesis más viables y no temen al error. Entre sus conclusiones dicen "el juego reduce la presión de éxito y el fracaso. Nuestros jugadores, menos estresados, van a poder proceder con menos frustración y menos miedo al fracaso" (Sylva, Bruner y Genova, 1976, p. 256)

¿En la escuela podemos ayudar a evolucionar este juego?

Si el juego es libre y es voluntario ¿qué papel tenemos los maestros? ¿Les ofrecemos buenos materiales y dejamos que hagan? Bien, esta es una buena opción pero ¿en la escuela podemos ayudar de alguna manera a los alumnos a avanzar en su aprendizaje y en su desarrollo? ¿Como educadores podemos añadir elementos a su juego para ayudar a los alumnos a avanzar si perturbar la acción creativa y espontánea?

Aspectos como el cambio de agrupación, la buena selección de materiales, las preguntas o condiciones iniciales y la representación son ejemplos de elementos metodológicos que pueden ayudar a esta evolución.

Cambio de Agrupación

Si bien la exploración inicial no ha de ser nada pautada, en un determinado momento se puede pedir a los alumnos que hagan una construcción conjunta con algún compañero, o entre todos los alumnos de una mesa, es decir, el cambio de agrupación crea un nuevo escenario que comporta nuevos retos, y en este caso, se fomenta el trabajo cooperativo.

Figuras 1a y 1b. Se empieza por un juego exploratorio individual para pasar más adelante a una propuesta de hacer una construcción conjunta con un compañero o con todos los de la mesa.

Si nos fijamos en la imagen 1b vernos que hay una hoja de papel encima de la cual se ha pedido que se haga una construcción conjunta entre dos compañeros. Esta situación hace que los dos alumnos deban hablar, ponerse de acuerdo, argumentar, convencer al otro, es decir, tengan que compartir. En esta situación es muy habitual oír expresiones de los niños donde aparecen los términos matemáticos que están aprendiendo, por ejemplo: "Pásame el cuadrado azul", "¿Cerramos la parte de arriba con triángulos?" etc.

Buena selección del material y las preguntas iniciales

En el siguiente ejemplo hay una buena selección de materiales. Queremos ayudar a los alumnos a reflexionar sobre los conceptos: caras planas y caras curvas de los objetos, por lo tanto las piezas que se ofrecen son todas con unas formas bien seleccionadas. Forma de cubo, de cilindro y de esfera. Nada más.

Preguntas iniciales: antes de empezar a jugar se pide: ¿Irán bien todas las piezas para construir torres? Los niños pueden hacer sus hipótesis, antes de tocar el material. Después los dejamos "jugar", es decir, permitimos que exploren y hagan lo que quieran con las piezas.

Figura 2. Construyendo torres.

Cuando acaban podemos hacer una puesta en común y una síntesis de lo que hemos descubierto. Fácilmente los niños y las niñas de cuatro años llegan a conclusiones como: los cubos van bien para apilar, los pongas como los pongas, ya que tienen todas las caras planas. Los cilindros no se aguanta si los pones por la cara curva pero sí, si los apoyas encima del círculo, porque es plano. Y las esferas no se aguantan casi nunca porque solo tienen una única cara y es toda curva.

Selección de materiales, juego colectivo y representación en el papel

Respecto a los materiales, el juego exploratorio puede ser con piezas de diferentes medidas. Los objetos tan o más grandes que los propios alumnos crean unas exploraciones y descubiertas fantásticas.

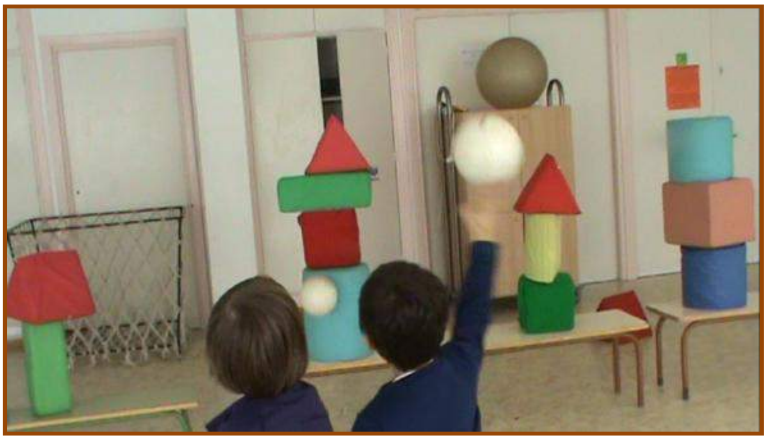

Figura 3a. Construir torres con materiales tan o más grandes que los niños.

En este caso las piezas de espuma grandes sirven para recordar conceptos de forma tridimensional, de figuras planas, etc. Pero también para desplegar un juego de puntería. Se trata de hacer torres que se aguanten y con pelotas de diferentes medidas utilizadas como proyectiles nos preguntemos: ¿es mejor apuntar a la parte de arriba, del medio o de abajo de la torre? ¿Me va mejor la pelota grande, mediana o pequeña a mí?

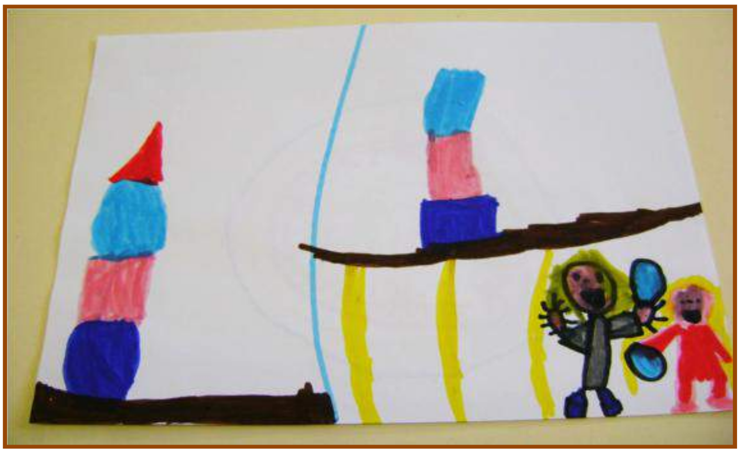

Figura 3b. Representar lo que se ha vivido, un gran paso haci a la abstración.

Podemos acabar pidiendo que “expliquen” como quieran, en una hoja en blanco, lo que han hecho hoy. Esta representación de la experiencia vivida es un gran paso para la abstracción. El alumno se fija en las formas, posiciones, cantidades, colores y otros aspectos cuantitativos y cualitativos para representar lo más significativo de cada objeto, y además, a menudo escoge representar el momento que emocionalmente es más relevante para él de la experiencia que ha vivido.

El juego simbólico

Es el juego que aparece cuando las personas y a los objetos se les asignan características y propiedades diferentes a las de la realidad. Se centra en cuestiones como:

- Ara esto es como un…
- Yo hago como si fuera…

Es una actividad característica de los dos a los siete años, aproximadamente. Se centra en la representación y simulación de vivencias experimentadas, observadas o inventadas. Los niños generan una acción que cabalga entre la fantasía y la realidad. Este juego desarrolla la creatividad, la imaginación, promueve la autonomía y la socialización. Para Piaget (1961) este es el "juego" por excelencia donde el niño no solo asimila la realidad sino que la incorpora para poderla revivir, dominarla o compensarla. El juego simbólico según Abad, y Ruiz de Velasco (2011) es una experiencia vital de la infancia que posibilita transformar, crear otros mundos, vivir otras vidas, jugar a ser otros, y así aprender a pensar como los otros, a sentir como los otros y, en definitiva a saber que existen maneras de pensar y sentir diferentes a la propia.

Para Van Oers (1996), siguiendo a Vigotski, el juego simbólico es la actividad conductora del aprendizaje de los niños de tres a ocho años. Este investigador realiza una serie de estudios sobre las oportunidades de aprendizaje y de de enseñanza que se dan en situaciones de juego simbólico. El 1996 Van Oers publica unos resultados centrados en la estimulación del pensamiento matemático en las actividades de juego de los niños. En su estudio, basado en la observación sistemática, intenta descubrir cuando se producen oportunidades de aprendizaje durante una actividad de juego simbólico, en el marco escolar, que puedan ser consideradas válidas para el aumento del pensamiento matemático de los alumnos de 4 a 8 años. Para este estudio analizan 8 sesiones de juego simbólico registradas, de una duración de 25-30 minutos cada una, desarrollada en pequeños grupos en el rincón de juego simbólico de la "zapatería" en la escuela. Van Oers y colaboradores se preguntan si se puede estimular el pensamiento matemático en un contexto de juego. Durante las sesiones la maestra observaba el juego de los alumnos y a veces les preguntaba qué hacían de manera que esta verbalización los ayudaba a describir y hacer consciente aquello que hacían por puro placer. Había también una consigna clave de investigación. Cuando algún niño describía su acción y en ella aparecía algún referente matemático, el adulto les pedía: ¿Estás seguro? Cuestión que llevaba a los niños a reflexionar, argumentar y justificar sobre los símbolos (orales y escritos) que utilizaba y las acciones que realizaba.

Los resultados muestran que se producen muchas oportunidades para enseñar matemáticas, si el maestro sabe utilizarlas, y que los niños pueden reflexionar explícitamente sobre la relación entre los símbolos y sus significados dentro del marco de la actividad de juego. Van Oers (1996) dice:

por tanto, me permito concluir que la actividad de juego simbólico, en el marco escolar, puede ser una situación de enseñanza y aprendizaje para el incremento del pensamiento matemático de los niños, a condición que el maestro se capaz de utilizar adecuadamente las oportunidades de enseñanza. (p. 73)

¿Como ayudamos a evoluciona matemáticamente este juego?

Entendemos que este juego ha de ser una actividad "libre", es decir, nada o poco condicionada por el adulto. Nuestro reto es ayudar a los niños a aumentar la capacidad de pensamiento matemático sin perturbar la acción creativa y espontánea de su juego. ¿Qué podemos hacer?

La participación del adulto

Una posibilidad es que el adulto, una vez ha observado atentamente el juego simbólico que despliegan libremente sus alumnos se ofrezca a participar como un actor más de esta actividad.

A menudo, he visto una maestra haciendo de vendedora de la tienda del rincón donde los niños van a "comprar". La ventaja de esta situación es que la vendedora no pide exactamente lo mismo a todos. A unos les pregunta "cuantos" plátanos quiere; a otros "cuanto" cuesta todo; y a los más avanzados se les pide, por ejemplo, qué cambio les tiene que devolver; es decir, la maestra puede ajustar el discurso y las demandas en función del interlocutor y que todo siga siendo un juego. Crear zonas de desarrollo próximo e intervenir en ellas ajustando la ayuda psicológica en función de con quien se interactúa, es una herramienta fundamental del maestro de educación infantil (Onrubia, 1994). Es interesante que la siguiente sesión del juego la maestra no tome este rol y observe si los niños que hacen de vendedores piden cuestiones similares a las que ella pidió en el pasado.

Otros elementos que pueden ayudarnos

Como se muestra Edo y Masoliver (2008) en el rincón de la tienda los maestros pueden…

1. Implicar a los mismos alumnos en la creación del rincón de juego. Escoger entre todos qué rincón queremos montar (necesidad de hacer votaciones, cálculos, análisis de datos para tomar decisiones, etc.)

2. Pedir como nos imaginamos el rincón y qué necesitamos para construirlo, cuestiones que conducen a la necesidad de evocar, imaginar, relacionar. También aparece la necesidad de observar y analizar la realidad para poder hacer listas de objetos que necesitamos, ordenar las acciones que tenemos que hacer, es decir, necesidad de temporalizar.

3. Escoger el nombre, poner precios, preparar el material, etc. Un montón de acciones organizativas que requieren de contenidos matemáticos, tales como: hablar de cantidades, tiempo, medidas, espacio, orden, agrupaciones, clasificaciones, etc.

4. Observar con detalle mientras los niños juegan libremente. Este hecho es clave, ya que solo des de los conocimientos previos de los alumnos podemos hacer propuestas que planteen retos ajustados, interesantes y alcanzables para ellos.

Figura 4. Juego simbólico la tienda de la classe.

5. Podemos variar las pequeñas consignas iniciales, por ejemplo: El primer día no hay ninguna consigna, en otro momento podemos decir: Hoy todo el mundo tendrá exactamente 5 euros para ir a comprar. Más adelante podemos decir: hoy tienes 5 euros cada uno e ir a comparar de dos en dos, de tres en tres, o hacer lista conjunta antes de la compra, etc.

6. Otra acción que puede influir son las sesiones intermedias – entre una sesión de juego simbólico y la siguiente- con contenidos matemáticos específicos, como: hacer una sesión de descubrimiento del funcionamiento de la calculadora (real) y después dejarla en el rincón de a tienda.

Figura 5a. Sesión guiada de descubrimiento de la calculadora.

Figura 5b. Representación en hoja en blanco, consigna: ¿Qué has aprendido hoy?

7. Otra posible sesión a hacer con pequeños grupos, entre sesiones de juego, puede ser la de descomponer cinco euros con diferentes combinaciones de monedas.

Figura 6. ¿De qué maneras podemos hacer 5 euros? Trabajo en pequeño grupo.

8. La representación gráfica de la compra en una hoja en blanco. De vez en cuanto, se puede pedir que “expliquen” en una hoja en blanco “como ha ido la compra de hoy”. Esta consigna: “explica” es suficientemente abierta para que los niños utilicen los lenguajes que quieran de aquellos que están aprendiendo. Cuando nos piden: ¿pero como? ¿Qué tengo que hacer? La respuesta del adulto es: como quieras, con dibujos, números, palabras, lo que quieras tú para que los otros te entiendan.

Figura. 7. Representaciones del juego en la tienda: explica la compra de hoy.

De esta manera podemos observar donde pone el acento cada niño, qué es lo que más le ha llamado la atención de su actividad, y damos opción a que se expresen gráficamente usando dibujos, números, palabras o frases a voluntad.

Como síntesis diría que durante el juego simbólico es mejor que el adulto intervenga poco. Aunque sabemos que los diálogos y reflexiones sobre lo que el niño ha hecho, la representación en el papel y las sesiones intermedias pueden incrementar efectivamente el pensamiento matemático presente en el juego.

Juegos de reglas

Actividad en la que las acciones y elecciones de los participantes están regidas por una reglas públicas, libremente aceptadas y donde o hay algún objetivo a conseguir. Se centra en cuestiones como:

- *¿Qué puedo hacer para conseguir el objetivo?*
- *¿Qué puedo hacer para que el otro no lo consiga antes que yo?*

Este tipo de juego toma una gran importancia a partir de los seis años, aun que se puede introducir mucho antes y genera un interés que puede durar toda la vida.

Es una actividad que lleva implícita la socialización y la competición. La socialización es imprescindible ya que todos los jugadores deben aceptar ceñirse a las normas del juego, de otra forma, la actividad no funciona. La competición también le es propia porqué la mayor parte de estos juegos hay quien gana y quien no es el ganador.

En los juegos de reglas relacionados con las matemáticas distinguimos dos grandes grupos:

- Los juegos motores
- Los juegos de mesa

El juego motor es el juego reglado inicial

Una buena manera de entrar en el mundo del juego reglado con los alumnos de tres a seis años es a través del juego motor; los juegos tradicionales y populares son garantía de éxito. Se trata de aquellos juegos motores, reglados, que no requieren de materiales complicados que tienen una larga historia en nuestra cultura. Juegos como: uno, dos, tres, pica la pared; tierra, mar y aire; el pañuelo; la rayuela; los bolos; hacer paquetes; el juego de las sillas musicales; las chapas; los cuatro esquinas; romper el hilo; etc.

Cuando vemos que los alumnos, libremente, escogen jugar a uno de estos juegos podemos estar seguros que el tiempo invertido en enseñárselo ha sido útil. Más allá de la riqueza de tener conocimiento de juegos colectivos para compartir y disfrutar con los compañeros también encontramos contenidos matemáticos implicados, por ejemplo en el juego *Un dos tres, pollito inglés*, se trabajan nociones como: delante, detrás, los numerales, en marcha y quietos, lejos y cerca, etc. *El juego del pañuelo*: los números, una cantidad inicial que se va reduciendo, comparación de cantidades, el espacio cerca y lejos, etc. *En la rayuela:* la serie numérica, el orden, delante y detrás, subir y bajar, etc. *Hacer paquetes*: relación entre número y cantidad y composición y descomposición de cantidades. *Las cuatro esquinas*: línea recta, vértice, diagonales, centro de la figura, cuadrilátero, etc. *Las sillas musicales*: “tantos como, menos uno”, etc.

Figura 8. Uno, dos, tres, pollito inglés y las sillas musicales.

Los juegos populares y también los de puntería crean un contexto muy adecuado para pedir, que representen gráficamente la actividad. Damos la página en blanco y pedimos: explica qué ha pasado, muy fácilmente aparecerán números y cantidades para reflejar lo esencial de lo que se ha vivido.

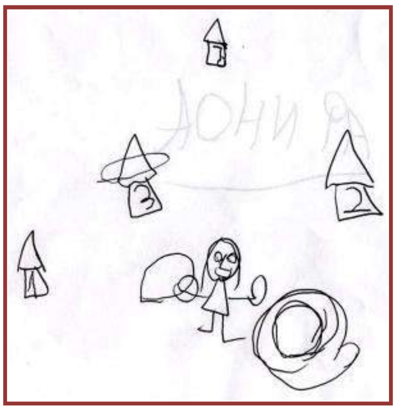

Figura 9. Juego de punteria y representación de la actividad

Los juegos de mesa, matemática en estado puro

Enseñar un juego de mesa en educación infantil requiere tiempo y dedicación, no es una tarea sencilla pero es una gran inversión. Un buen juego para iniciarse es el “memori”, que consiste en: se destapan dos cartas y si hacen pareja me las llevo y sino las vuelvo a dejar en el mismo sitio donde estaban. Aprender a esperar el turno, a jugar correctamente cuando te toca, estar atento a qué saca el otro, y saber determinar quién ha ganado son grandes aprendizajes para estas edades.

Figura 10. El tiempo invertido a enseñar juegos de reglas se convierte en grandes exitos de aprendizaje de los niños.

Podemos involucrar a las familias, pidiendo que los niños que se lleven juegos a casa y que sean los responsables de explicar-los al resto de familiares. Jugar juntos crea lazos y vínculos especiales.

Los juegos de mesa crean un marco ideal para que los alumnos aprendan a escuchar, negociar y a autoregularse. En los juegos de reglas los niños aprenden a ceñirse a unas normas voluntariamente. La regla vence porque es el impulso más fuerte. (Vigotski, 1988). Aparece la autorregulación más allá del deseo inmediato y todo esto simultaneo al aumento de la capacidad de razonar matemáticamente. Es evidente que existe una gran cantidad de juegos de mesa que contienen contenidos matemáticos importantes; números, cantidades y pequeños cálculos que ampliaran el sentido numérico de nuestros alumnos ya que en este contexto los usan con significado.

Hacemos un pequeño análisis del juego *Los tres dados*: en este juego cada jugador (mejor, cada pareja de niños que hagan equipo) tienen un juego de cartas del 1 al 10 o al 12 que ordenan delante suyo. Quien tiene el turno lanza tres dados y gira boca abajo sólo una de sus cartas, la que quiera, escogiendo: la puntuación que ha salido en un dado, la suma de los dos dados o la suma de tres dados. Gana quien antes las ha girado todas. (Edo, 2003).

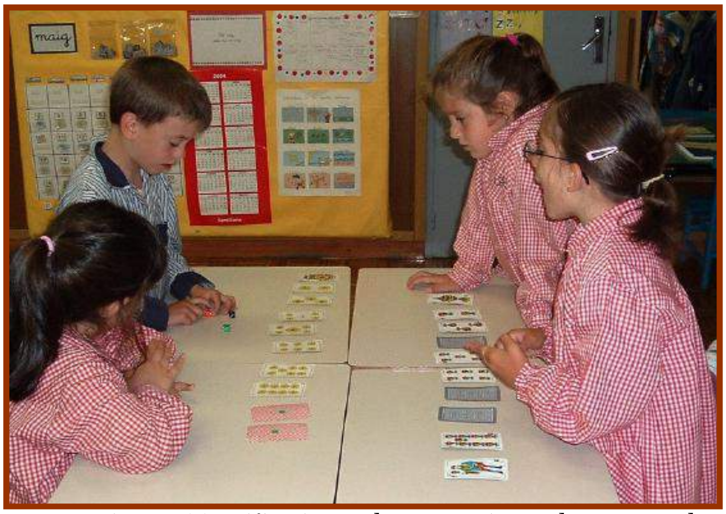


Figura 11. Niños jugando, en equipos, dos contra dos, al juego: los tres dados.

Suponemos que le han salido estas cantidades (11b) ¿qué números podrá girar? El 2, el 3, el 4, el 5, el 6, el 7 y el 9. Una gran cantidad de combinaciones se pueden hacer en cada tirada. Pero lo mejor de este juego es que, además de los cálculos hay también una parte de estrategia, es decir, una manera de razonar y de tomar decisiones que favorezcan la posibilidad de ganar.

Cuando los niños empiezan a jugar (como calcular es cansado) giran cartas con la puntuación directa de un dado (el 2, el 3, el 5, etc.), hasta que unas partidas más adelante se dan cuenta que las cartas que les quedan para girar son las que tienen la puntuaciones más altas (10, 9…) y comienzan a actuar en consecuencia. Este tipo de racionamiento es el propio de la resolución de problemas.

Por lo tanto será necesario prestar atención a la hora de escoger los juegos. Los hay que dependen del todo del azar, como la oca y otros en que las decisiones del jugador influyen de alguna manera en la evolución de la partida. Estos últimos son los que se puede descubrir alguna estrategia favorecedora, como sería el caso del dómino. (Edo et al. 2007).

En infantil tienen sentido los dos tipos de juegos, pero en primaria los juegos de azar puro divierten menos y los de estrategia hacen razonar más.

Hay muchos juegos de mesa que tienen contenidos de números, donde se requiere reconocer las cantidades y contar, como la oca, el parchís, el dómino y el reloj, etc. También hay muchos donde es necesario hacer cálculos (Edo, 2003) y también hay que trabajan el sentido espacial como el tres en ralla y el mismo dómino.

Para concluir podemos decir que el juego de mesa, cuando es escogido por los niños ayuda a aprender contenidos matemáticos, desarrolla la capacidad de atención, de concentración, de coordinación, de negociación, de cooperación, al mismo tiempo que genera emoción y diversión.

Figura 12. Niñas en el taller de juego matemàtico. Han escogido ellas mimas el juego que quieren jugar y con quien quieren estar. Se las ve absolutamente implicadas, atentas y concentradas haciendo lo que quieren hacer. Estan constryendo el concepto de número y ampliando su sentido numérico.

Figura. 13. Niños de infantil jugando al dominó. Intentan controlar 12 cantidades a la vez. Buscan recursos propios como agrupar cantidades iguales, realizar dos grupos de fichas, etc. Atentos, conectados e implicados mental y emocionalmente a lo que están haciendo.

Referencias bibliográficas

Abad, J., & Ruiz de Velasco, A. (2011). *El juego simbólico*. Barcelona: Graó

Coll, C. (1978). La significación psicopedagógica de las actividades espontáneas de exploración. *Anuario de psicología*, *18*, 91-112.

Edo, M. (2000). Mundo Matemático. Formas en el espacio. In M. Antón & B. Moll, (Eds.), *Educación infantil. Orientación y recursos (0-6 años)* (pp. 301-409). Barcelona: Praxis

Edo, M. (2003). Taller de juegos y matemáticas. Documentación para el taller. Desarrollo curricular. Estrategias e instrumentos. In C. Tomás, M. Casas (Eds.), *Educación Primaria. Orientaciones y Recursos* (pp. 1-59). Barcelona: Praxis.

Edo, M. (2012). Ahí empieza todo. Las matemáticas de cero a tres años. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *80*, 71-84

Edo, M., Deulofeu, J., & Badillo, E. (2007). Juego y matemáticas: Un taller para el desarrollo de estrategias en la escuela. In M.I. Berenguer, et al. (Eds.), *Actas XIII JAEM*. Granada: Publicaciones FESPM

Edo, M., & Masoliver, C. (2008). Una tienda en clase. Creación y análisis de un contexto para aprendizajes matemáticos. *UNO-Revista de Didáctica de las Matemáticas, 47,* 20-36

Goldschmied, E. (1986). El joc heurístic. Una activitat del segon any de vida. *Infància, 33*, 11-15.

Majem, T., & Òdena, P. (2007*). Descubrir jugando*. Barcelona: Octaedro.

Onrubia, J. (1994). Enseñar: crear Zonas de Desarrollo Próximo e intervenir en ellas. In C. Coll, et al. (Eds.) *El constructivismo en el aula* (pp. 101-124). Barcelona: Graó

Piaget, J. (1961). *La formación del símbolo en el niño*. México: F.C.E

Piaget, J. (1962). *Play, dreams and imitation in childhood*. Nova York: Norton.

Sylva, K., Bruner G.S., & Genova, P. (1976). The role of Play in the Problem-Solving of children 3-5 Years Old. In J.S. Bruner, A Jolly & K Sylva (Eds.), *Play its role in development and evolution* (pp. 244-257). Gread Britain: Penguin Books

Van Oers, B. (1996). Are you sure? The promotion of mathematical thinking in the play activities of young children. *European Early Childhood Education Research Journal*, *4*(1), 71-89.

Vigotski, L.S. (1988). El paper del joc en el desenvolupament de l'infant. A I. Vila y R. Colomina, (comp.) *Pensament y llenguatge* (pp. 111-288). Barcelona: Eumo

Way, J. (2011). *Number Sense Series: Developing Early Number Sense*. Enriching mathematics. Consultado mayo 2015 a: http://nrich.maths.org/2477

Weissmann, H. (1999). El juego exploratorio en la educación infantil. In *El joc a 0-6 anys. IV Jornades d'innovació en l'etapa d'educació infantil* (pp. 151-159. Barcelona: ICE-UAB